

INFORMAČNÍ BULLETIN



České statistické společnosti

Ročník 36, číslo 3, září 2025

Obsah

Vědecké a odborné články

Josef Bukač: Logaritmus exponenciálních a Cauchyho náhodných proměnných 3

Petr Volf: O „teleskopických“ rozděleních pravděpodobnosti, jejich dvourozměrné verzi i využití 10

Zprávy a informace

Pavel Stríž: Recenze knihy: Opt Art 23

Patrik Sleziak: Konferencia OSSConf 2025 (správa) 27

Redakce: Pozvánka na Energy Days 2025 29

Redakce: Pozvánka na Mikukláše 2025 31

Redakce: Pozvánka na Robust 2026: nové zprávy 33

Redakce: Pozvánka na České uživatelské fórum Copernicus a Dálkový průzkum Země 2025 34

Informační bulletin České statistické společnosti vychází čtyřikrát do roka v českém vydání. Příležitostně i mimořádné české a anglické číslo. Vydavatelem je Česká statistická společnost, IČ 00550795, adresa společnosti je Na padesátém 81, 100 82 Praha 10. Evidenční číslo registrace vedené Ministerstvem kultury ČR dle zákona č. 46/2000 Sb. je E 21214. Časopis je sázen v programu $\text{\TeX}$, ve formátu $\text{\LaTeX}$ s písmy balíku $\text{\LaTeX}$ fonts.

The Information Bulletin of the Czech Statistical Society is published quarterly.
The contributions in the journal are published in English, Czech and Slovak languages.

Předsedkyně společnosti: Ing. Martina Litschmannová, Ph.D., Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 2172/15, 708 33 Ostrava-Poruba, Martina.Litschmannova@vsb.cz.

Redakce: prof. RNDr. Gejza DOHNAL, CSc. (šéfredaktor), prof. RNDr. Jaromír ANTOCH, CSc., doc. RNDr. Zdeněk KARPÍŠEK, CSc., RNDr. Marek MALÝ, CSc., doc. RNDr. Jiří MIČÁLEK, CSc., prof. Ing. Jiří MILITKÝ, CSc., doc. Ing. Iveta STANKOVIČOVÁ, Ph.D., doc. Mgr. Ondřej VENCÁLEK, Ph.D.

Redaktor časopisu: doc. Mgr. Ondřej VENCÁLEK, Ph.D., ondrej.vencalek@upol.cz.
Informace pro autory jsou na stránkách společnosti, <http://www.statspol.cz/>.

DOI: 10.5300/IB, <http://dx.doi.org/10.5300/IB>
ISSN 1210–8022 (Print), ISSN 1804–8617 (Online)

Toto číslo bylo vytištěno s laskavou podporou Českého statistického úřadu.

LOGARITMUS EXPONENCIÁLNÍCH A CAUCHYHO NÁHODNÝCH PROMĚNNÝCH

LOGARITHM OF EXPONENTIAL AND CAUCHY RANDOM VARIABLES

Josef Bukač

Adresa: Bulharská 298, Jaroměř-Josefov 55102, The Czech Republic

E-mail: bukacjosef@seznam.cz

Abstrakt: V článku si ukážeme, jak vypočítat střední hodnotu a druhý moment logaritmu exponenciálního rozdělení. Existují dva způsoby, jak to udělat. Cauchyovo rozdělení nemá střední hodnotu, ale vypočítáme první čtyři momenty logaritmu absolutní hodnoty Cauchyova rozdělení.

Klíčová slova: Exponenciální rozdělení, Cauchyovo rozdělení.

Abstract: We show how to calculate the expectation and the second moment of logarithm of exponential distribution. There are two ways to do this. The Cauchy distribution has no expectation but we calculate the first four moments of the logarithm of the absolute value of the Cauchy distribution.

Keywords: Exponential distribution, Cauchy distribution.

1. Introduction

Here we just mention the Johnson families of frequency curves which are the pdf's that can be mapped to the normal distribution by only three types of functions, van Dorp (2020). The paper shows how to picture the relation between the pdf of the normal distribution and the pdf of the transformed distribution, specifically the S_L family of distributions is interesting to us. We mention this to indicate that the study of functions of random variables makes sense, or at least, it might yield meaningful examples for students.

Exponential distribution is frequently used in reliability engineering. Log-normal distribution is also used. It is the distribution, the logarithm of which has a normal distribution. But what will happen if we take a logarithm of exponential distribution. We want to calculate the first moment and the second moment.

It can be done in two ways. One way is to integrate the transformation function, which is the logarithm in this case, multiplied by the density function. The other way is to find the density function of a new variable and use it to calculate the first moment. Both ways yield the same result.

The same idea is applied to the Cauchy distribution. The moments of the Cauchy distribution are not defined but the moments of the logarithm of its absolute value can be calculated.

2. Exponential distribution

The density function of exponentially distributed random variable X is defined as $\mu e^{-\mu x}$ for $x \geq 0$, equal to zero for $x < 0$, provided $\mu > 0$. We will study the case when $\mu = 1$, that is, the density is just e^{-x} . We define the new variable Y as $Y = \ln(X)$.

1) The first way to calculate the first moment of Y is

$$E(Y) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) dx = -\gamma,$$

where γ is the Euler constant.

The proof may be found in Nahin (2015), p.173. It is interesting to find out that $\gamma = -0.5772\dots$ appears also in statistics.

2) The second way is described in most textbook on probability theory. Let $F_X(x)$ denote the cdf of the random variable X and $f_X(x)$ its pdf. Assume $g(x)$ is the transformation of X giving us a random variable $Y = g(X)$. We denote by $F_Y(y)$ a cdf of Y and its pdf by $f_Y(y)$. We assume that $g(x)$ is differentiable and increasing, its inverse is denoted by $h(y) = g^{-1}(y)$.

Then we differentiate a composite function

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(h(y)) = f_X(h(y))h'(y).$$

In our case we have

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \ln(x), \quad h(y) = e^y$$

and the density function of Y is

$$f_Y(y) = e^{-e^y} e^y = e^{y-e^y}.$$

We just verify that

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{y-e^y} dy = -e^{-e^y} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -(0 - 1) = 1.$$

We write the expectation of Y in both ways as

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{y-e^y} dy = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) dx = -\gamma.$$

We have actually calculated the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{y-e^y} dy = -\gamma.$$

The second moment is

$$M_2(Y) = \int_0^{\infty} e^{-x} (\ln(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2.$$

The proof can be found at www.youtube.com/watch?v=wUY6TJxfFTk.

The second moment can also be written as

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{y-e^y} dy = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2.$$

The fact that the second moment is finite means, by the way, that we are free to use the central limit theorem.

2.1. Cauchy distribution

The pdf of the standard Cauchy distribution X is

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$$

defined for any x . If we consider the absolute value, the pdf of $|X|$ is

$$f_A(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 1)}$$

defined this way for $x \geq 0$, otherwise $f_A(x) = 0$ for $x < 0$.

We study the transformation $Y = \ln |X|$. First we find out what the pdf is

$$f_Y(y) = f_A(h(y))h'(y) = \frac{2e^y}{\pi(e^{2y} + 1)}.$$

We claim that the pdf is symmetrical about zero. To show this, we express the density for $-y$ and multiply both the numerator and denominator by e^{2y} .

$$f_Y(-y) = \frac{2e^{-y}}{\pi(e^{-2y} + 1)} = \frac{2e^y}{\pi(1 + e^{2y})} = f_Y(y).$$

Thus $f_Y(-y) = f_Y(y)$.

Since the pdf is symmetrical, it is immediate that all the odd moments M_N , N odd, are zero if they exist. It is easy to verify that the integrand $y^N e^y / (e^{2y} + 1)$ is dominated by $y^N e^{-y}$ for $y \geq 0$ but dominated by $|y^N e^y|$ for $y < 0$. This reminds us of the gamma function immediately.

The expectation is

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ye^y}{\pi(e^{2y} + 1)} dy = 0.$$

We get a zero if we calculate the expectation as

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \ln(x) f_A(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2 \ln(x)}{\pi(x^2 + 1)} dx = 0.$$

As a diversion we consider what Nahin (2015), p. 151 presents

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x^2 + 1)} dx = G,$$

where $G = 0.91596 \dots$ is the Catalan constant defined in Nahin (2015), p. xv.

Since $0 = \int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$, we get

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x^2 + 1)} dx = -G.$$

Let us find out what the second moment is. One way to do it is this

$$M_2(Y) = \int_0^{\infty} \frac{2(\ln(x))^2}{\pi(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

The proof of $\int_0^{\infty} \frac{(\ln(x))^2}{(x^2 + 1)} dx = \pi^3/8$ is in Nahin (2015), p. 160.

The second way is the use the pdf of Y , that is,

$$M_2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y^2 e^y}{\pi(e^{2y} + 1)} dy.$$

Two ways of defining $M_2(Y)$ give the same result which is $\pi^2/4$.

2.2. Fourth moment

Since the pdf is symmetrical, it will suffice to calculate

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^4 e^y}{e^{2y} + 1} dy = \int_0^{\infty} \frac{y^4 e^{-y}}{1 + e^{-2y}} dy$$

because $M_4(Y) = 4I/\pi$. We give only an outline of the calculations. We use the geometric series $1/(1-r) = 1 + r + r^2 + \dots$ for $|r| < 1$ in which we set $r = -q$ to yield $1/(1+q) = 1 - q + q^2 - q^3 + \dots$ for $|q| < 1$. Thus

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty y^4 e^{-y} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (e^{-2y})^k dy = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty y^4 e^{-y} (e^{-2y})^k dy = \\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty y^4 e^{-(2k+1)y} dy. \end{aligned}$$

Swapping integration and summation is allowed due to the Lebesgue dominated convergence theorem, Royden (1988), p. 267.

The antiderivative $\int x^4 e^{-mx} dx$ is easily verified to be

$$\int x^4 e^{-mx} dx = \frac{-e^{-mx}(m^4 x^4 + 4m^3 x^3 + 12m^2 x^2 + 24mx + 24)}{m^5} + C.$$

Now we calculate two limits to obtain

$$\int_0^\infty x^4 e^{-mx} dx = \left. \frac{-e^{-mx}(m^4 x^4 + 4m^3 x^3 + 12m^2 x^2 + 24mx + 24)}{m^5} \right|_0^\infty = \frac{24}{m^5}.$$

When $m = 2k + 1$, we obtain

$$I = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{24}{(2k+1)^5}.$$

Finally we get

$$M_4(Y) = \frac{4}{\pi} I = \frac{96}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5}.$$

The series on the right hand side converges reasonably fast and we can easily estimate the remainder of an alternating series. The sum of fifty terms of the series gives us $M_4(Y) = 30.440$. The other way to calculate $M_4(Y)$ is numerical integration.¹

Note: The use of the Lebesgue integration theorem is not for free. We have to find an integrable majorant function for the absolute value of the partial sum. If we define $f_N(y) = \sum_{k=0}^N (-1)^k y^4 \exp(-(2k+1)y)$, then

$$|f_N(y)| = \left| \sum_{k=0}^N (-1)^k y^4 e^{-(2k+1)y} \right| \leq \sum_{k=0}^N |y^4 e^{-(2k+1)y}| = y^4 \sum_{k=0}^N e^{-(2k+1)y}.$$

¹Editorial note: The sum in the expression for $M_4(Y)$ coincides with the value of the Dirichlet beta function at argument 5, which evaluates to $5\pi^5/1536$.

We denote by h_N the function

$$h_N(y) = \sum_{k=0}^N y^4 e^{-(2k+1)y},$$

the sequence $h_N(y)$ is positive and monotone increasing for any fixed $y > 0$. Since

$$y^4 e^{-y} \sum_{k=0}^N e^{-2ky} = y^4 e^{-y} \sum_{k=0}^N (e^{-2y})^k,$$

we use the formula for the sum of finite geometric progression $1 + q + q^2 + \dots + q^N = (1 - q^{N+1})/(1 - q)$. Thus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} y^4 e^{-y} \frac{1 - e^{-2y(N+1)}}{1 - e^{-2y}} = y^4 e^{-y} \frac{1}{1 - e^{-2y}}.$$

We calculate the following limit using the L'Hospital rule

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{-y} \frac{y^4}{1 - e^{-2y}} = e^0 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^3}{2e^{-2y}} = \frac{0}{1} = 0.$$

The existence of this finite limit means that $g(y) = e^{-y}y^4/(e^{-2y} - 1)$ is continuous at any $y \geq 0$, if we define $g(0) = 0$. Therefore the integral of $g(y)$ exists and is finite on any interval $[0, T]$ for any finite $T \geq 0$. Let us take a look at

$$|f_N(y)| \leq y^4 e^{-y} \frac{1 - e^{-2y(N+1)}}{1 - e^{-2y}} < y^4 \frac{e^{-y}}{1 - e^{-2y}} = y^4 \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})(1 - e^{-y})} < y^4 \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}$$

if $T = \ln 2$. We see that $y \geq \ln 2$ means $1 - e^{-y} > 1/2$ which implies

$$\frac{y^4 e^{-y}}{1 - e^{-y}} \leq \frac{y^4 e^{-y}}{1/2} = 2y^4 e^{-y}.$$

The dominating function $g(y) = 2y^4 e^{-y}$ for $y \geq \ln 2$ is integrable since $y^4 e^{-y}$ is the integrand in the definition of the gamma function, $\int_0^\infty y^4 e^{-y} dy = \Gamma(5)$.

2.3. Kurtosis

Distributions with a kurtosis bigger than that of the normal distribution have heavier tails than those with the pdf of normal distribution. A practical consequence would be that extreme values from such a distribution occur

more often than those from the normal distribution. The formula for the kurtosis is $K = M_4/M_2^2$. It is equal to 3 in the case of the standard normal distribution. In the case of the distribution of the logarithm of the absolute value of the standard Cauchy distribution we get $K = 30.44/(\pi^4/16) = 5$. The tails are heavier in this case.

3. Substitution

We assume that X is a random variable with a pdf f_X positive on some interval I_X and zero otherwise. We define a random variable $Y = g(X)$ taking on values in the interval obtained by mapping the interval I_X to the interval I_Y or $I_Y = g(I_X)$. In our examples we get $I_X = [0, \infty)$ and $I_Y = (-\infty, \infty)$. We assume that $g(x)$ is differentiable and increasing, its inverse is $h(y) = g^{-1}(y)$.

When we express the n -th moment as

$$\int_{I_X} g(x)^n f_X(x) dx$$

and use the substitution $y = g(x)$, $x = h(y)$, $dx = h'(y) dy$, we get

$$\int_{I_Y} y^n f_X(h(y)) h'(y) dy.$$

This is exactly what we would get if we calculated the n -th moment with the help of pdf of f_Y .

4. Conclusion

We have shown that certain integrals that are impossible to calculate with the help of antiderivatives may be applied in probability theory. The Euler constant may appear in such examples.

It may be difficult to find evaluations of certain non trivial integrals. The book by Nahin (2015) was very helpful.

References

- [1] van Dorp, J. R., Jones, M. C., (2020). *The Johnson system of frequency curves—historical, graphical, and limiting perspectives*, The American Statistician, 74:1, p. 37–52. *cit.* [3](#)
- [2] Nahin, P. J., (2015). *Inside Interesting Integrals*, Springer. *cit.* [4](#), [6](#) and [9](#)
- [3] Royden, H. L., (1988). *Real Analysis*, 3rd edition, Macmillan Publishing Co. *cit.* [7](#)

O „TELESKOPICKÝCH“ ROZDĚLENÍCH PRAVDĚPODOBNOSTI, JEJICH DVOUROZMĚRNÉ VERZI I VYUŽITÍ

ON “TELESCOPIC” DISTRIBUTIONS OF PROBABILITY, THEIR BIVARIATE VERSIONS, AND APPLICATION

Petr Volf

Adresa: Institute of Information Theory and Automation AS CR, Pod vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8

E-mail: volf@utia.cas.cz

Abstrakt: V tomto příspěvku je popsána jedna zajímavá skupina diskrétních rozdělení pravděpodobnosti, která vznikla diskretizací rozdělení spojitých. Říká se jim také teleskopická rozdělení, což je inspirováno pojmem „teleskopická posloupnost“ v matematice. Po úvodních poznámkách se budu hlavně zabývat konstrukcí dvourozměrných teleskopických rozdělení vzniklých diskretizací dvourozměrných distribucí spojitých (konstruovaných zpravidla pomocí vhodné kopuly). Na příkladě pak ukážu výhody a možnosti využití těchto modelů, mezi jinými i „teleskopické“ verze dvourozměrného negativně binomického rozdělení.

Klíčová slova: Diskretizace spojitých rozdělení pravděpodobnosti, teleskopické rozdělení, dvourozměrné rozdělení, kopula, negativně binomické rozdělení.

Abstract: In this paper, an interesting group of discrete probability distributions is described, which arose from the discretization of continuous distributions. They are called also telescopic distributions, which is inspired by the term “telescoping sequence” in mathematics. After the initial remarks, we will mainly deal with the construction of bivariate telescopic distributions resulting from a discretization of bivariate continuous ones (constructed via a suitable copula). We will show the advantages and possibilities of use of these models on an real data example. Among others, also a telescopic form of bivariate negative binomial distribution will be presented.

Keywords: Discretization of continuous probability distribution, telescopic distribution, bivariate distribution, copula, bivariate negative binomial model.

1. Úvod

Na pojem „teleskopické rozdělení pravděpodobnosti“ jsem narazil při recenzi jednoho článku (který zde neuvádím, protože nebyl dobrý). Na Wikipedii jsem našel k tomuto pojmu jen heslo „telescoping series“ [13]. Termín teleskopické rozdělení pravděpodobnosti používá (zatím) jen docela malá skupina statistiků. Zřejmě jeden ze základních článků o těchto diskretních rozděleních pravděpodobnosti je [11]. Tam nabízená definice je následující:

Definice 1 (telekopické rozdělení pravděpodobnosti): Řekneme, že náhodná diskretní nezáporná veličina X má teleskopické rozdělení, pokud se její pravděpodobnosti dají napsat ve tvaru

$$P(X = K) = q^{z(K;\theta)} - q^{z(K+1;\theta)}, \quad \text{pro } K = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

kde $q \in (0, 1)$ a funkce $z(x; \theta)$ je pro každé θ (což je parametr rozdělení) ryze rostoucí v x , $z(0; \theta) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} z(x; \theta) = \infty$.

Tato formulace zahrnuje všechna nezáporná diskretní rozdělení, pro která $P(X = K) > 0$ pro každé $K = 0, 1, 2, \dots$. Označím $\bar{F}(x) = P(X \geq x)$ funkci přežití takového rozdělení (modifikovanou, neboť nerovnost je neostrá). Pak $\bar{F}(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) = 0$, a pro $K = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$P(X = K) = \bar{F}(K) - \bar{F}(K + 1).$$

Pro libovolné $q \in (0, 1)$ definuju $z(x) = \ln(\bar{F}(x)) / \ln(q)$. Po úpravě dostanu

$$q^{z(x)} = e^{\ln(q)z(x)} = e^{\ln(\bar{F}(x))} = \bar{F}(x),$$

a tedy

$$P(X = K) = q^{z(K)} - q^{z(K+1)}$$

(pro jednoduchost zápisu jsem vynechal parametr θ).

Protože se zde používají jen hodnoty distribuční funkce v bodech K , stejný výsledek dostaneme i pomocí distribuční funkce se stejnými hodnotami v nich, ale neklesající, spojitě a integrovatelné mezi nimi. Tím se vlastně dostaneme k pojmu, který je již používán častěji, a to „diskretizace spojitého rozdělení pravděpodobnosti“.

Definice 2 (diskretizované spojitě rozdělení pravděpodobnosti): Necht Y je spojitá nezáporná náhodná veličina s distribuční funkcí $F(y)$, pak

příslušná diskretizovaná náhodná veličina X má rozdělení s pravděpodobnostmi

$$P(X = K) = F(K + 1) - F(K) = \bar{F}(K) - \bar{F}(K + 1), \quad (2)$$

kde $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$ je funkce přežití veličiny Y .

Uvedené definice vlastně neříkají nic nového, ale zahrnují i ty skutečně zajímavé a užitečné (jak se ukáže) případy, kdy je diskrétní rozdělení odvozené z nějakého známého spojitého rozdělení, které má kompaktní tvar distribuční funkce.

Veličina Y ani nemusí být omezená na kladnou poloosu, stačí v Definici 2 položit $\bar{F}(0) = 1$, případně pravděpodobnosti vynormovat, je-li pro původní veličinu $P(Y < 0) > 0$, aby $\sum_{K=0}^{\infty} P(X = K) = 1$. Obdobně se diskretizují i spojitá rozdělení definovaná na celé reálné ose, např. v [12] je použito diskretizované normální rozdělení k odhadu dosažených tolerancí v analýze spolehlivosti.

V tomto příspěvku nejdříve okomentuji některé vlastnosti těchto rozdělení. Pak ukážu postup, jak obdobným způsobem – diskretizací dvourozměrných spojitých rozdělení pravděpodobnosti – konstruovat dvourozměrná diskrétní rozdělení. Ta jednak rozšiřují a zlepšují možnosti modelování dvourozměrných diskrétních dat, ale také zjednodušují práci s nimi. To bude ukázáno na jednoduchém příkladu s reálnými daty.

2. Poznámky k vlastnostem teleskopických rozdělení

Roknabadi et al. [11] se věnují hlavně otázce porovnání vlastností původních spojitých a z nich odvozených diskrétních rozdělení, a to při aplikaci v modelování a analýze spolehlivosti. Pohled tohoto příspěvku je širší, obecnější, cílem je metodou diskretizace obohatit nabídku diskrétních rozdělení pravděpodobnosti, a tedy i zvýšit flexibilitu modelování. V následujících poznámkách připomenu, že i některá standardní diskrétní rozdělení splňují Definici 2 pro nějakou funkci přežití, a tedy se s nimi dá pracovat jako s diskretizovanými spojitými distribucemi. To je, jak ukážu, výhodné dále při konstrukci jejich dvourozměrných verzí.

1. Termín „teleskopický“ ($\sim$ vysouvací, nastavovací, třeba typ dalekohledu nebo žebříku) se zjevně vztahuje k vlastnosti částečných součtů v posloupnosti pravděpodobností (1) či (2), a to sice že pro $M \leq N$ je

$$\sum_{k=M}^N P(X = k) = q^{z(M;\theta)} - q^{z(N+1;\theta)} = \bar{F}(M) - \bar{F}(N + 1).$$

Ještě zmíním jednu zajímavou vlastnost. Je snadné ukázat, že

$$EX = \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot (\bar{F}(K) - \bar{F}(K+1)) = \sum_{K=1}^{\infty} \bar{F}(K) \leq \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy = EY,$$

pokud je EY konečná. Pak poslední rovnost plyne z věty 1.5 v [1].

2. Jak již bylo řečeno, myšlenka diskretizace spojitého rozdělení jako v (2) zdaleka není nová. Je snadné si představit případ, kdy sice sledujeme realizaci spojitě veličiny Y , ale známe jen počty hodnot v daných intervalech. Pak samozřejmě použijeme obdobu vztahu (2) a z relativních četností dostaneme odhad distribuční funkce F v hranicích intervalů. Příkladem může být odhad parametrů Weibullova rozdělení, vlastně jde o klasický způsob ještě z „před-počítačových“ dob. Uvedu zde k tomu příklad:

Nechť z N výrobků uvedených do provozu v čase $t = 0$ je v časech $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K$ v provozu ještě $N > N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_K$ výrobků. Předpokládejme, že Weibullovo rozdělení s funkcí přežití $\bar{F}(t) = \exp(-\alpha \cdot t^\beta)$ je vhodným modelem pro dobu životnosti těchto výrobků. A tak porovnáme tuto modelovou funkci přežití s empirickou v bodech t_j , tj. $\exp(-\alpha \cdot t_j^\beta) \sim N_j/N = r_j$. Po dvojím logaritmování obou stran dostaneme lineární vztah

$$\ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(t_j) \sim \ln(-\ln(r_j)), \quad j = 1, 2, \dots, K.$$

Z něj odhadneme parametry $\ln(\alpha)$ a β metodou nejmenších čtverců.

3. Pomocí (2) dostáváme velkou třídu diskretních rozdělení pravděpodobnosti, v podstatě dost jednoduchých (tak jednoduchých, jako spojitá distribuce, ze které to diskretní rozdělení odvodíme). Tím je tedy hodně obohacen náš výběr parametrických modelů pro diskretní data. A tyto modely mají jednu výhodu, jsou vlastně zadány pomocí svojí distribuční funkce, zatímco u standardně používaných diskretních rozdělení je zpravidla distribuční funkce dána prostě částečným součtem pravděpodobností, a to není příliš pohodlné. Ale je známo, že i mnohá standardní diskretní rozdělení mohou být zároveň vyjádřena ve tvaru (2).
4. Je snadné ukázat, že geometrické rozdělení je teleskopického typu. Dostaneme je pomocí (2) z rozdělení exponenciálního:

$$P(X = K) = \exp(-\lambda K) - \exp(-\lambda(K+1)) = \exp(-\lambda K)(1 - \exp(-\lambda)) = (1-p)^K p,$$

kde $p = 1 - \exp(-\lambda)$ je parametr odpovídající pravděpodobnosti úspěchu. Tady je tedy něco jako „styčný bod“ klasických a teleskopických rozdělení pravděpodobnosti.

5. I Poissonovo rozdělení může být vyjádřeno tímto „teleskopickým“ způsobem: Mějme homogenní Poissonův proces s parametrem λ , tj. koncové body postupně načítaných nezávislých exponenciálních náhodných veličin s tímto parametrem. Pak veličina X = počet těchto bodů v intervalu $(0, 1)$ má Poissonovo rozdělení, zase s tímto λ . Zároveň veličina T_K = délka součtu K oněch exponenciálních veličin má gamma rozdělení $\text{Gamma}(K, \lambda)$, K je parametr tvaru, λ intenzity ($1/\lambda$ je parametr měřítka, gamma rozdělení takto vzniklému se také říká Erlangovo). Hustota tohoto rozdělení je $f_K(z) = \lambda^K z^{K-1} e^{-\lambda z} / \Gamma(K)$, distribuční funkce $F_K(z) = \gamma(K, \lambda z) / \Gamma(K)$, kde $\Gamma(K) = \int_0^\infty t e^{-t} dt$ je úplná gamma funkce (připomeňme, že $\Gamma(K) = (K-1)! \forall K \in \mathbb{Z}$) a $\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$ je neúplná (dolní) gamma funkce.

Takže pro naši Poissonovu veličinu dostaneme, že

$$P(X = K) = P(T_K < 1) - P(T_{K+1} < 1) = \frac{\gamma(K, \lambda)}{\Gamma(K)} - \frac{\gamma(K+1, \lambda)}{\Gamma(K+1)}. \quad (3)$$

Funkce $S(t; \lambda) = \gamma(t, \lambda) / \Gamma(t)$ je takzvaná regularizovaná (dolní) neúplná gamma funkce. Pro každé $\lambda > 0$ je jako funkce $t > 0$ nerostoucí, s $\lim_{t \rightarrow 0+} S(t) = 1$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, čili je to funkce přežití nějaké spojitě náhodné veličiny. Takže (3) odpovídá definici teleskopického typu rozdělení pravděpodobnosti.

6. Důsledkem je, že i negativně binomické rozdělení je tohoto typu, protože toto rozdělení dostaneme mimo jiné i z rozdělení Poissonova, pokud předpokládáme, že jeho parametr λ je náhodný s gamma rozdělením (takže vlastně bayesovsky, nebo se tomu také říká compound, mixed, contagious Poisson distribution). Konkrétně, nechť λ Poissonovy veličiny X má apriorní $\text{Gamma}(r, p/(1-p))$ rozdělení (jeho hustotu označme $g(\lambda; r, p)$), pak výsledkem je náhodná veličina (označme ji Z) s negativně binomickým rozdělením s parametry r a p , a je:

$$\begin{aligned} P(Z = K; r, p) &= \int_0^\infty P(X = K; \lambda) g(\lambda; r, p) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty S(K; \lambda) g(\lambda; r, p) d\lambda - \int_0^\infty S(K+1; \lambda) g(\lambda; r, p) d\lambda = \\ &= I_{1-p}(K, r) - I_{1-p}(K+1, r), \end{aligned}$$

kde $I_x(a, b) = B(x; a, b)/B(a, b)$ je tzv. regularizovaná neúplná beta funkce, tedy $B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ je neúplná beta funkce a $B(a, b)$ je úplná beta funkce.

7. Podobným způsobem může být vyjádřeno i binomické rozdělení, jeho distribuční funkci lze opět napsat s pomocí regularizované beta funkce,

$$F(k) = P(X \leq k) = I_{1-p}(N - k, k + 1).$$

Takto tedy můžeme vyjádřit distribuční funkce některých diskretních rozdělení v kompaktním tvaru. Tyto zápisy můžeme najít i ve Wikipedii. Ač to nejsou příliš jednoduché funkce, tento tvar umožní s těmito distribucemi zacházet jako s diskretizovanými spojitými, a jak ukážu v následující části, vytvářet z nich s pomocí vhodně zvolených kopul různé varianty dvourozměrných rozdělení.

Ještě se nabízí i otázka, jestli takto diskretizovaným spojitým rozdělením říkat „teleskopická“, tj. například T-Weibull, či jenom D-Weibull jako „diskretizované“ Weibullovo rozdělení. Ale šikovný název je součástí marketingu, to jsme i v metodách analýzy dat už několikrát viděli (pojmy jako LASSO, MARS, i třeba genetický algoritmus, neuronová síť). I proto se asi ona určitá skupina badatelů toho termínu drží.

3. Dvourozměrná teleskopická rozdělení

Dá se říci, že teprve při práci s dvourozměrnými diskrétními daty vynikne další výhoda těchto modelů. Konstrukce dvourozměrných verzí klasických diskrétních rozdělení je zpravidla dost nešikovná. Snadné je takto rozšířit Bernoulliho „0–1“ rozdělení, případně z něj zkonstruovat dvourozměrné geometrické rozdělení [3, 8], u dalších jde už o problém. Ještě je populární určitá verze Poissonova rozdělení, např. [5, 6]:

Nechť X_1, X_2, X_3 jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pak $Y = X_1 + X_3$ a $Z = X_2 + X_3$ tvoří dvourozměrné Poissonovo rozdělení.

Jejich korelace je $\lambda_3/\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}$ (tj. kladná a vázaná na hodnoty parametrů, to je tedy omezení této konstrukce), marginální rozdělení jsou Poissonova s parametry $\lambda_1 + \lambda_3$ a $\lambda_2 + \lambda_3$, jejich společná pravděpodobnostní funkce už není příliš jednoduchá. Obecnější způsob konstrukce mnohorozměrných diskrétních rozdělení ukazuje např. [10] na příkladě s negativně binomickým rozdělením. Předpis pro sdruženou pravděpodobnost je pak ještě značně složitější a samozřejmě opět závisí na „mixovacích“ parametrech (jako bylo λ_3 pro uvedený Poissonův případ).

Na druhé straně, pokud použijeme metodu založenou na diskretizaci spojitých rozdělání, vyjdeme tedy z vhodného dvourozměrného spojitého rozdělání. To není problém s využitím vhodných marginálních spojitých rozdělání a vybrané kopuly. Samozřejmě i tento přístup se již objevil, v podstatě zase je snahou modelovat spojitě rozdělání na základě diskretizovaných dat, obdobně jako je to ukázáno pro jednorozměrný případ Weibullova rozdělání v Poznámce 2. Takový přístup je předveden např. v Barbiero [2]. Ale zde se na tento problém díváme vlastně opačně, máme diskrétní data a snažíme se pro ně najít vhodný a jednoduchý model, a také navrhnout poměrně univerzální metodu takového modelování.

Připomenou zde ještě, že pokud $C(u, v, \theta)$ je kopula, θ její parametr, $\bar{F}_S(s)$, $\bar{F}_T(t)$ marginální funkce přežití dvou spojitých veličin S, T , tak sdružená funkce přežití je

$$P(S > s, T > t) = \bar{F}_2(s, t) = C(\bar{F}_S(s), \bar{F}_T(t), \theta). \quad (4)$$

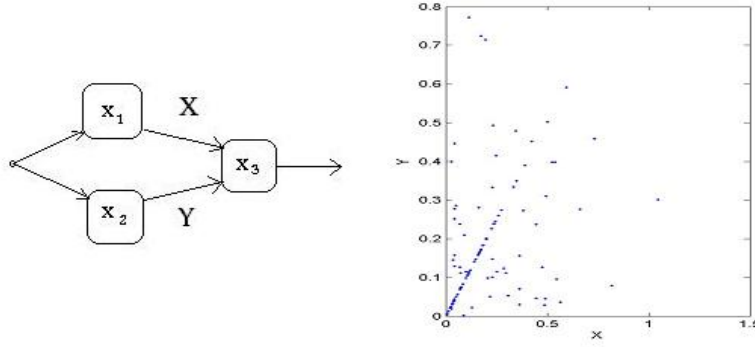
Samozřejmě, různé kopuly vedou k různým sdruženým modelům, i s různou korelací (některé kopuly vedou jen na korelaci v omezeném intervalu, ne v celém $[-1, 1]$), parametr θ je třeba odhadovat. Ale použití takového modelu už je dál poměrně jednoduché, jeho diskretizace pro popis rozdělání nějakých diskrétních náhodných veličin X, Y je nasnadě:

$$\begin{aligned} P(X = K, Y = L) = & \bar{F}_2(K, L) - \bar{F}_2(K, L + 1) - \\ & - \bar{F}_2(K + 1, L) + \bar{F}_2(K + 1, L + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Takto tedy opět poměrně snadno získáme rozsáhlou skupinu dvourozměrných diskrétních rozdělání. Také si všimněme, že vlastně marginální rozdělání pro X a Y nemusí být stejného typu. Poznámky na konci předchozí části navíc ukazují, že takto můžeme vytvářet i dvourozměrné verze některých standardních diskrétních rozdělání.

Volba vhodné kopuly je otázkou porovnání fitu modelů, zásadní je vzít model, který umožňuje adekvátně zachytit korelaci. Podstatné na použití kopul je také to, že dvourozměrný model zachová do něj vstupující marginální rozdělání. To není vždy samozřejmé, ukážeme to na následujícím příkladu s konstrukcí dvourozměrného rozdělání metodou, kterou použili Marshall a Olkin [7]. Ta vlastně souvisí i s výše uvedenou konstrukcí dvourozměrné Poissonovy distribuce.

Představme si systém tří nezávislých prvků (třeba ve výrobní lince) jako na Obrázku 1 vlevo a zkoumejme jeho spolehlivost (resp. dobu do poruchy). Nechtě funkce přežití jednotlivých prvků jsou $\bar{F}_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, náhodnou



Obrázek 1: Schéma jednoduchého systému. Generovaná data z Marshallova-Olkinova 2D exponenciálního rozdělení s $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

dobu do poruchy pro horní větev, prvky 1 a 3, označíme X , pro dolní větev, prvky 2 a 3, Y . Takže vlastně $X = \min(X_1, X_3)$ a $Y = \min(X_2, X_3)$, marginální rozdělení veličin X a Y mají funkce přežití $P(X > x) = \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_3(x)$, resp. $P(Y > y) = \bar{F}_2(y) \cdot \bar{F}_3(y)$, zatímco sdružené rozdělení je

$$P(X > x, Y > y) = \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot \bar{F}_3(\max(x, y)).$$

Toto je tedy pravděpodobnost, že horní větev systému vydrží více než x a dolní více než y . Pravděpodobnost výdrže celého systému (označme příslušnou náhodnou veličinu T) by samozřejmě vypadala jinak:

$$P(T > t) = (1 - F_1(t) \cdot F_2(t)) \cdot \bar{F}_3(t).$$

Sdružené rozdělení (X, Y) již není spojité, má singulární část $X = Y$ s pravděpodobností $P(X_3 < \min(X_1, X_2))$. Nejznámější je tento model pro exponenciální rozdělení: Nechtě $X_j, j = 1, 2, 3$, mají exponenciální rozdělení s parametry (intenzitami) λ_j , pak marginální rozdělení X a Y jsou exponenciální, s parametry $\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3$. Jejich korelace $\rho(X, Y) = \lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, čili opět nezáporná a omezená v $[0, 1)$. Také $P(X = Y) = \lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$. Tuto singularitu ukazuje dobře i obrázek 1 vpravo, kde je z tohoto modelu s parametry $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ náhodně generováno a zobrazeno 100 hodnot. Zkusme ale v tomto modelu vzít rozdělení X_j třeba Weibullova, pak X a Y už Weibullovo rozdělení mít nebudou.

4. Ilustrace

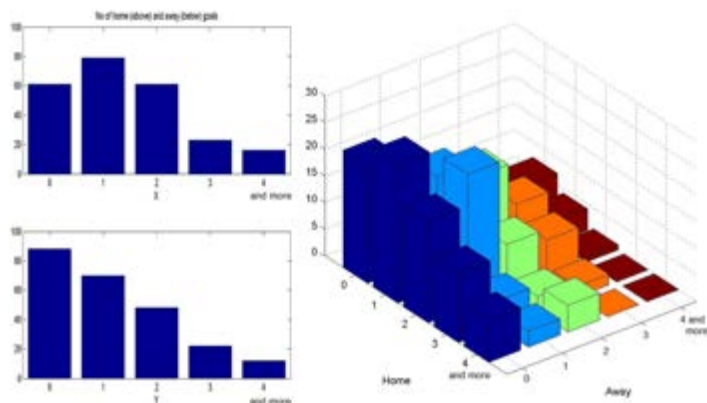
Využití konstrukce dvourozměrných teleskopických rozdělení v souladu s (5) ukážeme na následujícím příkladu. Budeme mít data ve formě („spárovaného“) náhodného výběru rozsahu N z dvojice diskrétních náhodných veličin X, Y . V prvním kroku bude naší snahou najít vhodná marginální rozdělení pro X i Y . Kromě několika diskretizovaných spojitých modelů vyzkoušíme i standardní diskrétní rozdělení (Poissonovo, geometrické, negativně binomické). Parametry rozdělení odhadneme metodou maxima věrohodnosti, dobrou shodu s daty otestujeme graficky i Pearsonovým chí-kvadrát testem. Data budou zpravidla omezena na několik hodnot či tříd, například $0, 1, 2, \dots, M-1$ a $\geq M$. Nakonec i pro korektní použití chí-kvadrát testu se doporučuje sloučení tříd s malou pravděpodobností. Pak, i na základě odhadnuté korelace $\rho(X, Y)$, vybereme vhodnou kopulu a v souladu s (4) a (5) zkonstruujeme příslušné dvourozměrné diskrétní rozdělení. Přitom použijeme parametry marginálních rozdělení již odhadnuté, takže v tomto kroku je třeba odhadnout už jen parametr kopuly θ . Shodu opět otestujeme chí-kvadrát testem.

Základním požadavkem úspěchu bude tedy dobrá shoda jak pro dvourozměrný model, tak pro oba modely marginální.

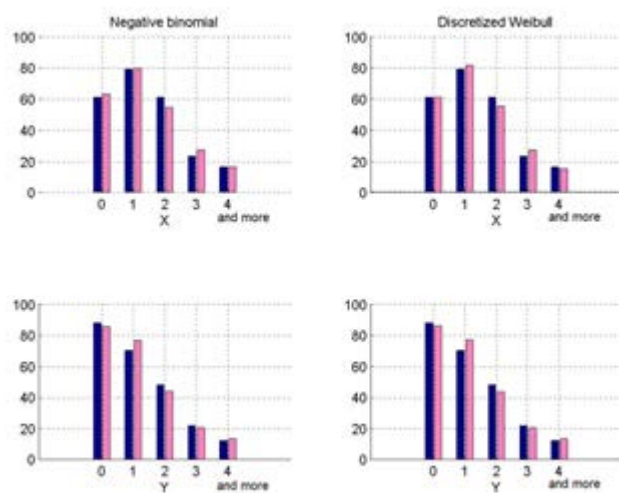
Příklad

I v tomto příkladu zpracovávám data z oblasti sportu. Jedná se o počty gólů vstřelených v jednotlivých utkáních české fotbalové Chance ligy v základní části ročníku 2024–2025. Veličiny X a Y jsou počty vstřelené domácím a hostujícím týmem. Data jsou stažena z webu <https://www.sport.cz/sekce/fotbal-ceska-1-liga-vysledky-4> a obsahují tedy výsledky z 30 kol krát 8 utkání, tj. $N = 240$ dvojic hodnot. Obrázek 2 vlevo ukazuje hodnoty X a Y zvlášť. Součty jsou 345 a 282, $\text{maximum}(X) = 7$, $\text{maximum}(Y) = 5$, průměry jsou 1,438 a 1,175, rozptyly 1,661 a 1,3417, korelační koeficient $r(X, Y) = -0,1401$, což je statisticky významná hodnota. Tyto základní charakteristiky byly spočteny z úplných dat. Pravá část Obrázku 2 ukazuje dvourozměrný histogram výsledků. V grafech a pro další výpočty jsou již vysoká skóre sloučena do třídy „větší nebo rovno 4“. Pozorované četnosti N_{obs_j} jsme následně porovnávali s četnostmi očekávanými, N_{exp_j} , predikovanými jednotlivými modely. Kritériem tedy byla veličina

$$C2 = \sum_j (N_{\text{obs}_j} - N_{\text{exp}_j})^2 / N_{\text{exp}_j}$$



Obrázek 2: Vlevo: grafy pozorovaných četností veličin X a Y . Vpravo: dvou-rozměrný graf hodnot (X, Y) .



Obrázek 3: Graf shody četností pozorovaných (tmavá) a predikovaných modelem (světlá). Vlevo pro negativně binomické modely, vpravo pro diskretizované Weibullové modely, nahoře pro veličinu X , dole pro Y .

porovnávána s 95% kvantilem chí-kvadrát rozdělení s počtem stupňů volnosti rovným počtu tříd $- 1$ – počet odhadnutých parametrů modelu.

V prvním kroku jsme hledali vhodné 1-rozměrné modely zvlášť pro X i Y . Pro veličinu X vyhovovalo i Poissonovo rozdělení (pro Y již ne), ale daleko lepším se ukázalo pro obě veličiny jak negativně binomické, tak diskretizované Weibullovo rozdělení. Shoda obou s daty je ukázána na Obrázku 3. Pro negativně binomické modely byly obdrženy maximálně věrohodné odhady parametrů $p_x = 0,885$, $r_x = 10,964$, $p_y = 0,751$, $r_y = 3,584$, kritérium bylo $C2_x = 1,446$, $C2_y = 1,276$.

Pro Weibullovo rozdělení, s parametrizací ve tvaru $\bar{F}(t) = \exp(-\alpha \cdot t^\beta)$, byly pak maximálně věrohodné odhady $\alpha_x = 0,292$, $\beta_x = 1,623$, $\alpha_y = 0,444$, $\beta_y = 1,354$ a $C2_x = 1,439$, $C2_y = 1,353$. Kritická hodnota byla pro všechny 4 testy tatáž, při $5 - 1 - 2 = 2$ stupních volnosti je $C2_{\text{crit}} = 5,992$.

Následně bylo z oněch dvou Weibullových marginálních rozdělení vytvořeno dvourozměrné, použili jsme Barnettovu kopulu, která je jednoduchá na výpočet a zaručuje zápornou korelaci. Její tvar je

$$C(u, v) = u \cdot v \cdot e^{-\theta \ln(u) \ln(v)}.$$

Zbývá tedy odhadnout parametr θ , ten je v rozsahu $[0, 1]$, což odpovídá mezím pro korelaci $\rho(U, V)$ od nuly do zhruba $-0,52$. Pomocí této kopuly zkonstruoval vlastně dvourozměrné exponenciální rozdělení již Gumbel v [4] (aniž by použil pojem „kopula“). My jsme ji tedy využili pro vytvoření dvourozměrné Weibullové funkce přežití

$$P(X > x, Y > y) = e^{-\alpha_x \cdot x^\beta} \cdot e^{-\alpha_y \cdot y^\beta} \cdot e^{-\theta \alpha_x \alpha_y x^\beta y^\beta}.$$

Toto rozdělení bylo pak diskretizováno, dle (5). Maximálně věrohodný odhad parametru kopuly dal hodnotu $\theta = 0,225$. Odhadli jsme i teoretickou korelaci v příslušném spojitém modelu, $\rho(X, Y) = -0,171$. Kritérium pro test dobré shody vyšlo $C2 = 21,738$, nyní při $5 \times 5 - 1 - 5 = 19$ stupních volnosti, příslušný 95% kvantil je $C2_{\text{crit}} = 30,144$, p -hodnota testu 0,298.

Využití dvourozměrného negativně binomického rozdělení

V poznámce 6 v části 2 bylo ukázáno, že i negativně binomické rozdělení lze vyjádřit jako diskretizované spojitě rozdělení, a to pomocí regularizované neúplné beta funkce:

$$P(X = K) = I_{1-p}(K, r) - I_{1-p}(K + 1, r), \quad \text{kde } I_q(a, b) = B(q; a, b)/B(a, b),$$

přičemž $I_q(t, b)$, jako funkce $t > 0$, je funkcí přežití nějaké nezáporné spojitě náhodné veličiny. Takže se pak dá pomocí (4) a (5) a vhodné kopuly

z daných marginálních negativně binomických rozdělení zkonstruovat dvou-
rozměrné rozdělení. To jsem zkusil i v tomto příkladě. Odhadnuté parametry
 p_x , r_x , p_y , r_y jsou uvedeny výše, a opět jsem použil Barnettovu kopulu.
Maximálně věrohodný odhad jejího parametru byl $\theta = 0,229$, kritérium testu
dobré shody vyšlo $C^2 = 21,246$, p -hodnota testu 0,323, výsledek je srovnatelný
s výsledkem pro dvourozměrné diskretizované Weibullovo rozdělení.

5. Závěr

V příspěvku jsme připomněli skupinu diskrétních rozdělení pravděpodobnosti
(také nazývaných „teleskopickými“ rozděleními), která vzniknou diskretizací
rozdělení spojitých. Hlavní náplní pak byla obdobná konstrukce dvourozměrných
diskrétních rozdělení. Zajímavou otázkou je interpretace takovýchto modelů.
Původní ideu reprezentuje třeba příklad v poznámce 2 z úvodu, ale ve
většině aplikací je spíše úkolem najít vhodný a početně jednoduchý kvantita-
tivní model, interpretace či věcná motivace pro určitý typ modelu už je spíše
nejasná. To ukazuje i zde uvedený příklad.

Nakonec, už i interpretace negativně binomického modelu s reálným pa-
rametrem r není úplně zřejmá, jediné snad jako mix Poissonových rozdělení.
Proto je často používáno místo Poissonova rozdělení v případech, kdy je roz-
ptyl dat významně větší než průměr, takže i na modelování skóre ve fotbalo-
vých zápasech. Například McHale a Scarf [9] konstruovali také dvourozměrné
rozdělení pomocí kopuly, i když stále měli marginální distribuční funkce ve
formě součtu. Ale uvažovali zároveň i závislost parametrů na kovariátách
(jako je hodnocení týmu, indikátor domácí výhody), což je vlastně inspirace
pro další vývoj modelů zkoumaných v tomto článku.

Literatura

- [1] Anděl, J., 2005. *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha.
ISBN 80-86732-40-1. cit. 13
- [2] Barbiero, A., 2022. *Discrete analogues of continuous bivariate probability distributions*. Annals of Operations Research, 312, 23–43,
[doi:10.1007/s10479-019-03388-8](https://doi.org/10.1007/s10479-019-03388-8). cit. 16
- [3] Basu, A. P. and Dhar, S., 1995. *Bivariate geometric distribution*. Journal
of Applied Statistical Science, 2, 33–44. cit. 15
- [4] Gumbel, E. J., 1960. *Bivariate Exponential Distributions*. J. Amer. Sta-
tist. Assoc. 55, 698–707. [doi:10.1080/01621459.1960.10483368](https://doi.org/10.1080/01621459.1960.10483368). cit. 20

- [5] Johnson, N., Kotz, S., Balakrishnan, N., 1997. *Discrete Multivariate Distributions*. Wiley, New York. ISBN 978-0-471-12844-1. cit. **15**
- [6] Kocherlakota, S., Kocherlakota, K., 1992. *Bivariate Discrete Distributions*, Marcel Dekker, New York. doi:10.1201/9781315138480. cit. **15**
- [7] Marshall, A. W., Olkin, I., 1967. *A multivariate exponential distribution*. J. Amer. Statist. Assoc. 62, 30–44. doi:10.2307/2282907. cit. **16**
- [8] Marshall, A. W., Olkin, I., 1985. *A family of bivariate distributions generated by the bivariate Bernoulli distribution*. J. Amer. Statist. Assoc. 80, 332–338. doi:10.1080/01621459.1985.10478116. cit. **15**
- [9] McHale, I., Scarf, P., 2011. *Modelling the dependence of goals scored by opposing teams in international soccer matches*. Statistical Modelling 11, 219–236. doi:10.1177/1471082X1001100303. cit. **21**
- [10] Ng, C.M., Ong, S.H., Srivastava, H.M., 2010. *A class of bivariate negative binomial distributions with different index parameters in the marginals*. Appl. Mathematics and Computation 217, 3069–3087. doi:10.1016/j.amc.2010.08.040. cit. **15**
- [11] Roknabadi, A. H. R., Borzadaran, G. R. M., Khorashadizadeh, M., 2009. *Some Aspects of Discrete Hazard Rate Function in Telescopic Families*. Economic Quality Control 24, No. 1, 35–42. doi:10.1515/EQC.2009.35. cit. **11, 12**
- [12] Roy, D., 2003. *The Discrete Normal Distribution*. Comm. Statist. – Theory and Methods, 32, 1871–1883. doi:10.1081/STA-120023256. cit. **12**
- [13] Telescoping series, retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Telescoping_series, 2/2025. cit. **11**

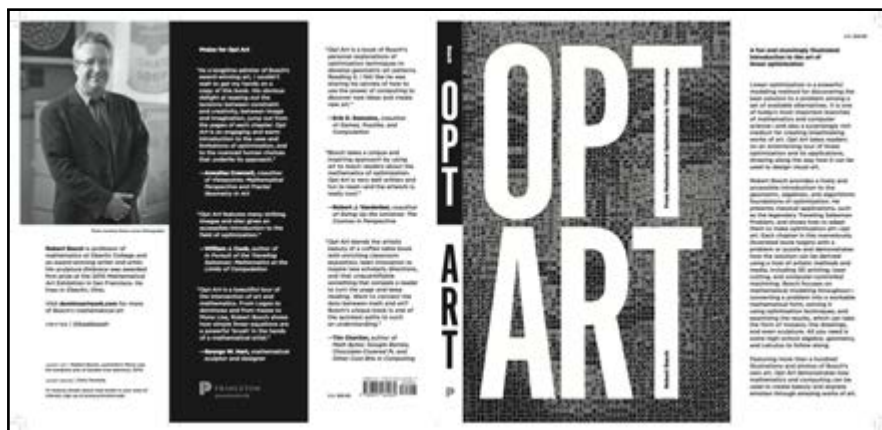
RECENZE KNIHY: OPT ART

BOOK REVIEW: OPT ART

Pavel Stríž

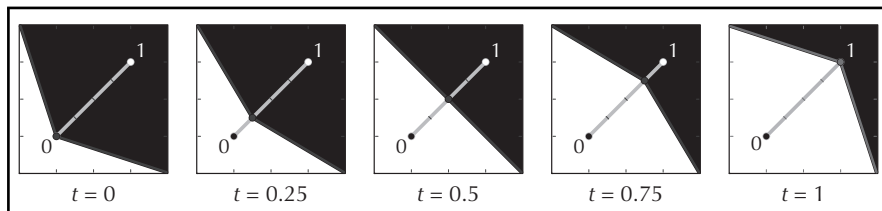
E-mail: pavel@striz.cz

V roce 2019 vyšla v nakladatelství Princeton University Press v USA kniha Roberta Bosche: *Opt Art – From Mathematical Optimization to Visual Design*, xii+188 stran. ISBN 978-0-691-16406-9.



Kdybychom měli knihu shrnout do jedné věty, tak je to ukázka matematické optimalizace s výstupy do světa vizualizace a umění. Tedy místo Op-art (optické umění) přechází do Opt-art (optimalizační umění).

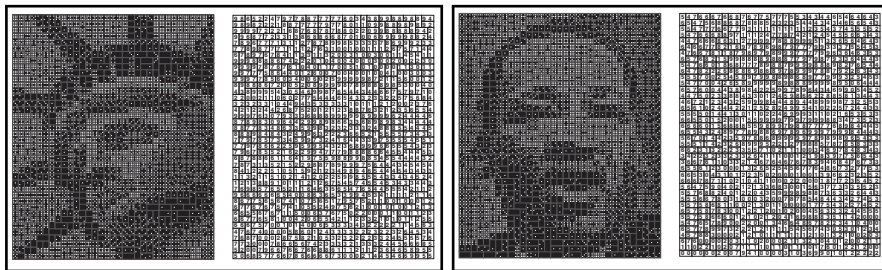
První dvě kapitoly uvádí do problematiky příkladem flexibilních Truchetových dlaždic. Stupeň šedi rastrových obrázků pasuje na vhodnou dlaždici. Optický klam pak odvede svou práci: zblízka člověk vnímá jednotlivé dlaždice, z větší dálky člověk vnímá původní obrázek. V druhé kapitole knihy pak zkouší některé další flexibilní dlaždice.



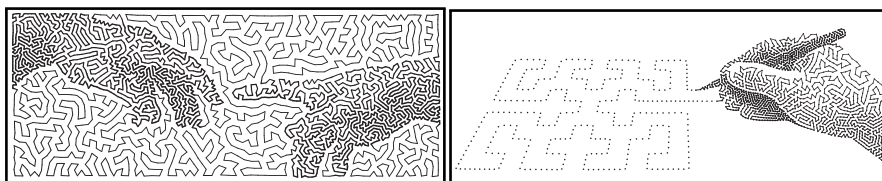
Pro méně znalé uvádí problematiku lineárního programování (principy, Simplexův algoritmus, Branch-and-Bound) **v třetí kapitole**. Na pomoc si bere program Gurobi, <https://www.gurobi.com>. Zaujalo mě, že si bez větších problémů nechává vypsat více/všechna řešení, to není u lineárního programování úplně obvyklé. Všiml jsem si, že v názvech proměnných používá čárku, to si nevybavuji, že by jiný program uměl. Tedy doslova, např. místo neznámé $X_{A,j}$, $j = 1, \dots, 5$, používá $XA,1$ až $XA,5$.

V kapitole čtvrté zmiňuje přiřazovací úlohu, tedy úvod do binárního lineárního programování. Pixely rastrových obrázků nahrazuje různými obrázky či dílky. Ať už se jedná o kreslené obrázky, cifry, nebo domino kostky.

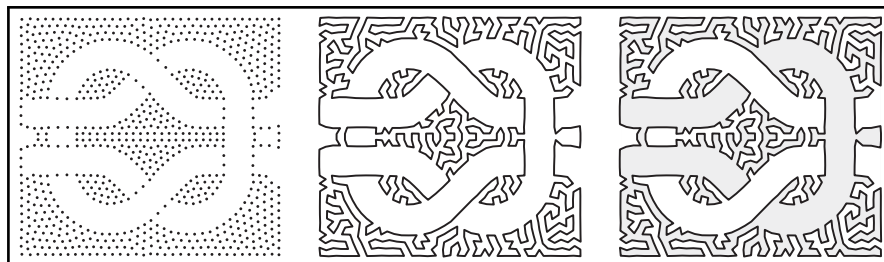
Experimenty s nimi pak provází celá **pátá kapitola**. Kde je to potřeba, přidává celé sady domino kostek. Zmiňuje, že obrázky Martina Luthera Kinga Jr. či prezidenta Baracka Obamy jsou dětmi složeny a vystaveny po celých Spojených státech. Autor má na svých webových stránkách, <http://www.dominartwork.com/>, jejich rozkresy.



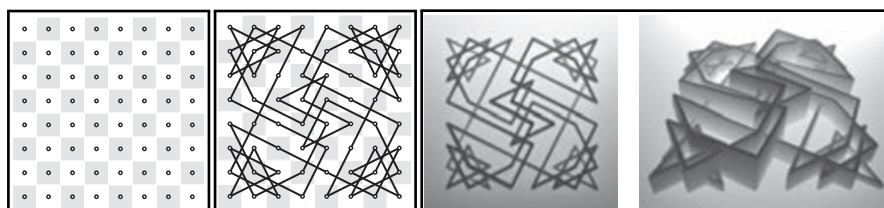
Kapitola šestá potěší příznivce TSP, tedy problému obchodního cestujícího. Z trasy vzniká původní obrázek. Uvádí metodu Branch-and-Cut a heuristiku Lin-Kernighana, vedle lineárního programování v Gurobi si bere na pomoc program Concorde, <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>. Našince potěší, že tento nyní již legendární program spoluvytváří Vašek Chvátal (<https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/contact/team.htm>), absolvent pražské MFF. Za pozornost stojí metoda stippling (algoritmus MacQueena), tedy převod obrázku do série bodů. Seriózní badatele by měla zaujmout soutěž *The Mona Lisa TSP Challenge*, tedy snaha najít globální optimum TSP pro 100 tisíc bodů. Zatím vede Yuichi Nagata se svou optimalizací z roku 2009.



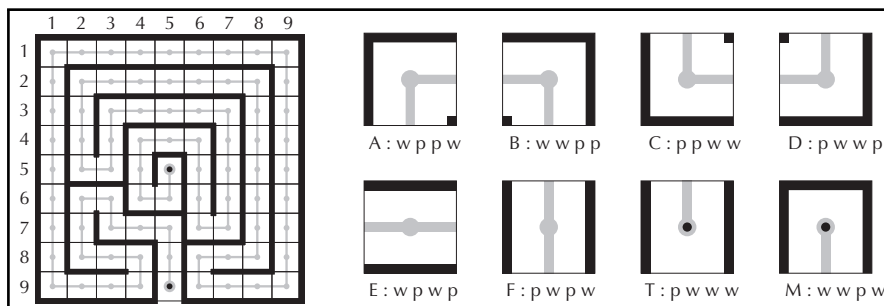
Autor v kapitole sedmé dále zkoumá možnosti optimalizace TSP, konkrétně užití více tras a práci se symetriemi. Inspiraci našel v díle Rinuse Roelofse, www.rinusroelofs.nl. On se totiž cyklus dá vymalovat barvou. Kapitola obsahuje nespočet obrázků, včetně ukázek laserového a vodního řezání. Vznikají tedy unikátní projekty ze dřeva a kovů. Typografy potěší konstrukce Beziérovky jako metoda vyhlazování dvou či více bodů.



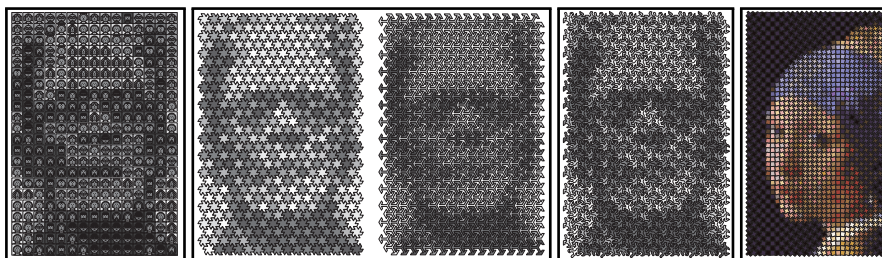
Kapitola osmá je lahůdka. Autor si bere do parády cestu šachového koníka na šachovnici 8×8 , a i když ví, že neexistuje rotační či zrcadlová symetrie takové cesty, hledá cestu, která se ideální symetrické nejvíc blíží. Pracuje se slovíčkem *nearly*, např. *nearly 4-fold symmetry*, volně přeloženo jako *téměř rotačně symetrické*. Vedle obrázků potkáme fotky 3D tisků.



V kapitole deváté se vrací k mozaice, tentokrát na konstrukci bludiště. Za stavební prvky si bere možnosti dílku bludiště (jak vypadá trasa a stěny) a bludiště si nechává vygenerovat za nejrůznějších omezení.



V tomto experimentu pokračuje **i v kapitole desáté**, tentokrát však transformuje stavební prvky mozaik. Aby barvy netvořily velké shluky, nastavuje omezení na oblast. Došlo i na mozaiku inspirovanou Escherem, včetně méně známé mozaiky Cyrila Stanleyho Smitha, která měla tvořit alternativu Truchetově mozaice. Gurobi už nepočítá vteřiny, jako v úvodu knihy, ale hodiny a dny. Kdo by si přál komerční program Gurobi vyzkoušet, zkuste si jej přes NEOS server, <https://neos-server.org>.



V poslední **kapitole jedenácté** zkouší vizualizaci přes Game of Life Johna Hortona Conweye. Ať už nalezením symetrických dílků či zajímavý pokus optimalizovat dva snímky tohoto celulárního automatu.

Knize nelze nic vytknout. Jedinečný projekt s mnoha inspirativními nápady podpořena řadou obrázků a fotek. Knihu může číst člověk neznalý matematiky, ale i matematik, neb závěrečné kapitoly knihy jsou výzvou. Jako příznivec volně dostupných programů bych místo Gurobi uvítal Scip či Symphony, ale jak by řekli počítačová hackeri: Musíme si umět poradit.

Myslím si, že pokud ze svých kolekcí vytáhneme domino kostky a začneme experimentovat, tak kniha splnila svůj účel. Za pozornost stojí přednáška autora knihy na *Talks at Google*, <https://www.youtube.com/watch?v=g3CiVrN-BnY>. Knihu podporují autorovy webové stránky, dominoartwork.com, a několik animací na <https://www.youtube.com/user/baabbaash>. V sekci *Downloads* najdeme RLE soubory (Game of Life Patterns), spustitelné například přes program Golly, <https://golly.sourceforge.io>.



KONFERENCIA OSSCONF 2025 (SPRÁVA) REPORT: OSSCONF 2025

Patrik Sleziak

E-mail: patrik.sleziak@gmail.com

V dňoch 1. 7. – 3. 7. 2025 sa na Fakulte riadenia a informatiky Žilinskej univerzity uskutočnil 13. ročník konferencie OSSConf. Konferencia je primárne venovaná otvorenému softvéru vo vzdelávaní, výskume a IT riešeniach. Aktuálny 13. ročník zastrešoval šesť tematických blokov: L^AT_EX, R a ich priatelia, Open AI, OSS vo vzdelávaní, Open hardvér, Vývoj OSS, Open GIS & Open Data. Nás samozrejme najviac zaujímala posledná menovaná, t. j. sekcia venujúca sa GIS-om, ktorá prebehla 1. 7. 2025.

Po úvodných slovách Miroslava Kvaššaya (Prodekan pre vedu a výskum, Žilinská univerzita v Žiline) a Petra Mártona (Prodekan pre zahraničné vzťahy, Žilinská univerzita v Žiline) sa s prezentáciou s názvom „Tvorba máp cez R“ predstavil prvý rečník Michal Páleník (Fakulta managementu UK v Bratislave). Na príklade dát o nezamestnanosti v okresoch krajín V4 (odkaz na údaje: LAU1 dataset, <https://zenodo.org/records/14242424>) demonštroval, ako pomerne jednoducho v prostredí open source prostredia R vytvoriť základnú mapu s výstupom vo forme obrázku (png, svg, pdf).

Michal Kaukič nadviazal na predchádzajúceho rečníka a na rovnakom datasete údajov v prezentácii ukázal, ako sa dá v marimo notebooku (dokumentácia je dostupná na <https://docs.marimo.io/>) vytvoriť webová aplikácia s vizualizáciou týchto dát. Pre spracovanie geografických a štatistických údajov boli použité Python knižnice Polars a geopandas, pre vykreslenie máp knižnica Plotly. Vytvorená aplikácia je dostupná na tejto stránke <https://unemp.feelmath.eu/>. Zdrojové kódy a použité datasety sa nachádzajú na <https://github.com/misolietavec/OSSConf25>. Zaujímavé bolo porovnanie marimo a Jupyter notebooku, kde marimo v posledných rokoch vykazuje výrazný nárast.

Zaujímavá bola téma „Open Source meteorologická stanica“, ktorú predstavil Dávid Barta (Žilinská univerzita v Žiline). Cieľom bolo vytvoriť systém na zber, spracovanie a vizualizáciu environmentálnych dát. Hardvérová časť riešenia zabezpečila snímanie údajov pomocou senzorov a zberného modulu Raspberry Pi. Softvérová časť umožnila uchovanie údajov a ich zobrazenie cez webové rozhranie. Na prenos dát medzi komponentmi boli využité technológie MQTT a back-endové REST API. Vzniknutá aplikácia podporuje zobrazenie údajov v reálnom čase, taktiež aj prácu s historickými údajmi.

Ďalší rečník, Ondřej Ledvinka (ČHMÚ, Univerzita Karlova, Přírodovědecká fakulta) na príklade geodát, s ktorými v rámci projektu PERUN pracuje,

ukázal niekoľko funkcionálnych tipov pre manipuláciu a analýzu dát, ktoré sa môžu hodiť užívateľom jazyka R.



Prezentácia – Ondřej Ledvinka

Spomeniem ešte zopár príspevkov, ktoré zaujali mňa – napr. prezentácia Daniela Kašíka (Masarykova univerzita v Brne), ktorá bola zameraná na skúsenosti českej komunity OpenStreetMap s otvorenými štátnymi dátami. Rečník priblížil, ako môžeme pomocou objektovej detekcie hodnotiť kvalitu dát a vyhľadávať menej zmapované miesta v ČR.

Ondřej Vencálek (Prírodovedecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci) v prezentácii ukázal, ako môžeme za pomoci dát z Eurostatu a interných informácií vytvoriť mapu konferenčné rady ROBUST v prostredí R, taktiež ju zobrazíť vo webovom prehliadači offline i online za pomoci knižníc plotly a prostredia Chart Studio.



Prezentácia – Ondřej Vencálek

Šimon Janovič (Žilinská univerzita v Žiline) demonštroval, ako sa dá s využitím open source riešení (PostgreSQL, PostGIS, Geoserver) vytvoriť server pre zdieľanie, ukladanie a spravovanie geografických údajov pre potreby FRI UNIZA.

Podrobný program spolu so všetkými abstraktmi sa nachádza na tejto stránke, <https://ossconf.fri.uniza.sk/program-konference/>.

Po prezentáciách nasledoval Missing Maps Mapathon a záverečné posedenie formou gulášu. Na záver poďakovanie organizátorom, ktorým sa opäť konferencia vydarila. Budeme sa tešiť na ďalšie ročníky.

POZVÁNKA NA ENERGY DAYS 2025

INVITATION TO ENERGY DAYS 2025

Redakce

We cordially invite you to participate in the Energy Days 2025 conference, subtitle is Network Modelling: Current Trends in Stability, Reliability, and Optimization.

When: November 6–8, 2025.

Where:

- November 6: Violino club, Krakovská 5, Prague 1.
- November 7: Czech Statistical Office, Na padesátém 81, Prague 10.
- November 8: Czech Technical University, Faculty of Mechanical Engineering, Karlovo nám. 13, Prague 2.

In recent years, the modeling and analysis of energy and infrastructure networks have become increasingly vital due to the rising complexity, decentralization, and interdependence of modern systems. This workshop brings together researchers, engineers, and practitioners to discuss emerging challenges and state-of-the-art methods in network modelling, with a particular focus on system stability, reliability, and optimization.

Key topics include, but are not limited to:

- **Dynamic stability in power grids and integrated energy systems.** Modern energy systems, especially electricity grids, are evolving into highly dynamic and decentralized networks. Ensuring stability under rapidly changing loads, renewable generation, and contingencies is critical. This topic includes: Small-signal and large-disturbance stability in power grids, Transient and frequency stability under fluctuating inputs, Impact of inverter-based resources (e.g., PV and wind systems), Multi-energy system dynamics (electricity–heat–gas coupling), Tools for stability analysis: eigenvalue analysis, Lyapunov functions, time-domain simulation.
- **Probabilistic reliability assessment and resilience modelling.** Network reliability refers to the ability of a system to deliver its function consistently and without failure. This theme explores methods to assess and enhance the robustness and fault-tolerance of critical networks, including: Probabilistic reliability modelling, Cascading failure analysis in power and transport networks, Resilience metrics and stress-testing approaches, Cyber-physical risk modelling, Component-level reliability vs. system-level emergent behavior.

- **Optimization techniques for large-scale network control and planning.** Optimization plays a key role in designing and operating complex networked systems efficiently. This topic covers: Optimal power flow (OPF), unit commitment, economic dispatch, Grid topology optimization and reconfiguration strategies, Distributed and decentralized optimization, Real-time control under uncertainty, Multi-objective optimization: cost, emissions, resilience trade-offs.
- **Machine learning and data-driven methods in network behaviour prediction.** As data availability increases, machine learning offers powerful tools to model, predict, and control network behavior. Relevant subtopics include: Graph neural networks (GNNs) for grid modelling, Time series forecasting for loads, renewable generation, and failures, Anomaly detection and predictive maintenance, Reinforcement learning for adaptive control and system planning, Hybrid physics-informed and data-driven modelling approaches.
- **Applications in smart grids, transportation, and communication networks.** This cross-cutting topic looks at practical applications of network modelling in emerging domains: Smart grid management and prosumer integration, Integration of EVs, storage, and demand-side flexibility, Modelling energy-transport-communication interdependencies, Urban infrastructure and mobility network planning, Emergency response and post-disaster network reconfiguration.

We hope this workshop will foster constructive dialogue, initiate collaborations, and provide valuable insights into the evolving landscape of complex networked systems.

Round table discussion with introductory talks given by leading representatives of Czech energy industry and research, and by invited European experts in this field, will form part of the workshop. Language of the round table discussion will be both Czech and English, translation will be provided.

Main output of the workshop will be up-to-date knowledge transfer from the researches to the users and, conversely, opening new research targets and horizons as required by the power and gas industry.

Call for Abstracts

All participants are invited to submit a short abstract of their contribution. The deadline for abstract submission is **November 1, 2025**.

Conference website: <https://www.energy-days.cz/>.

Email: info@energy-workshop.cz.

The organizing committee: Jaromír Antoch, Lucie Bartoňová, Eliška Cé-zová, Gejza Dohnal, Martina Litschmannová and Ondřej Vozár.

POZVÁNKA NA MIKUKLÁŠE 2025 INVITATION TO ST. NICHOLAS DAY 2025

Redakce

Výbor společnosti Vás srdečně zve na tradiční akci Mikukláš 2025.

Kdy: Ve čtvrtek 4. 12. 2025 od 14:00.

Kde: Budova MFF UK, respirium (suterén), Sokolovská 49/83, Praha.

Kde pro mimopražské: Latitude 50° 5,6386' N, longitude 14° 27,032' E.

Pracovní verze programu

- **Martina Litschmannová:**

Vadí–nevadí aneb Statistika kolem nás.

Abstrakt: Statistika je všude kolem nás – od novinových titulků přes televizní reportáže až po statusy na sociálních sítích. A někdy to vypadá, že čím více čísel a grafů se použije, tím menší šance je, že se dozvíme pravdu. Na několika příkladech si ukážeme, jak lze realitu nenápadně „přiohnout“ – ať už nevědomky, nebo s plným vědomím. Nechci nikoho strašit ani kazit radost z oblíbených statistik v médiích, spíš připomenout, že trocha statistické imunity není na škodu. Přednáška vychází z popularizační verze pro studenty a učitele SŠ, ale tady bude v kratší a uvolněnější podobě.

- **Jirka Dvořák:**

Popularizace statistiky – i středoškolákům jde ukazovat krásné věci.

Abstrakt: Při popularizaci statistiky je důležité ukazovat její užitečnost a schopnost řešit zajímavé problémy. I na úrovni střední školy je možné některé takové problémy diskutovat a studenty nechat si dané postupy aktivně vyzkoušet. V příspěvku se zaměříme na techniky znáhodněných odpovědí, které mohou studenti využít při různých dotazníkových šetřeních v rámci svých projektů, ročníkových prací apod. Vyzkoušíme si, jak se dá toto téma aktivní formou probrat se studenty od střední po vysokou školu.

- **Martin Otava:**

Moderní experimentální designy v praxi farmaceutických firem.

Abstrakt: Zaměříme se na to, jak zapojit moderní typy designů (DSD, OMARS, ad.) do celkové strategie implementace průmyslového experimentu. Tedy: co je na nich vůbec zajímavého, za jakých podmínek mají své využití a jaké klasické metody bychom neměli opouštět.

- **Ondřej Týbl:**

Neuronové sítě.

V příspěvku se zaměříme na to, v čem se neuronové sítě liší od tradičních statistických metod (pokud v něčem), co nového přinášejí, a kde naopak čerpají z osvědčených principů statistického myšlení.

- **Ondřej Vencálek:**

Mikuklášský confounding.

Abstrakt: Rozumět správně pojmu confounding je pro statistika životní nutností. Při zkoumání souvislosti mezi dvěma faktory je třeba vztah mezi nimi očistit (adjustovat) od případného vlivu confounderu, jak nám na Mikukláši v roce 2021 vysvětloval Jiří Dvořák na příkladu souvislosti mezi počtem čápů (faktor 1) počtem narozených dětí (faktor 2), viz [1]. Korelaci mezi těmito faktory bychom zřejmě označili termínem „spurious correlation“. Co když je ale ve hře více faktorů než jenom jeden možný confounder? Které z těchto faktorů musíme při analýze zohlednit, které nemusíme, a na které bychom adjustovat vůbec neměli? Mikuklášské povídání o confoundingu je inspirováno knihou [2].

[1] Dvořák, J. (2017). *O dětech, čápech a kauzalitě*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 62 (4), 264–274.

[2] Pearl, J. a Mackenzie, D. *The book of why: the new science of cause and effect*. New York: Basic Books, 2020. ISBN 978-1-5416-9896-3.

Za organizátory se na Vás těší: Marek Omelka, Martina Litschmannová a Ondřej Vencálek.

POZVÁNKA NA ROBUST 2026: NOVÉ ZPRÁVY INVITATION TO THE ROBUST 2026 CONFERENCE

Redakce

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

dne 18. ledna 2026 bude v Srní slavnostně zahájena dvacátá čtvrtá zimní škola [JČMF ROBUST 2026](#), organizovaná skupinou pro výpočetní statistiku při [ČMS JČMF](#) již od roku 1980. Mezi spolu-organizátory tradičně patří [KPMS MFF UK](#), [Česká statistická společnost](#) a [Slovenská statistická a demografická spoločnosť](#).

Nabídku k přednesení zvaných přednášek zatím přijali (s řadou dalších se jedná):

- J. Baruník, FSV UK, Praha,
- D. Hlubinka, MFF UK, Praha,
- K. Hron, UPOL, Olomouc,
- M. Maciak, MFF UK, Praha a R. Matúš, MSD CR, Praha,
- R. Rosipal, ÚM SAV, Bratislava.

Vystoupení studentů a doktorandů. Vedle zvaných přednášek se i tentokrát počítá se sděleními účastníků a přednáškově – posterovou sekcí doktorandů a studentů. Po velmi dobrých zkušenostech z minulých let jsme se i tentokrát rozhodli, že vystoupení bude „dvoustupňové“. Vedle místa na vystavení posteru dostanou prostor na krátké ústní vystoupení, jež by mělo posloužit nejenom ke shrnutí hlavních výsledků jejich práce, ale především přilákat posluchače k diskusi nad/před jejich posterem. Ústní prezentace všech studentů a doktorandů, kteří přihlásili příspěvek, se uskuteční ve středu 21. ledna 2026. Během ústního vystoupení by měly být prezentovány hlavní výsledky a účastníci konference „přilákání“ k diskusi nad posterem. Délka ústního vystoupení bude známa později, až budeme mít představu o programu. Formát posteru doporučujeme A1, případně A2, neboť formát A3 je příliš malý, zatímco A0 naopak příliš velký. Postery bude možné vyvěsit již v neděli 18. ledna 2026 večer v přednáškové místnosti.

Soutěž o nejlepší studentské a/nebo doktorandské vystoupení. Tak jako v minulých letech i tentokrát bude uspořádána soutěž o nejlepší studentská a doktorandská vystoupení. Opět bude vytvořeno více kategorií, což nám umožní nejenom ocenit více dobrých prací, ale být také „spravedlivější“.

Publikace v časopise Statistika. Po dohodě s profesorkou S. Hronovou, předsedkyní ediční rady časopisu Statistika: Statistics and Economy Journal, bychom rádi účastníky informovali, že je v něm možno publikovat články vyhovující jeho zaměření. Sejde-li se dostatek příspěvků, bude možné vydat speciální číslo z Robustu 2026. Příspěvky, které budou podrobeny klasickému recenznímu řízení, je třeba redakci dodat nejpozději do konce října 2025. Detaily poskytne kolega Ing. Ondřej Vozár.

Na setkání se za programový a organizační výbor těší: J. Antoch, E. Cézová, G. Dohnal, D. Hlubinka, L. Naxerová, M. Pešta a I. Stankovičová.

POZVÁNKA NA ČESKÉ UŽIVATELSKÉ FÓRUM COPERNICUS A DÁLKOVÝ PRŮZKUM ZEMĚ 2025 INVITATION TO C3S USER ENGAGEMENT WORK- SHOP WITH THE CZECH USER COMMUNITY

Redakce

Agenda programu Copernicus, kterou již druhým rokem koordinuje Český hydrometeorologický ústav, navazuje na předchozí ročníky a opět Vám přináší konferenci České uživatelské fórum Copernicus a dálkový průzkum Země, která je pořádána v rámci akce Czech Space Week 2025. Program konference je připraven ve spolupráci s Ministerstvem dopravy a Přírodovědeckou fakultou Univerzity Karlovy.

První den konference se uskuteční workshop pořádaný službou Copernicus Climate Change Service v prostorách Konferenčního centra City. Program bude rozdělen do dvou úrovní – pro začátečníky i pokročilé uživatele dat – takže si každý najde to své. Účastníci se naučí prakticky pracovat s klimatickými daty, získají tipy pro jejich analýzu a příklady využití v reálných projektech. Workshop je ideální příležitostí propojit teorii s praxí a rozšířit své dovednosti. Workshop proběhne v anglickém jazyce.

Kdy: 20. října 2025, 13:00–17:00.

Kde: Konferenční centrum City.

Druhý den v reprezentativních prostorách Rezidence primátora hl. m. Prahy se uskuteční konference věnovaná programu Copernicus a využití dat dálkového průzkumu Země. Čeká vás den plný zajímavých prezentací z oblasti využívání dat programu Copernicus v Česku a obecného využití dat dálkového průzkumu Země, doplněný o příklady z praxe a diskuse s odborníky. Konference nabídne přednášky odborníků ze státní správy, akademického prostředí i soukromého sektoru. Účastníci se dozví o aktuálních trendech, výzkumech a praktických využitích dat v různých oborech. Součástí konference bude také posterová sekce, kde budou mít účastníci možnost představit své projekty. Konference proběhne v českém jazyce.

Kdy: 21. října 2025, 9:00–17:00.

Kde: Rezidence primátora hl. m. Prahy.

Webové stránky: <https://copernicus.chmi.cz/index.php/ceske-uzivatelske-forum-copernicus-a-dalkovy-pruzkum-zeme-2025/>.

Email: lucie.bursova@chmi.cz.