Odhad neurčitosti a spolehlivosti stanovení diagnózy

Zdeněk Půlpán, Michal Čihák
Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta: Katedra matematiky

Summary: Two interesting methods of estimation of the diagnosis uncertainty.
It's very important to estimate the measure of uncertainty of data in the case of diagnosis of disease. We recommend two methods with help fuzzy interpretation of disease data.

Key words: Entropy and information for fuzzy sets; Entropy for the diagnostic of disease

---

Souhrn: V článcích autora [7], [8] byla navržena metoda odhadu množství informace, vedoucí k podezření na onemocnění jistou chorobou. Při tom bylo využito prostředků fuzzy matematiky. Zde bude ukázáno, jak lze podobnými prostředky stanovit neurčitost diagnózy z dat vágní povahy.

Dvě zajímavé metody odhadu neurčitosti stanovení diagnózy

S neurčitostí se setkáváme již při posuzování souboru objektivně zjišťovaných dat, protože samotný proces posuzování má jistou neurčitost. Dokonce již prvotní data (získaná například z dotazníku) mají jistou neurčitost (vágnost, neostrost, ...). Neurčitost při posuzování, které je rozhodováním, ale i neurčitost v datech lze modelovat pomocí fuzzy množin. Ukážeme, jak lze míru neurčitosti odhadnout pomocí fuzzy entropie. Problém odhadu neurčitosti však nemá jednoznačné řešení.

V článku [8] jsme navrhli formální metodu odhadu množství informace, vedoucí k podezření na onemocnění jistou chorobou. Využili jsme při tom prostředků fuzzy matematiky. Zde ukážeme, jak lze podobnými prostředky (viz také [7], resp. [6], [5], [4] stanovit neurčitost diagnózy. Na příkladu odhadu míry únavy a stanovení podkladů pro diagnózu z hodnot souboru subjektivně posuzovaných relevantních proměnných vytvoříme fuzzy matematický model odhadu neurčitosti a také informace.

Pod fuzzy množinou $\underset{\sim}{A}$ na základní n-prvkové množině Z_n

$$Z_n = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$$

rozumíme zobrazení $\mu_A : Z_n \rightarrow \langle 0; 1\rangle$. Zobrazení μ_A se nazývá věrohodnostní funkce. Míru neurčitosti, obsaženou ve fuzzy množině $\underset{\sim}{A}$, nazýváme fuzzy entropií. Reprezentuje-li například fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ nepřesnost jistého měření na škále Z_n, je fuzzy entropie $H(\underset{\sim}{A})$ fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ mírou neidentifikovanosti, nedefinovanosti, ... uvedeného měření. Fuzzy entropii $H(\underset{\sim}{A})$, odpovídající fuzzy množině $\underset{\sim}{A}$, můžeme definovat různým způsobem (4). Obecně se však požaduje, aby $H(\underset{\sim}{A})$ splňovala následující podmínky:

a) $H(\underset{\sim}{A}) = 0$ právě když fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ reprezentuje ostrou množinu, tj. když $\mu_A(z_i) = 0$ nebo 1 pro $i = 1, 2, \cdots, n$;

b) $H(\underset{\sim}{A})$ nabývá svého maxima, právě když fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ má „nejmenší ostrost", tj. $\mu_A(z_i) = 0,5$ pro $i = 1, 2, \cdots, n$;

c) hodnoty $H(\underset{\sim}{A})$ rostou s růstem „neostrosti" fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$, tj. $H(\underset{\sim}{A}^*) \geq H(\underset{\sim}{A})$ když pro μ_{A^*} platí

   je-li $\mu_{A^*}(z_i) \leq 0,5$, pak $\mu_A(z_i) \leq \mu_{A^*}(z_i)$,

   je-li $\mu_{A^*}(z_i) > 0,5$, pak $\mu_A(z_i) > \mu_{A^*}(z_i)$, $z_i \in Z_n$;

d) pro fuzzy množinu $\overline{\underset{\sim}{A}}$, jejíž věrohodnostní funkce $\mu_{\overline{A}}(z_i) = 1 - \mu_A(z_i)$, $z_i \in Z_n$, platí $H(\overline{\underset{\sim}{A}}) = H(\underset{\sim}{A})$;

e) jsou-li $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ dvě fuzzy množiny na Z_n, pak

$$H(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = H(\underset{\sim}{A}) + H(\underset{\sim}{B}) - H(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}),$$

kde $\mu_{A\cup B}(z) = max_{z\in Z_n}(\mu_A(z), \mu_B(z))$,

$$\mu_{A\cap B}(z) = min_{z\in Z_n}(\mu_A(z), \mu_B(z)).$$

Jestliže entropie $H(\underset{\sim}{A})$ splňuje všechny podmínky a) - e), nazývá se „dobrou mírou“ neurčitosti (podobně pak i pro informaci, vypočtenou z dobré míry neurčitosti, užíváme názvu „dobrá míra“ informace).

V práci Arora a kol. [1] je uveden příklad parametrizované entropie pro fuzzy množinu $\underset{\sim}{A}$ ve tvaru

$$H_\beta(\underset{\sim}{A}) = K \cdot A_\beta \cdot \sum_{i=1}^{n} [(\mu_A^\beta(z_i) + (1 - \mu_A(z_i))^\beta - 1], \tag{1}$$

kde $\beta > 0, \beta \neq 1, A_\beta = (2^{1-\beta} - 1)^{-1}$, $K > 0$ je normalizační konstanta (β je vhodný parametr, který specifikuje vlastnosti entropie). Entropie $H_\beta(\underset{\sim}{A})$ má pro každé $\underset{\sim}{A}$ a libovolný přípustný parametr β vlastnosti a) až e).

Volbou normalizační konstanty K určujeme jednotku entropie. Je výhodné spojovat volbu konstanty K s určitou interpretací stupnice neurčitosti. Ukážeme to na následujícím příkladě.

Příklad 1. Je-li $n = 3$ a fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ na Z_3 je

$$\underset{\sim}{A} = \{z_1|1;\ z_2|0,3;\ z_3|0\},$$

pak

$$H_{0,5}(\underset{\sim}{A}) = K \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot [0 + (\sqrt{0,3} + \sqrt{0,7} - 1) + 0] \doteq 0,928K.$$

Má-li být pro fuzzy množinu $\underset{\sim}{B} = \{z_1|0,5; z_2|0,5; z_3|0,5\}$ hodnota (největší) neurčitosti rovna 100, musí platit

$$H_{0,5}(\underset{\sim}{B}) = K \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot [\sqrt{0,5} + \sqrt{0,5} - 1] = 3K = 100.$$

Z toho je vidět, že konstanta K musí být rovna 100/3. Pak pro neurčitost $H_{0,5}(\underset{\sim}{A})$ v uvedených jednotkách máme $H_{0,5}(\underset{\sim}{A}) \doteq 0,928 \cdot \frac{100}{3} \doteq 30,93$. ■

K entropiím, které jsou jednoduše konstruovány z věrohodnostní funkce příslušné fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ na Z_n, patří $H_P(\underset{\sim}{A})$. Ta je definovaná vztahem (2):

$$H_P(\underset{\sim}{A}) = 2L \cdot \sum_{i=1}^{n} [1 - max(\mu_A(z_i), 1 - \mu_A(z_i))] =$$

$$= 2L \cdot \sum_{i=1}^{n} min(\mu_A(z_i), 1 - \mu_A(z_i)), \tag{2}$$

kde $L > 0$ je normalizační konstanta (kterou zde často volíme rovnu jedné).
Snadno ověříme, že entropie $H_P(\underset{\sim}{A})$ splňuje také podmínky a) až e).

Příklad 2. Pro fuzzy množinu $\underset{\sim}{A}$ z předchozího příkladu máme podle (2)

$$H_P(\underset{\sim}{A}) = 2L \cdot [0 + 0,3 + 0] = 0,6 \cdot L.$$

Volíme-li pro fuzzy množinu $\underset{\sim}{B}$ (z příkladu 1) entropii rovnu opět 100, musí platit

$$H_P(\underset{\sim}{B}) = 2L \cdot [3 \cdot 0,5] = 3L = 100$$

a tedy $L = \frac{100}{3}$. Pro entropii $H_P(\underset{\sim}{A})$ pak ale máme ve zde zavedených jednotkách vzhledem ke vztahu (2)

$$H_P(\underset{\sim}{A}) = 0,6 \cdot \frac{100}{3} = 20. \;\blacksquare$$

Stupnice pro neurčitost je určena nejen volbou některého ze vztahů (1) nebo (2), ale také stanovením normalizačních konstant. Konkrétní volba stupnice závisí na povaze modelovaného problému; je tedy otázkou zkušenosti aplikace. Přitom je důležitá její „schopnost" dobře zachytit významné momenty modelovaného jevu.

Fuzzy informaci můžeme určit odečtením příslušné fuzzy entropie od její maximální možné hodnoty. Tak například pro fuzzy entropii definovanou vztahem (1) se příslušná fuzzy informace $I_\beta(\underset{\sim}{A})$ určí podle vztahu (3)

$$I_\beta(\underset{\sim}{A}) = H_{0,5}^{max} - H_\beta(\underset{\sim}{A}) = n \cdot K - H_\beta(\underset{\sim}{A}) \tag{3}$$

a pro fuzzy entropii (2) je odpovídající fuzzy informace dána vztahem (4)

$$I_P(\underset{\sim}{A}) = n \cdot L - H_P(\underset{\sim}{A}). \tag{4}$$

Příklad 3. V práci [7] je publikován dotazník subjektivních pocitů únavy (SPU). Ten se skládá z 32 položek, u nichž má respondent označit sílu (úroveň) příslušného pocitu čísly 0 - žádný, 1 - mírný, 2 - silný.
Ukažme si nejprve, jak lze pro každou z 32 položek stanovit příslušnou fuzzy neurčitost. Pro každou položku máme $n = 3$ úrovně odpovědí, označených postupně $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2$. Míru věrohodnosti $\mu_A(z_i)$ můžeme pak odhadnout relativními četnostmi z jisté aplikace uvedeného dotazníku v homogenní skupině respondentů za standardních podmínek:

$$\mu(z_i) \sim \frac{m_i}{N}, \tag{5}$$

kde m_i je četnost těch respondentů z celkového počtu N, kteří označili sílu svého pocitu znakem z_i. Celkovou neurčitost pak považujeme za prostý součet neurčitostí jednotlivých položek. Podobně i celkovou informaci určíme jako součet informací všech položek. Výslednou fuzzy neurčitost pak můžeme interpretovat jako neurčitost identifikace pocitu únavy uvedeným způsobem. Fuzzy informace pak je mírou informace, získané z dotazníkových odpovědí. $\blacksquare$

Příklad 4. Předpokládejme, že jistá nemoc je charakterizována pěti proměnnými: 1. věk, 2. teplota, 3. dušnost, 4. kašel, 5. nález na plicích (viz Půlpán v [8]). Z uvedených proměnných první dvě se určí přesně, nemají proto žádnou neurčitost. U zbývajících proměnných předpokládáme (zde pro jednoduchost), že jsou kategorizovány jen ve třech úrovních z_1, z_2, z_3 (s interpretacemi například z_1 - bez příznaku, z_2 - středně silný, z_3 - silný), představují tedy fuzzy množiny $\underset{\sim}{A_3}$, $\underset{\sim}{A_4}$, $\underset{\sim}{A_5}$ ve tvaru

$$\underset{\sim}{A_j} = \{z_1|\mu_j(z_1),\ z_2|\mu_j(z_2),\ z_3|\mu_j(z_3)\},\ j = 3, 4, 5. \tag{6}$$

Hodnoty $\mu_j(z_i) \in \langle 0; 1\rangle$ jsou měrami přesvědčivosti o správném stanovení úrovně diagnózy z_i u j-tého příznaku (proměnné). Hodnotu $\mu_j(z_i)$ je možné určit buď jen na základě prostého přiznání toho, kdo diagnózu stanovoval, nebo z expertních odhadů několika kvalifikovaných posuzovatelů. Pro každé j stanovíme neurčitost $H(\underset{\sim}{A_j})$. Celková neurčitost diagnózy je pak součet $H = \sum_{j=3}^{5} H(\underset{\sim}{A_j})$. Kvalitu dat z hlediska jejich přesnosti můžeme pak posoudit z relativního ukazatele δ ze (7)

$$\delta = \frac{H}{H_{max}};\ \delta \in \langle 0; 1\rangle, \tag{7}$$

kde H_{max} je celková maximální entropie (stanovená vzhledem k použitému vztahu (1) nebo (2) pro určování $H(\underset{\sim}{A}_j)$. Čím je hodnota ukazatele bližší 1, tím nepřesnější údaje máme.

Ilustrujme ještě uvedenou situaci podrobněji numericky. Předpokládejme, že $\underset{\sim}{A_3} = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A_4} = \underset{\sim}{B}$ (z příkladu 1 a 2) a že $\underset{\sim}{A_5} = \{z_1|0, z_2|0, z_3|1\}$.

Použijeme-li vztahu (1) při $\beta = 0,5$ a $K = \frac{100}{3}$, máme
$H_{0,5}(\underset{\sim}{A_1}) = H_{0,5}(\underset{\sim}{A_2}) = 0$
$H_{0,5}(\underset{\sim}{A_3}) = H_{0,5}(\underset{\sim}{A}) = 30,93$
$H_{0,5}(\underset{\sim}{A_4}) = H_{0,5}(\underset{\sim}{B}) = 100$
$H_{0,5}(\underset{\sim}{A_5}) = \frac{100}{3} \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot [0+0+0] = 0.$

Celková neurčitost diagnózy za předpokladu stejné důležitosti charakteristik 1 - 5 je $H^1 = 0 + 0 + 30,93 + 100 + 0 = 130,93$.

Kvalita dat z hlediska jejich přesnosti je podle (7)

$$\delta^1 = \frac{130,93}{500} \doteq 0,26.$$

Použijeme-li vztahu (2) při $L = \frac{100}{3}$, máme
$H_P(\underset{\sim}{A_1}) = H_P(\underset{\sim}{A_2}) = 0$
$H_P(\underset{\sim}{A_3}) = H_P(\underset{\sim}{A}) = 20$
$H_P(\underset{\sim}{A_4}) = H_P(\underset{\sim}{B}) = 100.$
Celková neurčitost diagnózy je v uvedeném případě a opět za předpokladu rovnocennosti charakteristik $H^2 = 0 + 0 + 20 + 100 + 0 = 120$.
Kvalita dat posuzovaných na uvedené škále z hlediska jejich přesnosti je podle (7)

$$\delta^2 = \frac{120}{500} = 0,24. \ \blacksquare$$

Poznámka: V případě, že charakteristiky nemoci nejsou stejné důležitosti, je třeba jejich relativní význam odhadnout (opět třeba „expertně“) nezápornými vahami $v_1, v_2, \cdots, v_5$ tak, že $\sum_{i=1}^{5} v_i = 1$ ([4]). Celkovou neurčitost H pak určujeme váženým součtem $H = v_1 \cdot H(\underset{\sim}{A_1}) + v_2 \cdot H(\underset{\sim}{A_2}) + \cdots + v_5 \cdot H(\underset{\sim}{A_5})$. $\blacksquare$

Odhad spolehlivosti měření

V tomto odstavci ukážeme, jak lze pomocí míry neurčitosti, která může nabývat jen hodnoty v konečných mezích, odhadovat spolehlivost měření. Současně také předvedeme i poněkud neobvyklé užití Spearman - Brownova vzorce pro výpočet spolehlivosti měření realizovaného různými nezávislými hodnotiteli.

Příklad 5. Jistému novorozenci byl podáván *tramadol* (nový lék, jehož účinky se měly v našich podmínkách důkladně prověřit). Účinek tramadolu na změnu pacientova pocitu bolesti byl posuzován tak, že výraz jeho obličeje byl v určité časové posloupnosti porovnáván se čtyřmi ikonickými výrazy mimiky obličeje zobrazující bolest. Ikonické výrazy byly seřazeny do posloupnosti, aby reprezentovaly vzrůstající míru manifestované bolesti prostřednictvím charakteristických znaků obličejové mimiky. Každý ze čtyř ikonických výrazů obličeje byl porovnáván s aktuálním výrazem obličeje pacienta. Číslice, odpovídající nejlépe ikoně, jejíž výraz se podobá pacientovi, byla považována za odhad manifestní „míry“ bolesti.

V následující tabulce Tab. A jsou uvedena nezávislá hodnocení míry bolesti našeho pacienta pěti hodnotiteli v diskrétních časových okamžicích po začátku podávání tramadolu.

	Okamžik sledování [h]							
Posuzovatel	0	1	2	4	6	8	10	12
1.	3	2	2	0	0	0	0	0
2.	3	3	2	1	0	0	0	0
3.	3	2	1	1	1	0	0	0
4.	2	2	2	1	0	0	0	0
5.	3	2	2	0	0	0	0	0

Tab. A. Odhady míry bolesti pěti hodnotiteli.

Protože uvedené „měření“ je velmi subjektivní, byl nejprve proveden odhad celkové spolehlivosti měření na srovnávací vizuální škále bolesti a pak i odhady spolehlivosti měření v určitých místech vizuální škály.

a) Z tabulky Tab. A odhadů míry bolesti byly stanoveny vzájemné výběrové korelace mezi hodnoceními hodnotitelů, které jsou uvedeny v tabulce Tab. B.

Hodnotitel	1	2	3	4	5
1.	1	0,94	0,86	0,96	1,00
2.		1	0,89	0,97	0,94
3.			1	0,89	0,86
4.				1	0,96
5.					1

Tab. B. Korelace mezi výsledky hodnotitelů.

Všechny korelace z tabulky Tab. B jsou statisticky významné na 5 % hladině významnosti. Jejich průměrná hodnota je $\overline{r} = 0{,}927$. Spearman - Brownův vzorec (viz vzorec (1.88) z [5]) odhaduje z uvedených vzájemných korelací celkovou spolehlivost měření S ve tvaru

$$S = \frac{n \cdot \overline{r}}{1 + (n-1)\overline{r}}\ , \tag{8}$$

kde n je zde počet hodnotitelů ($n = 5$); po dosazení dostaneme pro spolehlivost hodnotu

$$S = \frac{5 \cdot 0,927}{1 + 4 \cdot 0,927} = 0,984.$$

Protože nejvyšší možná spolehlivost je 1, mělo uvedené odhadování vysokou spolehlivost.

b) Vyjdeme z toho, že *větší* neurčitost měření znamená *menší* spolehlivost měření. Odhadujeme proto spolehlivost měření na doplňku hodnot na škále neurčitosti.

Neurčitost jsme odhadovali prostřednictvím fuzzy množin podle (1), resp. (2). Vizuální odhady škálových hodnot modelujeme fuzzy množinami na čtyřprvkové množině normativních obrázků, které jsme označili čísly 0, 1, 2, 3. Uvedená čísla jsou také hodnotami škály „bolesti“ v interpretaci

„0“ ...... bez bolesti
„1“ ...... mírná bolest
„2“ ...... bolest
„3“ ...... velká bolest.

Tabulka Tab. A popisuje, že v časových okamžicích 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 [h] byl proveden současně (avšak nezávisle) pěti hodnotiteli odhad míry bolesti porovnáním mimiky respondenta se standardy škálových ikon. Z relativních četností výsledků těchto odhadů byly pro každý uvažovaný časový okamžik t stanoveny fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}\ (t)$, reprezentující neurčitost odhadu pomocí vztahů (1), resp. (2). Výsledky jsou obsaženy v následující tabulce Tab. C.

	hodnoty škály				neurčitosti	
	0	1	2	3	$H_{0,5}$	H_P
$\underset{\sim}{A}(0)$	0	0	0,2	0,8	9,3	20
$\underset{\sim}{A}(1)$	0	0	0,8	0,2	9,3	20
$\underset{\sim}{A}(2)$	0	0,2	0,8	0	9,3	20
$\underset{\sim}{A}(4)$	0,4	0,6	0	0	11,1	40
$\underset{\sim}{A}(6)$	0,8	0,2	0	0	9,3	20
$\underset{\sim}{A}(8, 10, 12)$	1	0	0	0	0	0

Tab. C. Neurčitosti fuzzy množin měření v různých časových okamžicích.

Pro odhad neurčitosti podle vztahu (1) máme $n = 4$ a volíme $\beta = 0,5$ a maximální neurčitost 100, proto platí

$$K^* = K \ \cdot A_{0,5} = \frac{100}{4(2 \cdot \sqrt{0,5} - 1)} \doteq 13,67.$$

Pro $\underset{\sim}{A}(0)$ tak například dostáváme podle (33)

$H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(0)) = 13,67 \cdot [(\sqrt{0} + \sqrt{1} - 1) \cdot 2 + (\sqrt{0,2} + \sqrt{0,8} - 1) \cdot 2] = 9,34$

$H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(0)) = H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(1)) = H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(2)) = H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(6))$

$H_{0,5}(\underset{\sim}{A}(4)) = 13,67 \cdot [\sqrt{0,4} + \sqrt{0,6} - 1] \cdot 2 = 11,1.$

Pro odhad neurčitosti podle (2) máme při $n = 4$ a volbě maximální neurčitosti opět 100, podmínku pro konstantu K:

$2K \cdot 4 \cdot 0,5 = 100$ a tedy $K = 25$.

Proto například pro $\underset{\sim}{A}(0)$ podle (2) dostáváme pro neurčitost odhady

$H_P(\underset{\sim}{A}(0)) = 50 \cdot [0,2 + 0,2] = 20$

$H_P(\underset{\sim}{A}(4)) = 50 \cdot [0,4 + 0,4] = 40.$

Za odhad spolehlivosti měření v časových okamžicích t = 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 [h] pak můžeme volit vzhledem k zavedené neurčitosti $H_{0,5}$, resp. H_P, míru

$$S_{0,5}(\underset{\sim}{A}(t)) = 100 - H_{0,5}(A(t)), \text{resp.} \ \ S_P(A(t)) = 100 - H_P(A(t)). \tag{8}$$

Z tabulky Tab. C je vidět, že vzhledem k neurčitosti $H_{0,5}$ se spolehlivost $S_{0,5}$ pohybuje kolem 90 a spolehlivost S_P mezi 60 - 80 (míra spolehlivosti S_P je „přísnější“). Lze proto označit uvedený vizuální odhad bolesti (stejně kvalifikovaným hodnotitelem jako byli ti zkušební) za spolehlivý. Hodnocení bolesti diskutovanou metodou lze realizovat proto i jediným hodnotitelem. (Intuitivně však soudíme, že je to způsobeno malou citlivostí tohoto měření.) ■

Literatura

[1.] Arora H, Petry F, Beaubouef T. *New Information Measures for Fuzzy Sets.* IFSA '97 Prague, Vol. IV: s. 75 - 8

[2.] Půlpán Z. *Informoj por svaga aro en starigo de diagnozoj de malsanoj.* Grkg/Humankybernetik 2000; 41(4): 167 - 76.

[3.] Půlpán Z. *Fuzzy - pragmatische Information.* Grkg/Humankybernetik, 1990; 31(3): 123 - 32

[4.] Půlpán Z. *K problematice vágnosti v humanitních vědách.* Praha: Academia, 1997: 151 s.

[5.] Půlpán Z. *K problematice hledání podstatného v humanitních vědách.* Praha: Academia, 2001: 135 s.

[6.] Půlpán Z. *K problematice zpracování empirických šetření v humanitních vědách.* Praha: Academia, 2004: 182 s.

[7.] Půlpán Z. *Únava jako funkce času.* Acta Medica (Hradec Král.), Suppl 2002; 45(2): 89-98.

[8.] Půlpán Z. *Informace pro fuzzy množiny v diagnostice nemocí.* Acta Medica (Hradec Král.) Suppl 2000; 43(1). 7-12,

Prof. RNDr. Zdeněk Půlpán, CSc.
Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové
e-mail: `zdenek.pulpan@uhk.cz`

RNDr. Michal Čihák, Ph.D.
Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové
e-mail: `michal.cihak@uhk.cz`