STATISTICKÉ TOLERANČNÍ MEZE PRO NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ A JEJICH ROBUSTNOST

Miloš Jílek, MBÚ ČSAV, Praha

1. Úvod

Řada statistických problémů vděčí za svou formulaci potřebámprůmyslové a výzkumné praxe. Nejinak je tomu i s formulováním problému stanovení statistických tolerančních mezí: intuitivní požadavky lze vysledovat především v Shewhartových knihách ([23] a [24]), týkajících se některých problémů kontroly jakosti, a v práci Thompsonově [25], zabývající se problémem "normálních" hodnot v biomedicínském výzkumu v praxi. Skutečné základy teorie statistických tolerančních mezí pak před 50 léty položil svou prací [27] Wilks, který problém přesně formuloval a současně podal i jeho neparametrické řešení.

Na tuto Wilksovu studii navazují stovky prací podávajících parametrická i neparametrická řešení za různých předpokladů o rozdělení náhodných veličin (rozdělení spojitého nebo diskrétního typu, symetrická nebo asymetrická, či rozdělení patřící do některé známé třídy rozdělení (např. normální, exponenciální, Weibullovo, atd.) s některými nebo všemi parametry neznámými, atd.), a při různých způsobech získávání empirických dat sloužících ke stanovení tolerančních mezí (jednoduchý náhodný výběr, dvojitý výběr, sekvenční uspořádání, a pod.). Záhy byla úloha přeformulována (a řešena) i pro vícerozměrné případy, byly studovány vlastnosti tolerančních mezí a hledány optimální toleranční meze, původní požadavky na toleranční meze byly několikerým způsobem modifikovány atd. (jak je tomu ostatně při rozvíjení každé teorie).

Řešení některých důležitých problémů lze nalézt např. v přehledné Patelově práci [20] či v knize [12], (samozřejmě neúplný) přehled dosud publikované literaury podávají bibliografie [10] a [13].

V této práci nejprve zavedeme pojem statistických tolerančních mezí a pak se věnujeme tolerančním mezím pro normální rozdělení a jejich citlivosti na porušení předpokladu normality.

2. Statistické toleranční meze

Nechť X označuje množinu u všech možných výsledků, nechť $\mathcal{a}$ je σ-algebra podmnožin množiny X, a nechť Ω je množina indexů. Předpokládejme, že na $\mathcal{a}$ je definována třída pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\theta\in\Omega\}$.

Nechť n je přirozené číslo, a nechť $X_n=(x_1,\dots,x_n)'$ je náhodný výběr rozsahu n.

Statistiku T zobrazující X^n do $\mathcal{a}$ nazveme (statistická) toleranční oblast (obšírněji: statistická toleranční oblast při výběru rozsahu n).

Řekneme, že T je (statistická) toleranční oblast typu A (obšírněji: statistická toleranční oblast pro třídu pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\theta\in\Omega\}$ s pravděpodobnostním pokrytím rovným alespoň β na hladině spolehlivosti γ při výběru rozsahu n), jestliže pro daná čísla β a γ $(0<\beta,\gamma<1)$ a dané přirozené číslo n platí

(1) $P^\theta_{\mathbf{X}_n}\{P^\theta_X(T(\mathbf{X}_n))\geq\beta\} = \gamma$ pro všechna $\theta\in\Omega$.

Řekneme, že T je (statistická) toleranční oblast typu B (obšírněji: statistická toleranční oblast pro třídu pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\theta\in\Omega\}$ se střední hodnotou pravděpodobnostního pokrytí β při výběru rozsahu n), jestliže pro dané číslo β $(0 < \beta < 1)$ a dané přirozené číslo n platí

(2) $E^\theta_{\mathbf{X}_n}\{P_X(T(\mathbf{X}_n))\} = \beta$ pro všechna $\theta\in\Omega$.

Jestliže $X \subseteq R^1$, jsou tolerančními oblastmi zpravidla intervaly - nazýváme je toleranční intervaly - a statistiky, jež jsou mezemi tolerančních intervalů, nazýváme toleranční meze. Je-li toleranční interval ohraničen jen jednou toleranční mezí (shora nebo zdola), mluvíme o jednostranné (horní nebo dolní) toleranční mezi, jinak mluvíme o oboustranných tolerančních mezích (dolní a horní).

Označme symboly T_d a T_h dolní a horní toleranční mez.

Uvažujeme-li toleranční meze typu A, lze vztah (1) přepsat v tomto případě ve tvaru

(3) $P^\theta_{\mathbf{X}_n}\{P^\theta_X\{X>T_d(\mathbf{X}_n)\} \geq \beta\} = \gamma$ pro všechna $\theta\in\Omega$

resp.

(3) $P^\theta_{\mathbf{X}_n}\{P^\theta_X\{X < T_h(\mathbf{X}_n)\} \geq \beta \} = \gamma$ pro všechna $\theta\in\Omega$,

jde-li o jednostranné toleranční meze, nebo

(5) $P^\theta_{\mathbf{X}_n}\{P^\theta_X\{T_d(\mathbf{X}_n) < X < T_h(\mathbf{X}_n)\} \geq \beta\} = \gamma$ pro všechna $\theta\in\Omega$

v případě oboustranných tolerančních mezí. Vztah (5) ovšem nespecifikuje, jaká část z podílu $1 - \beta$, který může maximálně ležet (se spolehlivostí γ) mimo toleranční interval $(T_d(\mathbf{X}_n), T_h(\mathbf{X}_n))$, leží pod dolní mezí $T_d(\mathbf{X}_n)$ a jaká část nad horní mezí $T_h(\mathbf{X}_n)$. Tuto neurčitost (jež při aplikacích může mít nepříjemné důsledky) eliminují Owenovy toleranční meze, kontrolující oba konce rozdělení [18]: na statistikách T_d a T_h požadujeme, aby (místo

(5)) platilo pro předem daná čísla β_1 a β_2 ($0 < \beta_1, \beta_2 < 1, \beta_1+\beta_2=1-\beta$; často volíme $\beta_1=\beta_2=(1-\beta)/2$)

$$(6)\quad P^{\theta}_{\mathbb{X}_n}\{P^{\theta}_X\{X < T_d(\mathbb{X}_n)\} < \beta_1 \text{ a současně } P^{\theta}_X\{X > T_h(\mathbb{X}_n)\} < \beta_2\} = \gamma \text{ pro všechna } \theta\in\Omega.$$

Uvažujeme-li toleranční meze typu B, můžeme (obdobně jako (3) až (5)) požadovat, aby

$$(7)\quad E^{\theta}_{\mathbb{X}_n}\{P^{\theta}_X\{X > T_d(\mathbb{X}_n) = \beta$$

resp.

$$(8)\quad E^{\theta}_{\mathbb{X}_n}\{P^{\theta}_X\{X < T_h(\mathbb{X}_n)\} = \beta$$

nebo

$$(9)\quad E^{\theta}_{\mathbb{X}_n}\{P^{\theta}_X\{T_d(\mathbb{X}) < X < T_h(\mathbb{X}_n)\} = \beta$$

pro všechna $\theta\in\Omega$.

Budeme říkat, že T je neparametrická toleranční oblast (pro třídu $\{P^{\theta}_X; \theta\in\Omega\}$), jestliže indukované rozdělení pravděpodobnostního pokrytí $P_X(T)$ nezávisí na θ.

Wilks [27] použil ke konstrukci tolerančních mezí pořádkových statistik a dokázal za předpokladu spojitosti rozdělení, že toto řešení nezávisí na tvaru rozdělení ani na jeho parametrech a tedy že jde o neparametrické toleranční meze pro třídu všech spojitých rozdělení. (Záhy se však ukázalo - viz o tom [7] - že omezení na spojitá rozdělení není podstatné, a že Wilksovy toleranční meze lze užít i pro diskrétní rozdělení, pokud toleranční meze zahrneme do toleranční oblasti a pokud v (1) a (2) nahradíme znaménko rovnosti = znaménkem nerovnosti $\geq$).

Vedle Wilksových neparametrických tolerančních mezí byly později odvozeny statistické toleranční meze pro užší třídy pravděpodobnostních rozdělení (normální, gama, Weibullovo a některá další spojitá rozdělení; z diskrétních rozdělení pro Poissonovo, binomické a negativně binomické rozdělení).

Toleranční meze pro takové třídy rozdělení jako je třída normálních rozdělení lze získat i na základě velmi malých výběrů, i když jsou toleranční intervaly při malých výběrech (z hlediska aplikací) příliš "velké". (Stanovením vhodného rozsahu výběru se zde zabývat nebudeme - viz např. [5], [4], [6], [9], [11], [12]). Na druhé straně ke stanovení neparametrických tolerančních mezí je potřeba poměrně velkých výběrů (viz [15], tab.38B), a při stejně velkých výběrech jsou neparametrické toleranční intervaly "větší" než intervaly získané pro užší třídu rozdělení.

Je tedy zřejmě výhodnější užívat tolerančních mezí pro co nejužší třídu rozdělení, pokud ovšem máme pro předpoklad o tvaru rozdělení dobré důvody. Což ovšem není vždycky pravda; vyvstává pak otázka, jak jsou toleranční meze citlivé na porušení předpokladu, že rozdělení patří do dané třídy (že jde např. o normálnírozdělení); lze očekávat, že toleranční meze budou citlivé zvlášť na větší odchylky od předpokládaného tvaru rozdělení.

3. Toleranční meze pro normální rozdělení

Pro normální rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$jsou využívány a studovány toleranční meze tvaru $\hat{\mu} \mp k\hat{\sigma}$, kde $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$ jsou hodnoty parametrů μ a σ nebo jejich odhadů, a k je tzv. toleranční faktor, závislý na zvolených hodnotách β a γ, na znalostech o parametrech μ a σ^2, a na rozsahu výběru n.

Jako odhadů se zpravidla užívá výběrového průměru

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a odhad rozptylu

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_1 - \bar{X})^2$$

(neznáme-li střední hodnotu μ), resp.

$$S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

(známe-li střední hodnotu μ).

Tab. 1. Toleranční meze pro normální rozdělení

parametry známé	parametry neznámé	toleranční meze jednostranné	toleranční meze oboustranné
μ,σ^2	-	$\mu-k\sigma$ nebo $\mu+k\sigma$	$\mu-k\sigma$ a $\mu+k\sigma$
σ^2	μ	$\bar{X}-k\sigma$ nebo $\bar{X}+k\sigma$	$\bar{X}-k\sigma$ a $\bar{X}+k\sigma$
μ	σ^2	$\mu-kS_\mu$ nebo $\mu+kS_\mu$	$\mu-kS_\mu$ a $\mu+kS_\mu$
-	μ,σ^2	$\bar{X}-kS$ nebo $\bar{X}+kS$	$\bar{X}-kS$ a $\bar{X}+kS$

(V tab. 2 až 4 je použito následujícího označení:

z_p...........p-kvantil rozdělení N(0,1)

$\chi_p^2(f)$........p-kvantil χ^2-rozdělení o f stupních volnosti

$t_p(f)$........p-kvantil t-rozdělení o f stupních volnosti

$t_p'(f,d)$.....p-kvantil necentrálního t-rozdělení t-rozdělení s parametrem necentrality d o f stupních volnosti

g,G..........hustota rozdělení N(0,1), distribuční funkce rozdělení N(0,1)

(Kromě toho se užívá i jiných odhadů - mediánu a výběrového rozpětí [16] či modifikovaných maximálně věrohodných odhadů [14], [1] nebo odhadů střední hodnoty a rozptylu založených na různých výběrech v závislosti na experimentálním uspořádání a pod. Těmito variantními přístupy se zde však pro nedostatek místa nemůžeme zabývat).

Toleranční meze, které zde budeme uvažovat, mají tedy tvar uvedený v tab. 1. Toleranční faktory potřebné k jejich konstrukci jsou uvedeny v tab. 2 (pro toleranční meze typu A) a v tab. 3 (pro toleranční meze typu B); toleranční faktory i pro konstrukci Owenových oboustranných tolerančních mezí kontrolujících oba konce rozdělení jsou uvedeny v tab. 4.

Tab. 2. Toleranční faktory k pro normální rozdělení (toleranční meze typu A)

parametry známé	parametry neznámé	toleranční faktory k: jednostran. tol. meze (vztahy (3) a (4))	toleranční faktory k: oboustran. tol. meze (vztah (5))
μ, σ^2	-	$k = z_\beta$ 1)	$k = z_{(1-\beta)/2}$ 1)
σ^2	μ	$k = z_\beta + \frac{z}{\sqrt{n}}$	k je řešením rovnice 2) $G\left(\frac{z_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} + k\right) - G\left(\frac{z_{(1-\gamma)/2}}{\sqrt{n}} - k\right) = \beta$
μ	σ^2	$k = z_\beta \left(\frac{n}{\chi^2_{1-\gamma}(n)}\right)^{1/2}$ pro $\beta > \frac{1}{2}$; 0 pro $\beta = \frac{1}{2}$; $z_\beta \left(\frac{n}{\chi^2(n)}\right)^{1/2}$ pro $\beta < \frac{1}{2}$	$k = z_{(1+\beta)/2} \left(\frac{n}{\chi^2_{1-\gamma}(n)}\right)^{1/2}$
-	μ, σ^2	$k = \frac{1}{\sqrt{n}} t'(n-1, z_\beta \sqrt{n})$	k je řešením rovnice, kterou dostaneme z (5) 3)

1) $P_X(X > \mu - z_\beta \sigma) = \beta$ resp. $P_X(X < \mu + z_\beta \sigma) = \beta$ resp. $P_X(\mu - z_\beta \sigma < X < \mu + z_\beta \sigma) = \beta$ platí pro všechna $\beta \in (0,1)$ s pravděpodobností 1

2) k je tabelováno v [15], tab. 19B

3) k je tabelovéno v [7]; přibližné hodnoty získané Waldovou-Wolfowitzovou aproximací [26] jsou v [15], tab.19C

Tab. 3. Toleranční faktory k pro normální rozdělení (toleranční meze typu B)

parametry známé	parametry neznámé	toleranční faktory k: jednostran. tol. meze (vztahy (7) a (8))	toleranční faktory k: oboustran. tol. meze (vztah (9))
μ, σ^2	-	z_β 1)	$z_{(1+\beta)/2}$ 1)
σ^2	μ	$z_\beta \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}$	$z_{(1+\beta)/2} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2}$
μ	σ^2	$t_{\beta(n)}$	$t_{(1+\beta)/2}(n)$
-	μ, σ^2	$t_\beta(n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}$	$t_{(1+\beta)/2}(n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}$

1) viz Tab. 2, pozn. 1)

Tab. 4. Toleranční faktory k pro normální rozdělení (Owenovy toleranční meze typu A - vztah (6))

parametry známe	parametry neznámé	toleranční faktory k
μ, σ^2	-	$z_{(1+\beta)/2}$ 1)
σ^2	μ	$z_{(1+\beta)/2} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{(1+\gamma)/2}$
μ	σ^2	$z_{(1+\beta)/2}\left(\frac{n}{\chi^2_{1-\gamma}(n)}\right)^{1/2}$
-	μ, σ^2	k je řešením rovnice, kterou dostaneme z (6) 2)

1) viz Tab. 2, pozn. 1)

jsou na porušení tohoto předpokladu citlivější než mnohé jiné statistické metody..(Jestliže předpokládáme, že kromě tvaru rozdělení známe i některý jeho parametr, musíme počítat s tím, že může být porušen i tento předpoklad. Lze se domnívat, že toleranční meze budou silně citlivé na porušení tohoto předpokladu, studie tohoto typu však dosud nebyly provedeny). Problematika robustnosti tolerančních mezí dosud nebyla dořešena; o tom, jak je tomu v případě normálního rozdělení.(dosud byla - z hlediska robustnosti tolerančních mezí - věnována pozornost jenom tomuto rozdělení), si však přece jen lze na základě dosud publikovaných výsledků učinit jakousi představu, a tomu budou sloužit následující řádky. První studii, věnovanou tomuto problému, publikoval Sharpe [22], který navrhl, abychom v úvahách o tolerančních mezích rozlišovali dva typy robustnosti: robustnost kritéria a robustnost inference]podobně jako v úvahách o robustnosti textů). Mluvíme-li o robustnosti kritéria, máme na mysli změny pravděpodobností a jiných vlastností, k nimž dojde jestliže téhož kritéria užijeme pro různá rozdělení (jestliže např. na základě náhodného výběru z logaritmicko-normálního rozdělení zkonstruujeme toleranční meze tak, jako kdyby šlo o výběr z normálního rozdělení, lze očekávat, že dojde ke změně deklarované spolehlivosti γ). O robustnosti inference mluvíme, jestliže se zajímáme o změny vlastností tolerančních mezí, ke kterým dojde, jestliže se při změně rozdělení provede adaptace původního kritéria tak, aby platil vztah (2) nebo (3) (takovou adaptací může být např. výpočet nových hodnot tolerančních faktorů, aby za nových podmínek nadále platily vztahy (2) nebo (3)). Jako míru robustnosti navrhuje Sharpe [22] hodnotu 100(0-E)/E, kde 0 resp. E jsou střední hodnoty tolerančních mezí stanovených za nesprávného resp. správného předpokladu o tvaru rozdělení. Jinou mírou robustnosti může být skutečná spolehlivost γ'([21], [8]), resp. rozdíl deklarované spolehlivosti γ a skutečné spolehlivosti γ'vyjádřené v procentech skutečné spolehlivosti, $100(\gamma - \gamma')/\gamma$. Chan a Hill ([2], [3]) užívají kromě toho ještě střední hodnotu a směrodatnou odchylku pravděpodobnostního pokrytí tolerančního intervalu.

Shrňme nyní stručně výsledky, jež byly dosud pro normální rozdělení publikovány ([22], [21], [8], [2], [3]); podrobnější diskusi a některé numerické výsledky lze nalézt v [12], odst.2.5, 5.7, a 9.4. Rozsáhlé simulační studie v uvedených pracech naznačují že

a) toleranční meze typu B jsou na porušení předpokladu normality méně citlivé než toleranční meze typu A,
b) takové porušení normality, kdy rozdělení má těžší konce, ale je zachována jeho symetrie, nepůsobí příliš velké změny,
c) porušení symetrie rozdělení může výrazně zvýšit hodnotu míry robustnosti, a citlivost na porušení symetrie roste s růstem náhodného výběru.

(Balakrishnan a Kocherlakota [1], [14] navrhli pro zvýšení robustnosti používat při konstrukci tolerančních mezí modifikovaných maximálně věrohodných odhadů střední hodnoty a rozptylu; tyto toleranční meze však mají význam jen za předpokladu, že není porušena symetrie rozdělení).

Závěrem lze doporučit, aby v případě, že tvar rozdělení neznáme, ale je zřejmé, že jde o rozdělení asymetrické, nebo jestliže tvar rozdělení známe, ale neznáme způsob konstrukce tolerančních mezí pro toto rozdělení, byla dána přednost použití neparametrických tolerančních mezí před tolerančními mezemi navrženými pro normální rozdělení.

Literatura

[1] Balakrishnan N., Kocherlakota S.: Robust two sided tolerance limits based on MML estimators. Commun. Statit. A 14 (1985), 175-184.

[2] Chan M.L., Hill P.D.: A comparison of distribution-free and distribution-dependent methods for prediction intervals. Mathematics Research Report No. 97, University of Waikato, Hamilton, New Zealand 1981.

[3] Chan M.L., Hill P.D.: A comparison of distribution-free and distribution-dependent methods for guaranteed-cover tolerance intervals. Mathematics Research Report No. 111, University of Waikato, Hamilton, New Zealand 1982.

[4] Faulkenberry G.D., Daly J.C.: Sample size for tolerance limits on a normal distribution. Technometrics 12 (1970), 813-821.

[5] Faulkenberry G.D., Weeks D.L.: Sample size determination for tolerance limits. Technometrics 10 (1968), 343-348.

[6] Guenther W.C.: Tolerance interval for univariate distributions. Naval Res. Logist. 19 (1972), 309-333.

[7] Hanson D.L., Owen D.B.: Distribution-free tolerance limits. Elimination of the requirement that cumulative distribution functions be continuous. Technometrics 5 (1963), 518-521.

[8] Jílek M.: Robustnost statistických tolerančních mezí pro normální rozdělení. Str. 39-49 v: Robust '80, JČMF, Praha 1980.

[9] Jílek M.: Počet měření a odhad přesnosti chemických analyz. Chem. listy 75]1981), 937-948.

[10] Jílek M.: A bibliography of statistical tolerance regions. Statistics 12 (1981), 441-456.

[11] Jílek M.: Sample size and tolerance limits. Trabad. Invest. Operat. Estad. 33 (1982), 64-78.

[12] Jílek M.: Statistické toleranční meze. SNTL, Praha 1988.

[13] Jílek M., Ackermann H.: A bibliography of statistical tolerance regions,II. Statistics 20 (1989), 165-172.

[14] Kocherlakota S., Balakrishnan N.: Tolerance limits which control percentages in both tails: Sampling from mixtures of normal distributions. Biom. J. 28 (1986), 209-217.

[15] Likeš J., Laga J.: Základní statistické tabulky. SNTL,Praha 1978.

[16] Machek J.: Normal tolerance limits based on mean range. Acta Univ. Carol., Math. Phys. 2 (1964), 21-32.

[17] Odeh R.E., Owen D.B.: Tables for Normal Tolerance Limits, Sampling Plans and Screening. Marcel Dekker, New York 1980.

[18] Owen D.B.: Control of percentages in both tails of the normal distribution. Technometrics 6 (1964), 377-387.

[19] Owen D.B., Frawley W.H.: Factors for tolerance limits which control both tails of the normal distribution. J.Quality Technol. 3 (1971), No. 2, 69-79.

[20] Patel J.K.: Tolerance limits - a review. Commun. Statist. A 15 (1986), 2719-2762.

[21] Rao J.N.K., Subrahmaniam K., Owen D.B.: Effect of non-normality on tolerance limits which control percentages in both tails of normal distribution. Technometrics 14 (1972), 571-575.

[22] Sharpe K.: Robustness of normal tolerance intervals. Biometrika 57 (1970), 71-78.

[23]Shewhart W.A.: Economic Control of Quality of Manufactured Product. D. Van Nostrand Comp., New York 1931.

[24] Shewhart W.A.: Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control. The Department of Agriculture, Washington, D.C., 1939.

[25] Thompson W.R.: Biological applications of normal range and associated significance tests in ignarance of original distribution forms. Ann. Math. Statist. 9 (1938), 281-287.

[26] Wald A., Wolfowitz J.: Tolerance limits for a normal distribution. Ann. Math. Statist. 17 (1946), 208-215.

[27] Wilks S.S.: Determination of sample sizes for setting tolerance limits. Ann. Math. Statist. 12 (1941), 91-96.

Dodatek

Srovnání různých tolerančních faktorů pro stanovení oboustranných tolerančních mezí pro normální rozdělení

Hodnoty tolerančních faktorů k pro stanovení oboustranných tolerančních mezí pro normální rozdělení (β = 0,90)

n	γ=0,90 (a)	(b)	(c)	(d)	γ=0,95 (a)	(b)	(c)	(d)
5	3,499	3,494	3,948	6,257	4,142	4,152	4,550	7,221
10	2,546	2,535	2,840	3,036	3,026	3,018	3,296	3,524
20	2,158	2,153	2,368	2,456	2,570	2,564	2,765	2,868
50	1,918	1,917	2,054	2,094	2,285	2,284	2,414	2,461
100	1,823	1,823	1,920	1,945	2,172	2,172	2,265	2,294

(a) hodnoty k splňující tvrzení (5) [17]

(b) hodnoty k splňující tvrzení (5) získané pomocí Waldovy-Wolfowitzovy aproximace [15]

(c) hodnoty k splňující tvrzení (6) [19]

(d) hodnoty k pro stanovení robustních tolerančních mezí [1]