ROBUST'2002, 247 – 255

APLIKACE S-ODHADŮ V ROBUSTNÍ VERZI EXPONENCIÁLNÍHO VYROVNÁVÁNÍ ČASOVÝCH ŘAD

JIŘÍ MICHÁLEK

ABSTRAKT. Článek se zabývá využitím tzv. S-odhadů pro robustní vyrovnávání časových řad, které mohou být poškozeny „outliery". Technika S-odhadů je použita pro odhad lokálního koeficientu trendu a lokální úrovně variability. Je odvozena rekurentní formule pro výpočet těchto lokálních charakteristik popisujících chování sledované časové řady. Teoretické výsledky jsou završeny důkazem ekvivariantnosti vůči posunutí u odhadů lokálních parametrů regrese a invariantnosti odhadu úrovně disperze.

Abstract. The contribution deals with an application of S-estimators to a robust version of exponential smoothing. A recurrent algorithm for estimating local regression coefficients and a variance level is derived. Translation equivariation of local regression coefficients and translation invariation of variance estimation are proved.

Резюмэ. В статье предлагаеця алгорифм для оценивания локальных параметров реакции и дисперсии в случае робустного сглаживания временных рядов основаного на S-оценках. Также показана аффинная инвариянтность этих оценок.

Myšlenka využít postupů robustní statistiky v exponenciálním vyrovnávání časových řad se poprvé objevuje v práci [1] a je dále rozvedena v práci [3]. Obě tyto práce využívají pro odvození rekurentních formulí pro robustní exponenciální vyrovnávání M-odhady pro odhadování lokálních koeficientů v trendu časové řady, ale úroveň rozptylu je odhadována nerobustním způsobem. Myšlenka využít tzv. S-odhady pro robustní exponenciální vyrovnávání řad je poprvé využita v diplomové práci [4]. Tento přístup je motivován prací [5] z roku 1984, kde autoři zkoumali S-odhady a ukázali jejich vlastnosti pro regresní koeficienty a rozptyl v regresním modelu. S-odhady jsou zajímavé především proto, že na rozdíl od M-odhadů jsou regresně ekvivariantní. Definování S-odhadů si nejdříve ukážeme na jednoduchém příkladu. Nechť $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ jsou vzájemně nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s konečným rozptylem a hledejme odhad střední hodnoty těchto veličin pomocí minimizace (nejmenších čtverců)

$$\min_t \sum_{i=1}^{n} (Y_i - t)^2.$$

Tento vztah lze též chápat následně pomocí M-odhadu rozptylu $\sigma(t)$ jako řešení rovnice

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - t}{\sigma} \right)^2 = 1$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 62M10 62F35.
Klíčová slova. Exponenciální vyrovnávání, S-odhad, ekvivariance a invariance odhadů.
Tato práce je podporována grantem GA ČR 402/01/1548.

při pevném t a posléze minimalizací rozptylu $\sigma(t)$ přes parametr t, kde výše uvedená rovnice dává

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - t)^2.$$

Tento odhad je speciálním případem odhadu

$$\min_{t\in R_1} \sigma^2(t)$$

za podmínky

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\frac{Y_i - t}{\sigma}\right) = b, \tag{1}$$

kde b je vhodně zvolená kladná konstanta. Hledáme tedy M-odhad rozptylu $\sigma^2(t)$ při řešení omezení (1) a pak $\sigma^2(t)$ minimalizujeme přes $t \in R_1$. Funkce $\rho(\cdot)$ je reálná funkce, která zatím není blíže specifikována. Požadavky na její vlastnosti budou uvedeny později.

Nyní tuto myšlenku využijeme pro konstrukci robustního odhadu lokálního trendu a rozptylu časové řady.

Klasický algoritmus exponenciálního vyrovnávání časových řad vychází z minimalizace

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in R_k} \sum_{i=0}^{\infty}\left(Y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}_{-i}\right)^2 \alpha^i$$

kde $\boldsymbol{\beta}$ je vektor paramerů trendu, který je vyjádřen pomocí vektoru bázických funkcí $\boldsymbol{x}_{-i}$ lokálního času i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Dle výše uvedeného postupu je $\sigma^2(\boldsymbol{\beta})$ vyjádřeno pomocí vztahu

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{Y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)^2 \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i = \frac{1}{1-\alpha} \tag{2}$$

při $0 < \alpha < 1$ pro pevné $\boldsymbol{\beta} \in R_k$ a pak následná minimalizace $\sigma^2(\boldsymbol{\beta})$ přes $\boldsymbol{\beta} \in R_k$. Je ihned zřejmé, že kvadratickou funkci použitou ve vztahu (2) lze nahradit obecnou funkcí $\rho(\cdot)$, jejíž požadované vlastnosti pak ovlivňují chování pozorovaných hodnot $\{Y_t\}$ na odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}$, σ. Tímto se dostáváme k obecné definici robustního exponenciálního vyrovnávání časové řady pomocí S-odhadů parametrů trendu $\boldsymbol{\beta}$ a rozptylu σ^2.

Definice. Nechť $\{Y_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ je časová řada, kterou je možné popsat modelem

$$Y_{t+i} = \boldsymbol{\beta}^T\,\boldsymbol{x}_i + \sigma(t)\,e(t), \quad i \in \mathbb{Z},$$

kde $\boldsymbol{x}_i$ je vektor k-rozměrný bázických funkcí, $\boldsymbol{\beta}$ je vektor k-rozměrný parametrů trendu a $\sigma(t)$ je směrodatná odchylka náhodných chyb $e(t)$, které jsou se střední hodnotou nula, jednotkovým rozptylem a vzájemně nezávislé. Nechť existuje dvojice $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma)_t$, která minimalizuje v čase t hodnotu $\sigma(\boldsymbol{\beta})$, která splňuje podmínku

$$\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(\frac{Y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T\,\boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)\alpha^i = \frac{b}{1-\alpha}, \tag{3}$$

kde $0 < b < \sup\rho(\cdot)$, přes všechna $\boldsymbol{\beta} \in R_h$. Funkce $\rho(\cdot)$ musí být symetrická se spojitou derivací, $\rho(0) = 0$; existuje konečné $c > 0$ takové, že $\rho(\cdot)$ je striktně rostoucí na $\langle 0, c\rangle$ a konstantní na $(c; +\infty)$. Potom dvojici $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\sigma}(\cdot))$ nazýváme exponenciálním S-odhadem parametrů trendu $\boldsymbol{\beta}$ a roztpylu σ v čase t.

Poznámka 1. Vlastnosti funkce $\rho(\cdot)$ požadované výše vycházejí z práce [5] tak, aby bylo dosaženo vysokého bodu selhání a asymptotické normality těchto odhadů.

Poznámka 2. Zatím zůstává zcela otevřená otázka jednoznačnosti exponenciálních S-odhadů z Definice 1. Dále budou uvedeny požadavky, které zaručují jednoznačnost těchto odhadů.

Obrovskou předností algoritmů klasického exponenciálního vyrovnávání časových řad je jejich rekurence, neboť tím se stávají velice přehlednými a snadno použitelnými v praxi. Pokusíme se tyto přednosti ukázat i v případě robustního exponenciálního vyrovnávání založeného na S-odhadech. Nejdříve podrobně probereme případ speciální volby funkce $\rho(\cdot)$. Tato volba je dána předpisem

$$\rho(x) = x^2 \quad \text{pro} \quad |x| \le R,$$
$$\rho(x) = c \quad \text{pro} \quad |x| > R,$$

kde R je vhodně zvolená kladná konstanta obvykle volená z intervalu $\langle 0, 10\rangle$, např. v metodě $X84$ z [2] je $R = 5,2$. Pro výpočet odhadu $(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma})_t$ budeme využívat předchozí odhady $(\widehat{\beta}, \widehat{\sigma})_{t-i}$, $i = 1, 2, \ldots$ a hodnotu y_t nového pozorování časové řady v čase t. Vztah (3) upravíme do následujícího tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho\left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)\left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)^2}{\left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)^2} \alpha^i = \frac{b}{1-\alpha}.$$

Podíl $\rho\left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{i-}}{\sigma}\right) \Big/ \left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{i-}}{\sigma}\right)^2$ označme jako $w(y_{t-i}, (\boldsymbol{\beta}, \sigma))$. Jeho velikost vyjadřuje „váhu“ $(t-i)$-tého pozorování v celkové sumě ve vzorci (3). Snadno vidíme, že platí následující

$$w(y_{t-i}, (\boldsymbol{\beta}, \sigma)) = 1 \quad \text{pro} \quad |r_{t-i}| \le R\,\sigma,$$
$$w(y_{t-i}, (\boldsymbol{\beta}, \sigma)) = \frac{R^2 \sigma^k}{r_{t-i}^2} \quad \text{pro} \quad |r_{t-i}| > R\,\sigma.$$

Odtud ihned vidno, že $w(y_{t-i}(\boldsymbol{\beta}, \sigma)) \to 0$ pro $|r_{t-i}| \to \infty$, když r_{t-i} je residuum $(t-i)$-tého pozorování

$$r_{t-i} = y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}.$$

Protože parametry $(\boldsymbol{\beta}, \sigma)$ neznáme, nahradíme je ve váze $w(y_{t-i}, (\boldsymbol{\beta}, \sigma))$ jejich odhady $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\sigma})_{t-i-1}$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Tím se dostáváme k modifikaci předchozího vztahu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{w}(t-i) \left(\frac{y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}}{\sigma}\right)^2 \alpha^i = \frac{b}{1-\alpha},$$

kde pro zjednodušení označíme $\widehat{w}(t-i) = w\left(y_{t-i}, (\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\sigma})_{t-i-1}\right)$. Odtud tedy získáváme vyjádření pro $\sigma^2(\boldsymbol{\beta})$ ve tvaru

$$\sigma^2(\boldsymbol{\beta}) = \frac{(1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{w}(t-i)\,(y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_i)^2 \alpha^i}{b}.$$

Tímto postupem získáváme explicitní vyjádření pro rozptyl $\sigma^2(\cdot)$ v závislosti na parametrech $\boldsymbol{\beta}$, a hledáme minimum této funkce přes $\boldsymbol{\beta} \in R_k$. Hledané minimum musí vyhovovat „normálním“ rovnicím

$$\frac{\partial \sigma^2(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_e} = 0, \quad e = 1, 2, \dots, k,$$

což nám dává soustavu lineárních rovnic pro neznámý parametr $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \, \widehat{w}(t-i) \, \left(y_{t-i} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-i}\right) \, x_{-i}(j) = 0$$

pro $j = 1, 2, \dots, k$. ($\boldsymbol{x}_{-i}^T = (x_{-i}(1), x_{-i}(2), \dots, x_{-i}(k))$). Tento systém rovnic lze vyjádřit v následující maticové formě

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \, \widehat{w}(t-i) \, \boldsymbol{x}_{-i} \left(y_{t-i} - \boldsymbol{x}_{-i}^T \boldsymbol{\beta}\right) = \mathbf{0}.$$

Nyní je nutno ověřit konvergenci těchto nekonečných řad, které doposud byly uvažovány zcela formálně. V každém případě je vždy

$$0 < \widehat{w}(t-i) \leq 1 \quad \text{s. j.},$$

jak plyne přímo z konstrukce vah $w(\cdot, \cdot)$. O chybách $e(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ předpokládáme, že jsou navzájem nezávislé, se střední hodnotou nula a se shora ohraničeným rozptylem. Pak pro každé N a t má smysl konečná řada

$$S_i^N = \sum_{i=1}^{N} \alpha^i |x_{-i}(j)| \, e(t-i)|,$$

která je nezáporným supermartingalem a protože $E\{|e(t-j)|\}$ jsou stejnoměrně ohraničeny shora, pak existuje s pravděpodobností 1 limita $S_1^\infty = \lim_{N \to \infty} S_i^N$, která je s. j. konečná. Odtud tedy

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \, \widehat{w}(t-i) \, \boldsymbol{x}_{-i} \, \boldsymbol{x}_{-i}^T \right)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \widehat{w}(t-i) \, y(t-i) \, \boldsymbol{x}_{-i}. \tag{4}$$

Ke zcela stejnému vyjádření pro odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_t$ jsme dospěli již dříve v práci [3], a tudíž její výsledky zde využijeme.

Obě procedury se liší pouze v tom, že využívá každá jiný typ vah. Zde máme při speciální volbě funkce $\rho(\cdot)$

$$\begin{aligned} \widehat{w}(t-i) &= 1 \quad \text{pro} \quad |y_{t-i} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{t-i-1}^T \, \boldsymbol{x}_{-i}| \leq R \cdot \widehat{\sigma}_{t-i-1} \\ \widehat{w}(t-i) &= \frac{c \, \widehat{\sigma}_{t-i-1}^2}{(\widehat{r}_{t-i})^2} \quad \text{pro} \quad |y_{t-i} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{t-i-1}^T \, \boldsymbol{x}_{-i}| > R \, \widehat{\sigma}_{t-i-1}. \end{aligned}$$

Tento přístup však dává zcela nový odhad pro $\sigma^2(t)$, a to totiž ve formě

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{(1-\alpha) \, \widehat{w}(t) \, (y_t - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_t^T \, \boldsymbol{x}_0)^2}{b} + \alpha \, \widehat{\sigma}_{t-1}^2. \tag{5}$$

Konstanta b je stanovena tak, aby odhad $\widehat{\sigma}_{t+1}^2$ byl nestranný, což dává, že musí být

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) \, \mathrm{d}F_e(\lambda),$$

kde $F_e(\cdot)$ je distribuční funkce rozdělení náhodných chyb $\{e_t\}$.

Pokud budeme uvažovat jinou funkci $\rho(\cdot)$ než-li je kvadratická uvažovaná výše, pak lze obdobný výsledek odvodit za předpokladu, že

$$0 \leq \frac{\rho(x)}{x^2} \leq \text{konst.}$$
$$\lim_{|x|\to 0} \frac{\rho(x)}{x^2} = 1,$$

neboli v okolí 0 se $\rho(\cdot)$ chová podobně jako funkce x^2.

Ekvivariance a invariance odhadů. Uvažujme tedy následující model časové řady $\{y_t\}$

$$y_{t+i} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_i + \sigma\, e(t), \quad i \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{N} \tag{6}$$

s neznámými parametry $(\boldsymbol{\beta}, \sigma)$.

Definice 2. Nechť $\boldsymbol{\delta} \in R_k$. Regresní variací časové řady $\{y_t\}$ nazýváme časovou řadu $\{z_t\}$, pro niž platí

$$z_{t+i} = y_{t+i} + \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{x}_i.$$

Pro další označme minulost časové řady $\{y_t\}$: $Y_t = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$, obdobně u řady $\{z_t\}$, $Z_t = \{z_1, z_2, \ldots, z_t\}$.

Definice 3. Nechť $t \in \mathcal{N}$. Pak odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_t(Y_t)$ regresních koeficientů $\boldsymbol{\beta}$ nazveme regresně ekvivariančním, když pro každé $\boldsymbol{\delta} \in R_k$ platí

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_t(Z_t) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_t(Y_t) + \boldsymbol{\delta}.$$

Definice 4. Nechť $t \in \mathcal{N}$. Pak odhad $\widehat{\sigma}_t(Y_t)$ směrodatné odchylky σ v čase t nazveme regresně invariantním, když

$$\widehat{\sigma}_t(Z_t) = \widehat{\sigma}_t(Y_t).$$

Pro případ aplikace S-odhadů pro konstrukci robustního algoritmu pro vyrovnávání časové řady lze dokázat následující větu.

Věta 1. Nechť časová řada $\{y_t\}$ je popsána pomocí modelu (6) a nechť rekurentní vztah pro odhad regresních koeficientů $\boldsymbol{\beta}$ je dán předpisem (4), který lze přepsat do rekurentního vztahu pro výpočet odhadů parametrů regrese $\boldsymbol{\beta}$,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1) = \mathbb{L}^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t) + \frac{\mathbb{L}^T \mathbb{P}^{-1}(t)\, \mathbb{L}\, \boldsymbol{x}_0\, w(t+1)}{\alpha + w(t+1)\, \boldsymbol{x}_0^T\, \mathbb{L}^T \mathbb{P}^{-1}(t)\, \mathbb{L}\, \boldsymbol{x}_0} \left[y(t+1) - \boldsymbol{x}_0^T\, \mathbb{L} \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t) \right],$$

kde matici $\mathbb{P}^{-1}(t)$ lze rovněž počítat rekurentně (blíže viz [1]).

Jestliže odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(0)$ je ekvivarianční, pak pro každé $t \geq 1$ jsou odhady $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ rovněž ekvivarianční.

Důkaz. Důkaz lze provést úplnou indukcí. Pro $t = 0$ lze ekvivarianční odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ získat následovně. Nechť $(y_{-r}, y_{-r+1}, \dots, y_0)$ jsou pozorování, která hodláme obětovat pro odstartování výše uvedené rekurentní formule. Ekvivarianční odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(0)$ lze získat např. pomocí metody nejmenších čtverců, tj. minimalizací kvadratické funkce

$$\sum_{j=0}^{r} \left(y_{-j} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_{-j}\right)^2 .$$

Předpokládejme, že v čase t odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ je ekvivarianční a dokažme, že rovněž odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1)$ v čase $(t+1)$ je ekvivarianční. To znamená, že ukážeme adekvátní posun v odhadech v čase $t+1$, když se posun objevil u parametrů regrese v čase t. Vyjděme tedy z regresního modelu (6) pro sledovanou časovou řadu $\{y(t)\}$. V tomto modelu musí platit následující vazba mezi koeficienty $\boldsymbol{\beta}(t)$ a $\boldsymbol{\beta}(t+1)$:

$$\boldsymbol{\beta}^T(t+1)\, \boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{\beta}^T(t)\, \boldsymbol{x}_{\ell+1}. \tag{7}$$

Jestliže tedy v čase t dojde ke změně v parametrech $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\delta}$, pak v čase $(t+1)$ se změna projeví ve tvaru

$$\boldsymbol{\gamma}(t+1) = \boldsymbol{\beta}(t+1) + \mathbb{L}^T \boldsymbol{\delta},$$

kde $\mathbb{L}$ je matice svazující bázické funkce, tj.

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \mathbb{L}\, \boldsymbol{x}_i.$$

Změna v čase $t+1$ vyvolaná změnou v čase t vyplývá ze vztahu (7). Musíme tedy dokázat, že zcela obdobně se změna promítne do odhadů, tj. bude platit za předpokladu, že

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t) + \boldsymbol{\delta}$$

taktéž

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t+1) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1) + \mathbb{L}\, \boldsymbol{\delta}.$$

Nejdříve dokážeme, že posunutí $\boldsymbol{\delta}$ se neprojeví na hodnotě váhy $w(t+1)$. Váha $w(t+1)$ je funkcí chyby predikce na jeden krok dopředu, totiž rozdílu

$$\begin{aligned} & y(t+1) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1 = y(t+1) + \boldsymbol{x}_1^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t) = \\ = \quad & y(t+1) - (\mathbb{L}\, \boldsymbol{x}_0)^T\, \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t) = y(t+1) - \boldsymbol{x}_0^T\, \mathbb{L}^T\, \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t). \end{aligned}$$

Jestliže nyní budeme uvažovat variaci řady $\{y_t\}$, tj. řadu $\{z_t\}$ vzniklou posunutím v regresních koeficientech o variaci $\boldsymbol{\delta}$, pak musí platit, že

$$\begin{aligned} z(t+1) &= \boldsymbol{\gamma}^T(t+1)\, \boldsymbol{x}_0 + e(t+1) = \\ &= \boldsymbol{\gamma}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1 + e(t+1) = \\ &= (\boldsymbol{\beta}^T(t) + \boldsymbol{\delta}^T)\, \boldsymbol{x}_1 + e(t+1) = \\ &= \boldsymbol{\beta}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\delta}^T\, \boldsymbol{x}_1 + e(t+1) = \\ &= y(t+1) + \boldsymbol{\delta}^T\, \boldsymbol{x}_1. \end{aligned}$$

Váha $w(t+1)$ odvozená od časové řady $\{z(t)\}$ závisí výhradně na rozdílu

$$\begin{aligned} z(t+1) - \boldsymbol{\gamma}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1 &= z(t+1) - (\boldsymbol{\beta}^T(t) + \boldsymbol{\delta}^T)\, \boldsymbol{x}_1 = \\ &= z(t+1) - \boldsymbol{\beta}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{x}_1 = \\ &= y(t+1) - \boldsymbol{\beta}^T(t)\, \boldsymbol{x}_1. \end{aligned}$$

Variací $\boldsymbol{\delta}$ se tedy hodnota váhy $w(t+1)$ vůbec nezmění. To znamená, že pravý sčítanec v rekurentní funkci je ivariantní vůči variaci $\boldsymbol{\delta}$. Z toho ihned plyne, že musí pro odhady $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t+1)$ a $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1)$ platit vztah

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t+1) - \mathbb{L}^T\,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1) - \mathbb{L}^T\,\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t).$$

Z toho ihned plyne, že

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t+1) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t+1) = \mathbb{L}^T(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t))\mathbb{L}^T\,\boldsymbol{\delta},$$

což bylo dokázat.

Definice 2. Nechť $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ je odhad regresních koeficientů v modelu (6) a nechť $\widehat{\sigma}(t-1)$ je odhad směrodatné odchylky σ v témže modelu v čase $t-1$. Nechť $f : R^{k+2} \to R$ je borelovsky měřitelná funkce. Pak odhad směrodatné odchylky σ v čase t vyjádřené pomocí

$$\widehat{\sigma}(t) = f\left(y(t),\, \widehat{\boldsymbol{\beta}}(t), \widehat{\sigma}(t-1)\right)$$

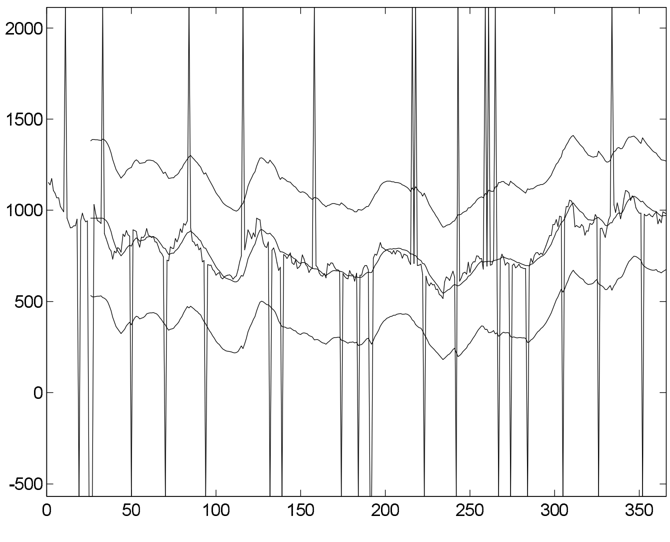
nazveme jednokrokovým rekurentním odhadem směrodatné odchylky σ v modelu (6).

Věta 2. Nechť $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(t)$ je regresně ekvivariační odhad regresních koeficientů v modelu (6). Jestliže $\widehat{\sigma}(t-1)$ je regresně invariantní odhad směrodatné odchylky σ v modelu (6), pak jednokrokový rekurentní odhad $\widehat{\sigma}(t)$ daný předpisem (5) je rovněž regresně invariantní.

Důkaz. Dle předpokladů věty víme, že platí

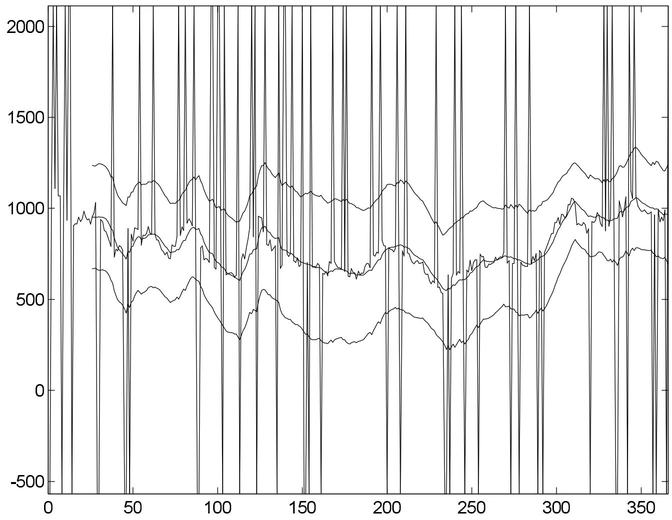
$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}(Y_{t-1}) &= \widehat{\sigma}(Z_{t-1}), \\ \widehat{\beta}(Y_t) &= \widehat{\beta}_t(Z_t). \end{aligned}$$

Z toho plyne hodnota reziduí $z(t) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(Z_t)\,\boldsymbol{x}_0$ a $y(t) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(Y_t)\,\boldsymbol{x}_0$ je stejná a invariantní vůči variaci $\boldsymbol{\delta}$, a tudíž i hodnota váhy $w(t-1)$ se nemění variací $\boldsymbol{\delta}$. Protože předpokládáme, že $\widehat{\sigma}(t)$ je regresně invariantní, pak, jak snadno vidět, i odhad směrodatné odchylky σ (resp. rozptylu σ^2) v čase t musí být regresně invariantní.

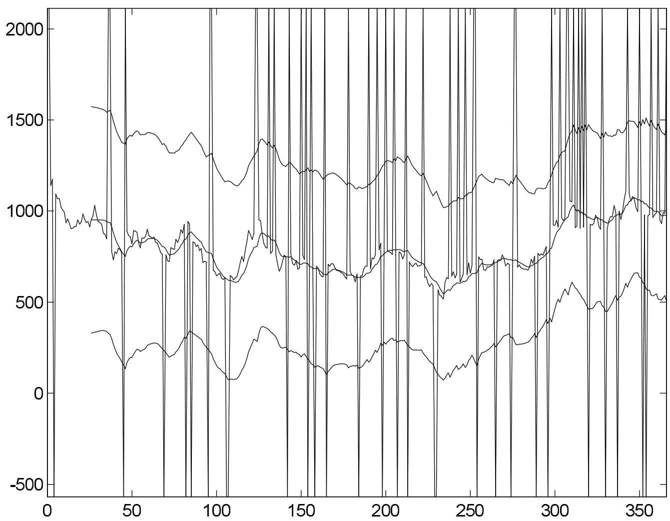


Obr. 1 *Řada COCL kontaminovaná 10 %.*

Pro ilustraci výše navržené metody pro robustní exponenciální vyrovnávání časových řad založeného na S-odhadech byla využita reálná data, která byla různě kontaminována uměle. Data představují průběh cen kakaa (COCL) na burze v období let 1990 – 1996, a to týdenní údaje. Každý týden je reprezentován středeční cenou kakaa. Počátečních 25 údajů bylo vždy obětováno pro odstartování rekurentního odhadování. Data byla postupně kontaminována 10 %, 20 %, a 30 % outliery náhodným způsobem. Parametr zapomínání α byl zvolen na úrovni 0,95 s bodem zamítnutí $R = 4$. Na obrázcích je současně vymezena oblast určující data, která byla pro robustní vyrovnávání časové řady využita.



Obr. 2 *Řada COCL kontaminovaná 20 %.*



Obr. 3 *Řada COCL kontaminovaná 30 %.*

Literatura

[1] T. Cipra: Robust exponential smoothing. J. Forecasting 11 (1992), 54–69.
[2] Hampel et al
[3] J. Michálek: Robust methods in exponential smoothing. Kybernetika 32 (1996), 3, 289–306.
[4] M. Koblas: Metody robustní statistiky ve vyrovnávání časových řad. Diplomová práce. FJFI ČVUT Praha, 2000.
[5] V. Yohai, P. J. Rousseeuw: Robust regression by means of S-estimators. Lecture Notes in Statistics 26 (1984), 256–272.

Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Prague, Czech Republic