ROBUST'2002, 202 – 215

DIFERENCOVATELNOST A SMĚROVÁ DIFERENCOVATELNOST FUNKCE

PETR LACHOUT

Abstract. The paper is giving an ouverview on differentiability of a mapping between metric vector spaces. The last section deals with set-valued mappings and their contingent derivative. Some differentiability cases are giving generalizations of Delta Theorem.

Резюме. Статя представляет розные типы производной изображения между метрическими векторными пространствами. Последная глава представляет контингентну производную изображения принимающего мнозества как своё значения. Дискутированные производные испољзованы для обобщения Дељта теоремы.

Abstrakt. Příspěvek shromažďuje používané typy diferencovatelnosti zobrazení mezi metrickými vektorovými prostory. V poslední kapitole je představena kontingenční derivace funkce, jejíž hodnoty jsou množiny. Je ukázáno jak různé typy diferencovatelnosti umožňují užitečná zobecnění Delta věty.

1. Úvod

Nejdříve představme klasickou verzi Delta věty, která využívá diferencovatelnosti reálné funkce v jednom bodě.

(Klasická) Delta věta: *Nechť je funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *měřitelná a diferencovatelná v bodě* $x_o \in \mathbb{R}$, X_n, $n \in \mathbb{N}$ *jsou reálné náhodné veličiny a* $\tau_n > 0$ *jsou reálná čísla. Když* $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ *a* $\tau_n(X_n - x_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \xi$, *pak*

$$\tau_n(f(X_n) - f(x_o)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f'(x_o) \cdot \xi.$$

Důkaz: Označíme-li derivační podíl

$$Df(t; x_o) = \begin{cases} \frac{1}{t}(f(x_o + t) - f(x_o)) & \text{když} \quad t \neq 0, \\ f'(x_o) & \text{když} \quad t = 0, \end{cases}$$

pak můžeme psát

$$\tau_n(f(X_n) - f(x_o)) = Df(X_n - x_o; x_o) \cdot \tau_n(X_n - x_o).$$

Z předpokladů $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ a $\tau_n(X_n - x_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \xi$ plyne, že

$$X_n - x_o \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} 0$$

a odtud

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58C20 Secondary 26E20.

Klíčová slova. Diferencovatelnost funkce, směrová diferencovatelnost funkce, diferencovatelnost ve Frechetově smyslu, diferencovatelnost v Hadamardově smyslu, kontingentní derivace množinové funkce.

The research has been partially supported by the project CEZ: MSM 113200008 and the Czech Republic Grant 201/02/0621.

$$Df(X_n - x_o; x_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f'(x_o).$$

Odtud již plyne tvrzení věty, neboť limita v distribuci sledovaného součinu je součinem limit, jelikož $f'(x_o)$ je nenáhodné číslo.

Q.E.D

(1) **Odhad parametru**
Nechť X_i, $i \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. s exponenciálním rozdělením s neznámým parametrem $0 < \lambda_o < +\infty$.

Metodou maximální věrohodnosti získáme odhad $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Jde o konzistentní odhad parametru λ_o s řádem konzistence $\tau_n = \sqrt{n}$ a asymptoticky normálním rozdělením, t.j.

$$\hat{\lambda}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{a.s.} \lambda_o,$$
$$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}_n - \lambda_o\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \xi, \text{ kde } \quad \mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\big(0, \lambda_o^2\big)\,.$$

Asymptotické rozdělení závisí na parametru, což je jistá komplikace například pro testování hypotéz. Tuto nepříjemnost odstraní logaritmická transformace odhadu, pro kterou použitím delta věty vyjde

$$\sqrt{n}\left(\log\hat{\lambda}_n - \log\lambda_o\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \log'(\lambda_o)\xi = \frac{\xi}{\lambda_o}, \text{ kde } \mathcal{L}\Big(\frac{\xi}{\lambda_o}\Big) = \mathcal{N}(0,1).$$

(2) **Stochastická optimalizace**
Uvažujme optimalizační úlohu $\varphi(x) = \max\{f(u;x) : u \in \mathcal{U}_x\}$, která závisí na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Když X_n bude odhad správného parametru $x_o \in \mathbb{R}$, který je konzistentní s řádem τ_n a $\varphi'(x_o)$ bude existovat, pak podle delta věty dostaneme, že $\varphi(X_n)$ je konzistentní odhad pro $\varphi(x_o)$, opět s řádem τ_n.

Uvažovaný parametr však obyčejně bývá vícerozměrný nebo dokonce funkce. Častá je také situace, že parametrem je celé rozdělení pravděpodobnosti, které náleží do nějaké předepsané třídy rozdělení. Proto byla delta věta zobecněna i pro tyto složitější případy. K tomu účelu je však nutné použít vhodného zobecnění pojmu derivace.

Dále budeme uvažovat funkci $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$, kde $\mathbb{D} \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou metrické vektorové prostory.
Připomeňme si definice:

$\mathcal{V}$ je **(reálný) vektorový prostor**, když je na něm definováno sčítání '+', násobení reálným číslem a má nulový prvek $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ tak, že

i) $\forall x, y \in \mathcal{V}$ je $x + y = y + x \in \mathcal{V}$;
ii) $\forall x, y, z \in \mathcal{V}$ je $x + (y + z) = (x + y) + z$;
iii) $\forall x \in \mathcal{V}$ je $x + \mathbf{0} = x$;
iv) $\forall x \in \mathcal{V}$ je $1x = x$;
v) $\forall x, y \in \mathcal{V}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ je $t(x + y) = tx + ty$;
vi) $\forall x \in \mathcal{V}$ a $\forall t, s \in \mathbb{R}$ je $(t + s)x = tx + sx$;

$\mathcal{V}$ je **metrický vektorový prostor**, když je vektorovým prostorem a je opatřen metrikou $\rho : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$, t.j.

i) $\forall x, y \in \mathcal{V}$ je $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
ii) $\forall x, y \in \mathcal{V}$ je $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
iii) $\forall x, y, z \in \mathcal{V}$ je $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$;

tak, že

iv) $\forall x \in \mathcal{V}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{\substack{\rho(y,x)\to 0,\, y\in\mathcal{V} \\ s\to t,\, s\in\mathbb{R}}} \rho(sy, tx) = 0.$

$\mathcal{V}$ je **normovaný vektorový prostor**, když je vektorovým prostorem a je opatřen normou $\|\,.\,\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$, t.j.

i) $\forall x \in \mathcal{V}$ je $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$;
ii) $\forall x, y \in \mathcal{V}$ je $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
iii) $\forall x \in \mathcal{V}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\|tx\| = |t|\,\|x\|$.

Poznamenejme, že normovaný vektorový prostor je zároveň metrickým vektorovým prostorem s metrikou $\rho(x, y) = \|x - y\|$ neboť

$$\|sy - tx\| \leq \|s(y - x)\| + \|(s - t)x\| = |s|\,\|y - x\| + |s - t|\,\|x\|\,.$$

Označení:

$$\begin{array}{rcl} y \to x & \iff & \rho(y, x) \to 0; \\ \lim\limits_{\alpha\to\beta} y_\alpha = x & \iff & \lim\limits_{\alpha\to\beta} \rho(y_\alpha, x) = 0; \end{array}$$

2. Diferencovatelnost funkce

V této kapitole využíváme tyto prameny [2], [3], [5], [6], [8], [21], [24].

Derivaci funkce f v bodě $x \in \mathbb{D}$ ve směru $h \in \mathcal{V}$ definujeme jako

$$f'(x; h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(x + th) - f(x)\right),$$

pokud tato limita existuje (ve $\mathcal{W}$).

Definiční obor derivace označme

$$\mathbb{D}'_x = \{h \in \mathcal{V} \,:\, f'(x; h) \;\text{ existuje}\}\,.$$

Lemma 2.1.: *Množina $\mathbb{D}'_x$ je **'oboustranný kužel'**, t.j. $\alpha h \in \mathbb{D}'_x$, když $\alpha \in \mathbb{R}$ a $h \in \mathbb{D}'_x$, a funkce $f'(x;\,.\,)$ je **homogenní** na $\mathbb{D}'_x$, t.j. $f'(x; \alpha h) = \alpha f'(x; h)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{D}'_x$.*

Důkaz: Stačí si pouze uvědomit, že pro $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x; \alpha h) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(x + t\alpha h) - f(x)\right) = \alpha \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left(f(x + sh) - f(x)\right) = \\ &= \alpha f'(x; h)\,, \\ f'(x; 0h) &= f'(x; \mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(x) - f(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D

V literatuře se používají tři typy diferencovatelnosti funkce.

- Funkce f se nazývá **diferencovatelná** v bodě $x \in \mathbb{D}$, pokud $f'(x; h)$ existuje pro každé $h \in \mathcal{V}$.

- Funkce f se nazývá **diferencovatelná v Gâteauxově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když f je diferencovatelná v bodě x a $f'(x;\,.\,)$ je spojitá lineární funkce na $\mathcal{V}$.
- Funkce f se nazývá **diferencovatelná v Hadamardově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když f je diferencovatelná v bodě x a $f'(x;\,.\,)$ je lineární funkce na $\mathcal{V}$ splňující
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right) = f'(x;h)$$
pro všechny posloupnosti $t_n \in \mathbb{R}$, $t_n \neq 0$, $h_n \in \mathcal{V}$, $x+t_nh_n \in \mathbb{D}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h \in \mathcal{V}$.

Diferencovatelnost v Hadamardově smyslu je silnější předpoklad nežli diferencovatelnost v Gâteauxově smyslu.

Tvrzení 2.2.: *Když je funkce f diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x, pak je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x.*

Důkaz: Stačí ukázat spojitost derivace.
Označme ρ metriku metrického vektorového prostoru $\mathcal{W}$ a vezměme $h_n \in \mathcal{V}$, $h_n \to h \in \mathcal{V}$.
Funkce f je diferencovatelná v bodě x, proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n \in \mathbb{R}$, $0 < |t_n| < \frac{1}{n}$ tak, že $x+t_nh_n \in \mathbb{D}$ a $\rho\Big(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'(x;h_n)\Big) < \frac{1}{n}$.
Z diferencovatelnosti v Hadamardově smyslu
$$\rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'(x;h)\right) \to 0.$$
Trojúhelníková nerovnost pro metriku ρ dává odhad
$$\begin{aligned}\rho(f'(x;h_n), f'(x;h)) \quad &\le \rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'(x;h_n)\right) + \\ &+\rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'(x;h)\right).\end{aligned}$$
Tudíž
$$\rho(f'(x;h_n), f'(x;h)) \to 0.$$
Q.E.D

Když $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou normované vektorové prostory, pak lze používat silnější verze diferencovatelnost.

- Funkce f se nazývá **„boundedly" diferencovatelná** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když je diferencovatelná v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0} \sup_{\substack{h\in\mathcal{V},\|h\|=1\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\|\frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) - f'(x;h)\right\| = 0.$$
- Funkce f se nazývá **diferencovatelná ve Fréchetově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0} \sup_{\substack{h\in\mathcal{V},\|h\|=1\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\|\frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) - f'(x;h)\right\| = 0.$$

Poznamenejme, že derivace $f'(x;\,.\,)$ může být nespojitá a nelineární. Dokonce i v případě, že funkce je „boundedly“ diferencovatelná v bodě x. Příklad je jednoduchý. Když funkce f je homogenní na $\mathcal{V}$ pak je „boundedly“ diferencovatelná v počátku. Dokonce $f'(0;h) = f(h)$ neboť $\frac{1}{t}\left(f(th) - f(0)\right) = f(h)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ a $h \in \mathcal{V}$. A homogenní funkce může být nespojitá, dokonce i neměřitelná, a nelineární, protože může být definována na každé přímce $\{\alpha h \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ jinak.
Tyto derivace mají užitečné ekvivalentní vyjádření.

- Funkce f je „boundedly“ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{D}$ tehdy a jen tehdy, když je diferencovatelná v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0} \sup_{\substack{h\in B\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right) - f'(x;h) \right\| = 0$$
pro každou omezenou množinu $B \subset \mathcal{V}$.
- Funkce f je diferencovatelná ve Fréchetově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$, tehdy a jen tehdy, když je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0} \sup_{\substack{h\in B\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right) - f'(x;h) \right\| = 0$$
pro každou omezenou množinu $B \subset \mathcal{V}$.
- Funkce f je diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$, tehdy a jen tehdy, když je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0} \sup_{\substack{h\in K\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right) - f'(x;h) \right\| = 0$$
pro každý kompakt $K \subset \mathcal{V}$.

Protože kompakt je omezená množina, je diferencovatelnost ve Fréchetově smyslu silnější předpoklad nežli diferencovatelnost v Hadamardově smyslu. Pro normovaný vektorový prostor $\mathcal{W}$ jsou ekvivalentní pouze tehdy, když jednotková koule ve $\mathcal{W}$ je kompakt. To je tehdy, když $\mathcal{W}$ má konečnou dimenzi.

3. Směrová diferencovatelnost funkce

Diferencovatelnost je omezena předpokladem, že $f'(x;h)$ musí existovat pro všechny $h \in \mathcal{V}$. Tento nedostatek částečně překonává směrová diferencovatelnost. V této kapitole vycházíme z [5], [20], [21], [22].
Směrovou derivaci funkce f v bodě $x \in \mathbb{D}$ ve směru $h \in \mathcal{V}$ definujeme jako
$$f'_+(x;h) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right),$$
pokud tato limita existuje (ve $\mathcal{W}$).

Definiční obor směrové derivace označme
$$\mathbb{D}'_{x+} = \left\{ h \in \mathcal{V} \,:\, f'_+(x;h) \ \text{existuje} \right\}.$$

Lemma 3.3.: *Množina $\mathbb{D}'_{x+}$ je* **kužel**, *t.j. $\alpha h \in \mathbb{D}'_{x+}$, když $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a $h \in \mathbb{D}'_{x+}$, a funkce $f'_+(x;\,.\,)$ je* **pozitivně homogenní** *na $\mathbb{D}'_{x+}$, t.j. $f'_+(x;\alpha h) = \alpha f'_+(x;h)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{D}'_{x+}$.*

Důkaz: Stačí si pouze uvědomit, že pro $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} f'_+(x;\alpha h) &= \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(f(x+t\alpha h) - f(x)\right) = \\ &= \alpha \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}\left(f(x+sh) - f(x)\right) = \alpha f'_+(x;h) \end{aligned}$$

a

$$f'_+(x;0h) = f'_+(x;\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(f(x) - f(x)\right) = 0.$$

Q.E.D

V literatuře se používají dva typy směrové diferencovatelnosti funkce.

- Funkce f se nazývá **směrově diferencovatelná v Gâteauxově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když $f'_+(x;h)$ existuje pro každé $h \in \mathcal{V}$.
- Funkce f se nazývá **směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$, když f je směrově diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - f(x)\right) = f'_+(x;h)$$

pro všechny posloupnosti $t_n > 0$, $h_n \in \mathcal{V}$, $x + t_n h_n \in \mathbb{D}$, $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$ a $\lim_{n\to+\infty} h_n = h \in \mathcal{V}$.

Předpoklad spojitosti a linearity je vypuštěn z definice směrové diferencovatelnosti. Je tomu tak, protože směrová diferencovatelnost v Gâteauxově smyslu plus spojitost a linearita $f'_+(x;\,.\,)$ dává diferencovatelnost v Gâteauxově smyslu.
Směrová diferencovatelnost v Hadamardově smyslu implikuje spojitost směrové derivace.

Tvrzení 3.4.: *Když je funkce f směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x, pak $f'_+(x;\,.\,)$ je spojitá funkce.*

Důkaz: Označme ρ metriku metrického vektorového prostoru $\mathcal{W}$ a $h_n \in \mathcal{V}$, $h_n \to h \in \mathcal{V}$.
Funkce f je směrově diferencovatelná v bodě x, proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $0 < t_n < \frac{1}{n}$ tak, že $\rho\Big(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - f(x)\right), f'_+(x;h_n)\Big) < \frac{1}{n}$.
Ze směrové diferencovatelnosti v Hadamardově smyslu máme

$$\rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - f(x)\right), f'_+(x;h)\right) \to 0.$$

Trojúhelníková nerovnost pro metriku ρ dává odhad

$$\begin{aligned} \rho\big(f'_+(x;h_n), f'_+(x;h)\big) &\le \rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - f(x)\right), f'_+(x;h_n)\right) + \\ &+ \rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - f(x)\right), f'_+(x;h)\right). \end{aligned}$$

Tudíž

$$\rho\big(f'_+(x;h_n), f'_+(x;h)\big) \to 0.$$

Q.E.D

Když $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou normované vektorové prostory, pak můžeme využívat silnější verzi směrové diferencovatelnosti.

- Funkce f se nazývá
  směrově diferencovatelná ve Fréchetově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$, když je směrově diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0+} \sup_{\substack{h\in\mathcal{V},\|h\|=1\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) - f'_+(x;h) \right\| = 0.$$

Uvědomme si, že derivace $f'_+(x;\,.\,)$ může být nespojitá dokonce i tehdy, když funkce f je směrově diferencovatelná ve Fréchetově smyslu v bodě x. Příklad je podobný jako v předchozí kapitole. Když funkce f je pozitivně homogenní na $\mathcal{V}$, pak je směrově diferencovatelná ve Fréchetově smyslu v počátku. Dokonce $f'_+(0;h) = f(h)$ neboť $\frac{1}{t}\left(f(th)-f(0)\right) = f(h)$ pro každé $t > 0$ a $h \in \mathcal{V}$. A pozitivně homogenní funkce může být nespojitá, dokonce neměřitelná, protože může být definována na každé polopřímce $\{\alpha h : \alpha \geq 0\}$ jinak.
Tyto derivace mají užitečné ekvivalentní vyjádření.

- Funkce f je směrově diferencovatelná ve Fréchetově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$, tehdy a jen tehdy, když je směrově diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x a splňuje
$$\lim_{t\to 0+} \sup_{\substack{h\in B\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) - f'_+(x;h) \right\| = 0$$
  pro každou omezenou množinu $B \subset \mathcal{V}$.
- Funkce f je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$, tehdy a jen tehdy, když je směrově diferencovatelná v Gâteauxově smyslu v bodě x, $f'_+(x;\,.\,)$ je spojitá funkce a splňuje
$$\lim_{t\to 0+} \sup_{\substack{h\in K\\ x+th\in\mathbb{D}}} \left\| \frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) - f'_+(x;h) \right\| = 0$$
  pro každý kompakt $K \subset \mathcal{V}$.

Směrová diferencovatelnost v Hadamardově smyslu je silnější předpoklad nežli směrová diferencovatelnost ve Fréchetově smyslu, pokud jednotková koule v $\mathcal{W}$ je kompakt. To je pouze tehdy, když $\mathcal{W}$ má konečnou dimenzi. Při nekonečné dimenzi jsou tyto směrové diferencovatelnosti neporovnatelné.

4. Diferencovatelnost v Hadamardově smyslu tangenciálně k množině

Využití směrové diferencovatelnosti je omezeno předpokladem, že $f'_+(x;h)$ musí existovat pro všechny $h \in \mathcal{V}$. Tato podmínka je uvolněna v případě směrové diferencovatelnosti v Hadamardově smyslu tangenciálně k množině, např. [24], [21]. Bohužel ale její definice není v pramenech jednotná. Nabízíme proto definici, která tyto definice spojuje a zobecňuje.
Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou metrické vektorové prostory, $\mathbb{G} \subset \mathbb{D} \subset \mathcal{V}$, $\mathbb{H} \subset \mathcal{V}$ jsou množiny a $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ je funkce. Označme
$$\mathbb{T}_x(A) = \left\{ h \in \mathcal{V} : \begin{array}{c} \text{existuje posloupnost } a_n \in A, t_n > 0, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}(a_n - x) = h \end{array} \right\}$$

kontingentní (Bouligandův) kužel k množině $A \subset \mathcal{V}$ v bodě $x \in \mathcal{V}$. Kontingentní kužel může být ekvivalentně definován jako limita v Kuratowského smyslu množin $\frac{1}{t}(A - x)$, když $t \to 0+$.

- Funkce f se nazývá **<u>směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu</u>** v bodě $x \in \mathbb{D}$ **<u>tangenciálně</u>** k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$, když existuje funkce $f'_H(x, . \,; \mathbb{G}, \mathbb{H}) : \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H}) \to \mathcal{W}$ splňující

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n} \left(f(x + t_n h_n) - f(x)\right) = f'_H(x, h\,; \mathbb{G}, \mathbb{H})$$

pro všechny posloupnosti $t_n \in \mathbb{R}$, $t_n > 0$, $h_n \in \mathcal{V}$, $x + t_n h_n \in \mathbb{G}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.
(Z definice kontingentního kužele máme také $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G})$.)
- Funkce f se nazývá **<u>diferencovatelná v Hadamardově smyslu</u>** v bodě $x \in \mathbb{D}$ **<u>tangenciálně</u>** k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$, když je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$ tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ a když $\mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$ je „oboustranný kužel“ a $f'_H(x, -h\,; \mathbb{G}, \mathbb{H}) = -f'_H(x, h\,; \mathbb{G}, \mathbb{H})$ pro všechny $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.

Tato definice spojuje definice uvedené v [24] a [21]. Je dokonce obecnější, protože nepředpokládá existenci směrové derivace pro žádný směr. Když je funkce směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$, pak existence směrových derivací se stává podmínkou na množiny $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$.

Definice 4.5.: *Nechť $A \subset \mathcal{V}$, $x \in A$ a $h \in \mathcal{V}$. Budeme říkat, že trojice (x, h, A) splňuje vlastnost (P) pokud existuje $\varepsilon_h > 0$ tak, že $x + \varepsilon h \in A$ pro každé $0 < \varepsilon < \varepsilon_h$.*

Tvrzení 4.6.: *Nechť je funkce $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ a $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.*
Pak je funkce f směrově diferencovatelná v bodě x ve směru h, tehdy a jen tehdy, když trojice $(x, h, \mathbb{G})$ má vlastnost (P).
Když směrová derivace ve směru h existuje, pak $f'_+(x; h) = f'_H(x, h\,; \mathbb{G}, \mathbb{H})$.

Nyní již můžeme porovnat definici představenou na začátku této kapitoly s definicemi uvedenými v literatuře. Když $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$ a $(x, h, \mathbb{G})$ má vlastnost (P) pro každé $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G})$, pak získáme definice z [21].
Když $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ je diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{D}, \mathbb{H})$ a $(x, h, \mathbb{D})$ má vlastnost (P) pro každé $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$, pak dostaneme definici z [24].

Tvrzení 4.7.: *Když je funkce f směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$, pak $f'_H(x, . \,; \mathbb{G}, \mathbb{H})$ je spojitá funkce na $\mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.*

Důkaz: Nechť ρ je metrika prostoru $\mathcal{W}$ a $h_n \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$, $h_n \to h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.
Funkce f je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{H})$, proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $0 < t_n < \frac{1}{n}$ a $\xi_n \in \mathcal{V}$ tak, že $x + t_n \xi_n \in \mathbb{G}$, $\rho(\xi_n, h_n) < \frac{1}{n}$ a

$$\rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x + t_n \xi_n) - f(x)\right), f'_H(x, h_n\,; \mathbb{G}, \mathbb{H})\right) < \frac{1}{n}.$$

Ze směrové diferencovatelnosti v Hadamardově smyslu tangenciálně k množině dostáváme

$$\rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n\xi_n)-f(x)\right), f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})\right) \to 0.$$

Trojúhelníková nerovnost pro metriku ρ dává odhad

$$\begin{aligned}&\rho(f'_H(x,h_n\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H}), f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})) \leq \\ &\leq \rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'_H(x,h_n\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})\right) + \\ &+ \rho\left(\frac{1}{t_n}\left(f(x+t_nh_n)-f(x)\right), f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})\right)\end{aligned}$$

Tudíž

$$\rho(f'_H(x,h_n\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H}), f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})) \to 0.$$

Q.E.D

Pokud $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou normované vektorové prostory, pak můžeme využít ekvivalentní definici.

- Funkce f je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x \in \mathbb{D}$ tangenciálně k $(\mathbb{G},\mathbb{H})$ tehdy a jen tehdy, když existuje funkce $f'_H(x,\,.\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H}) : \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H}) \to \mathcal{W}$ splňující

  $$\lim_{\substack{t\to 0+\\ \varepsilon\to 0+}} \sup_{\substack{h\in K, \|\xi\|\leq\varepsilon\\ x+t(h+\xi)\in\mathbb{G}}} \left\|\frac{1}{t}\left(f(x+t(h+\xi))-f(x)\right) - f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})\right\| = 0$$

  pro každý kompakt $K \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$.

Věta 4.8. (theorem 3.9.4 in [24]**):** *Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou metrické vektorové prostory, $\mathbb{D} \subset \mathcal{V}$, $\mathbb{H} \subset \mathcal{V}$ jsou množiny a $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ je měřitelná funkce, která je diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x_o \in \mathbb{D}$ tangenciálně k $(\mathbb{D},\mathbb{H})$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$, X_n jsou náhodné veličiny s hodnotami v $\mathbb{D}$ a $\tau_n \in \mathbb{R}$, $\tau_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$.*

Když $\tau_n(X_n - x_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \xi$, kde ξ je náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{T}_{x_o}(\mathbb{H})$, pak

$$\tau_n(f(X_n) - f(x_o)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f'_H(x_o,\xi\,;\,\mathbb{D},\mathbb{H})\,.$$

Uveďme nyní příklad ilustrující sílu této delta věty. Příklad je převzat z kapitoly 3.9 v [24], kde je možno najít řadu dalších příkladů.

Empirická kvantilová funkce

Nechť X_i, $i \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné náhodné veličiny s neznámou, ale společnou, distribuční funkcí F_o. Zajímáme se o odhad kvantilu $F_o^{-1}(p)$ pro dané $p \in (0,1)$; připomeňme definici $F^{-1}(p) = \max\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$.
Budeme označovat

$$D(\overline{\mathbb{R}}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} f \text{ je zleva spojitá v každém bodě,} \\ f \text{ má zprava limitu v každém bodě,} \\ \lim_{t\to+\infty} f(t) \text{ existuje konečná,} \\ \lim_{t\to-\infty} f(t) \text{ existuje konečná.} \end{array} \right\}$$

Tato množina je opatřena Skorochodovou topologií a říká se jí Skorochodův prostor; definice a vlastnosti lze nalézt v [4] nebo v [24].

Dále označíme

$$\mathsf{DF} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ je distribuční funkce nějaké reálné n.v.}\},$$

$$\mathsf{DF}_p = \left\{ f \in \mathsf{DF} \,:\, \begin{array}{l} f \text{ je diferencovatelná v bodě } F^{-1}(p), \\ F'(F^{-1}(p)) > 0, \end{array} \right\}$$

a pro každé $F \in \mathsf{DF}$ označíme

$$\mathcal{F}_p(F) = \left\{ f \in D(\overline{\mathbb{R}}) \,:\, f \text{ je spojitá v bodě } F^{-1}(p). \right\}$$

Je známo, že empirická distribuční funkce $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[X_i<t]}$ je konzistentním odhadem distribuční funkce F_o s řádem $\sqrt{n}$, t.j.

$$F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} F_o \text{ v } D(\overline{\mathbb{R}}), \text{ a } \quad \sqrt{n}(F_n - F_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} B \circ F_o \text{ v } D(\overline{\mathbb{R}}),$$

kde $B = (B(t), t \in [0,1])$ je Brownův most.
Uvažujme funkci $\Psi : D(\overline{\mathbb{R}}) \to \overline{\mathbb{R}} : f \to \max\{t \in \mathbb{R} : f(t) \geq p\}$ a zkoumejme její diferencovatelnost. Vezměme $F \in \mathsf{DF}_p$, $h_n \in D(\overline{\mathbb{R}})$, $n \in \mathbb{N}$ a $h \in \mathcal{F}_p(F)$ takové, že $h_n \to h$ v $D(\overline{\mathbb{R}})$.
Pro $s_n \neq 0$, $s_n \to 0$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\Psi(F + s_n h_n) &= \max\{t \in \mathbb{R} : F(t) + s_n h_n(t) \geq p\} \leq \\
&\leq \max\left\{ t \in \mathbb{R} : F(t) \geq p + |s_n| \sup_{t\in\mathbb{R}} |h_n(t)| \right\}, \\
\Psi(F + s_n h_n) &= \max\{t \in \mathbb{R} : F(t) + s_n h_n(t) \geq p\} \geq \\
&\geq \max\left\{ t \in \mathbb{R} : F(t) \geq p - |s_n| \sup_{t\in\mathbb{R}} |h_n(t)| \right\}.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$F^{-1}\left(p - |s_n| \sup_{t\in\mathbb{R}} |h_n(t)| \right) \leq \Psi(F + s_n h_n) \leq F^{-1}\left(p + |s_n| \sup_{t\in\mathbb{R}} |h_n(t)| \right).$$

Kvantilová funkce má v bodě p derivaci $\frac{1}{F'(F^{-1}(p))}$, protože $F \in \mathsf{DF}_p$, a z vlastností konvergence v prostoru $D(\overline{\mathbb{R}})$ vyplývá, že $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h_n(t)| < +\infty$. Kvantilová funkce je proto v bodě p spojitá a platí

$$\lim_{s\to 0} \Psi(F + s_n h_n) = F^{-1}(p).$$

Z definice funkce Ψ dostáváme

$$F\left(\Psi(F + s_n h_n)\right) - p \leq -s_n h_n\left(\Psi(F + s_n h_n)\right),$$

$$-s_n h_n\left(\Psi(F + s_n h_n) + s_n^2\right) \leq F\left(\Psi(F + s_n h_n) + s_n^2\right) - p.$$

Odtud z konvergence $h_n \to h$ v $D(\overline{\mathbb{R}})$ a ze spojitosti funkce h v bodě $F^{-1}(p)$ dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n}\left(F\left(\Psi(F + s_n h_n)\right) - p\right) = -h\left(F^{-1}(p)\right).$$

Dále

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n}\left(\Psi(F + s_n h_n) - F^{-1}(p)\right) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\Psi(F + s_n h_n) - F^{-1}(p)}{F\left(\Psi(F + s_n h_n)\right) - p} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n}\left(F\left(\Psi(F + s_n l_n)\right) - p\right) \\
&= -\frac{h\left(F^{-1}(p)\right)}{F'(F^{-1}(p))}
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že funkce Ψ je diferencovatelná v Hadamardově smyslu v každém bodě $F \in \mathsf{DF}_p$ tangenciálně k $\big(D(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{F}_p(F)\big)$ a

$$\Psi'_H\big(F, h\,;\, D(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{F}_p(F)\big) = -\frac{h(F^{-1}(p))}{F'(F^{-1}(p))}.$$

Když $F_o \in \mathsf{DF}_p$, pak skoro všechny trajektorie procesu $B \circ F_o$ jsou spojité v bodě $F_o^{-1}(p)$ a delta věta dává

$$\sqrt{n}\left(F_n^{-1}(p) - F_o^{-1}(p)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \quad \Psi'_H\big(F_o, B \circ F_o\,;\, D(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{F}_p(F)\big) = $$

$$= -\frac{B(p)}{F'_o(F_o^{-1}(p))}.$$

Věta 4.9. (theorem 6.3.2 in [21]): *Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou Banachovy prostory, $\mathbb{G} \subset \mathcal{V}$ je množina a $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je měřitelná funkce, která je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě $x_o \in \mathbb{D}$ tangenciálně k $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$, X_n jsou náhodné veličiny s hodnotami v $\mathcal{V}$ a $\tau_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$.*

Když $\mathsf{P}(X_n \in \mathbb{G}) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké a $\tau_n(X_n - x_o) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \xi$, kde nosič n.v. ξ je separabilní množina v $\mathcal{V}$, pak

$$\mathsf{P}(\xi \in \mathbb{T}_{x_o}(\mathbb{G})) = 1 \quad a \quad \tau_n(f(X_n) - f(x_o)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f'_H(x_o, \xi\,;\, \mathbb{G}, \mathbb{G})\,.$$

5. Diniho derivační čísla

V této kapitole uvažujeme funkci $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{V}$ je metrický vektorový prostor. Využitím uspořádání na reálných číslech můžeme definovat Diniho derivační čísla; viz [6], [7].

- **Diniho derivační čísla** pro funkci f definujeme jako

$$f^{\uparrow}(x; h) = \limsup_{t\to 2+} \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right),$$

$$f^{\downarrow}(x; h) = \liminf_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right).$$

- Pro funkci f definujeme **směrovou derivaci v Clarkově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$ ve směru $h \in \mathcal{V}$ jako

$$f^{o}(x; h) = \limsup_{t\to 0+,\, z\to x} \frac{1}{t}\left(f(z+th) - f(z)\right).$$

- Pro funkci f definujeme **směrovou derivaci v Michelově-Penotově smyslu** v bodě $x \in \mathbb{D}$ ve směru $h \in \mathcal{V}$ jako

$$f^{\diamond}(x; h) = \sup_{u\in\mathcal{V}} \limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(f(z+th+tu) - f(z+tu)\right).$$

Poznamenejme, že pro limity připouštíme i hodnotu $+\infty$ a $-\infty$ a tak uvedené derivace existují vždy. Navíc jsou splněny nerovnosti

$$f^{\downarrow}(x; h) \le f^{\uparrow}(x; h) \le f^{o}(x; h) \le f^{\diamond}(x; h)\,.$$

Dokonce $f^{o}(x;\,.\,)$ a $f^{\diamond}(x;\,.\,)$ jsou sublineární funkce. Bohužel, sublinearita může být porušena pro $f^{\uparrow}(x;\,.\,)$.

6. Kontingentní derivace množinové funkce

Další problémy se objeví, když f je víceznačné zobrazení. Takové případy vznikají velmi přirozenou cestou, například při řešení optimalizačních úloh.

Uvažujme optimalizační úlohu $\varphi(x) = \max\{f(u;x) : u \in \mathcal{U}_x\}$, která závisí na parametru $x \in \mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je metrický vektorový prostor. Zajímáme se o optimální hodnotu $\varphi(x)$ a, možná ještě více, o strategii, která přináší optimální zisk nebo téměř optimální zisk. Tudíž se zajímáme o množinu všech optimálních řešení úlohy $\psi(x) = \{u \in \mathcal{U}_x : f(u;x) = \varphi(x)\}$ případně o množinu všech ε-optimálních řešení úlohy $\psi(x;\varepsilon) = \{u \in \mathcal{U}_x : f(u;x) \geq \varphi(x) - \varepsilon\}$, kde $\varepsilon > 0$. Funkce ψ a $\psi(\,.\,;\varepsilon)$ mohou být a často také jsou mnohoznačné. Abychom se mohli zabývat spojitostí a diferencovatelností těchto zobrazení, musíme předpokládat, že množiny přípustných řešení $\mathcal{U}_x$, $x \in \mathcal{X}$, jsou podmnožinami nějakého metrického vektorového prostoru $\mathcal{U}$. Například, $\mathcal{X}$ může být metrický vektorový prostor měr obsahující všechna možná rozdělení pravděpodobnosti neznámých náhodných vstupů a $\mathcal{U}$ je metrický vektorový prostor měr, který obsahuje všechna možná rozdělení pravděpodobnosti řízených vstupů.

Pro účely zobecnění delta věty, potřebujeme zobecnění směrové derivace v Hadamardově smyslu tangenciální k množině. Naše potřeby uspokojí kontingentní derivace; její definici a vlastnosti lze nalézt např. v [1], [11], [14], [15].

Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou metrické vektorové prostory, $f : \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{W}}$ je množinová funkce, $x \in \mathcal{V}$ a $y \in \mathcal{W}$.

- **<u>Kontingentní derivaci</u>** množinové funkce f v bodě (x,y) definujeme jako množinovou funkci $\nabla f(x,y;\,.\,) : \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{W}}$ s vlastností:
$$z \in \nabla f(x,y;h) \Longleftrightarrow (0,h,z) \in \mathsf{clo}(\mathsf{D}f(x,y))\,.$$
Kde $\mathsf{D}f(x,y) = \{(t,h,z) : t > 0, h \in \mathcal{V}, y + tz \in f(x+th)\}$ a uzávěr je uvažován v součinové topologii $\lambda \otimes \tau \otimes \omega$. Symbol λ označuje přirozenou topologii na $\mathbb{R}$, τ topologii na $\mathcal{V}$ a ω topologii na $\mathcal{W}$.

Kontingentní derivace je zobecněním směrové diferencovatelnosti v Hadamardově smyslu tangenciálně k množině.

Tvrzení 6.10.: *Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou metrické vektorové prostory, $\mathbb{G} \subset \mathbb{D} \subset \mathcal{V}$, $\mathbb{H} \subset \mathcal{V}$ a $x \in \mathbb{D}$. Nechť funkce $f : \mathbb{D} \to \mathcal{W}$ je směrově diferencovatelná v Hadamardově smyslu v bodě x tangenciálně k $(\mathbb{G},\mathbb{H})$.*
Definujme množinovou funkci $F : \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{W}}$ tak, že $F(v) = \{f(v)\}$, když $v \in \mathbb{G}$ a $F(v) = \emptyset$ když $v \notin \mathbb{G}$.
Když $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$, pak $\nabla F(x,f(x);h) = \{f'_H(x,h\,;\,\mathbb{G},\mathbb{H})\}$ a $\nabla F(x,y;h) = \emptyset$, jestliže $y \neq f(x)$.
Když $h \notin \mathbb{T}_x(\mathbb{G})$ a $y \in \mathcal{W}$, pak $\nabla F(x,y;h) = \emptyset$.

Důkaz: Pro $y \in \mathcal{W}$ máme
$$\mathsf{D}F(x,y) = \left\{\left(t,h,\frac{1}{t}\left(f(x+th) - y\right)\right) : t > 0, h \in \mathcal{V}, x + th \in \mathbb{G}\right\}$$
a odtud pro $h \in \mathcal{V}$, $z \in \mathcal{W}$,
$$\begin{aligned} z \in \nabla F(x,y;h) \quad &\Longleftrightarrow \quad (0,h,z) \in \mathsf{clo}(\mathsf{D}F(x,y)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{existují posloupnosti } t_n > 0, h_n \in \mathcal{V}, \\ x + t_n h_n \in \mathbb{G}, \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h \\ \text{tak, že } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\left(f(x+t_n h_n) - y\right) = z. \end{array}\right) \end{aligned}$$

Z předpokládané diferencovatelnosti funkce f plyne, že když $h \in \mathbb{T}_x(\mathbb{G}) \cap \mathbb{T}_x(\mathbb{H})$, pak $\nabla F(x, f(x); h) = \{f'_H(x, h\,; \mathbb{G}, \mathbb{H})\}$ a $\nabla F(x, y; h) = \emptyset$, když $y \neq f(x)$. Když $h \notin \mathbb{T}_x(\mathbb{G})$, pak neexistuje žádný bod $(0, h, z) \in \mathsf{clo}(\mathsf{D}f(x, y))$ a proto $\nabla F(x, y; h) = \emptyset$ pro všechny $y \in \mathcal{W}$.

Q.E.D

První verze delta věty, která připouštěla množinové funkce se objevila v článku [11]. Věta 3.2 v [11] předpokládá, že $\mathcal{V}$ je separabilní Fréchetův prostor, t.j. separabilní úplný metrický vektorový prostor, $\mathcal{W}$ je konečně dimenzionální normovaný vektorový prostor a množinová funkce nesmí přiřazovat prázdnou množinu. Věta 4.3 v [11] zesiluje tvrzení předchozího tvrzení samozřejmě za silnějších předpokladů: $\mathcal{V}$ je Banachův prostor, $\mathcal{W}$ je konečně dimenzionální Euklidovský prostor, množinová funkce nesmí přiřazovat prázdnou množinu a její kontingentní derivace je s.j. funkce.
Použitím výsledku z článku [23], se nám podařilo odstranit předpoklad, že kontingentní derivace je s.j. funkce a v článku [14] prezentujeme verzi delta věty vyžadující, aby $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ byly separabilní Fréchetovy prostory. Následně v [15], jsme tento výsledek rozšířili pro Hausdorffovy topologické vektorové prostory. Ale stále nesmí množinová funkce přiřazovat prázdnou množinu. V současnosti jsme dosáhli dalšího zobecnění, které je prezentováno v preprintu [17]. Tato verze delta věty předpokládá Hausdorffovy topologické vektorové prostory, řád konzistence τ_α může být náhodný, množinová funkce již může přiřazovat prázdnou množinu a řády konzistence po a před transformací se mohou lišit.

Literatura

[1] Aubin J. -P., Frankowska H.: *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] Averbukh V. I., Smolyanov O. G.: The theory of directional differentiation in linear topological spaces. *Russian Mathematical Survey* **22,6** (1967), 201-258.

[3] Averbukh V. I., Smolyanov O. G.: The various definitions of derivative in linear topological spaces. *Russian Mathematical Survey* **23,4**(1968), 67-113.

[4] Billingsley P. *Convergence of Probability Measures* John Wiley & Sons, New York, 1968.

[5] Bonnans J. F., Shapiro A.: *Perturbation Analysis of Optimization Problems.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[6] Borwein J. M., Lewis A. S.: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] Clark F. H.: *Optimization and nonsmooth analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1983.

[8] Deimling K.: *Nonlinear functional analysis.* Springer, Berlin, 1985.

[9] Dentcheva D., Römisch W.: *Differential stability of two-stage stochastic programs.* Humboldt-Universität zu Berlin Preprint Nr.96-36, 1996.

[10] Dupačová J., Wets R. J. -B.: Asymptotic behavior of statistical estimators and of optimal solutions of stochastic problems. *Ann. Statist.* **16**(1988), 1517-1549.

[11] King A. J.: Generalized delta theorems for multivalued mappings and measurable selections. *Math. Oper. Res.* **14,4**(1989), 720-736.

[12] King A. J.: *Asymptotic behaviour of solutions in stochastic optimization: nonsmooth analysis and the derivation of non-normal limit distributions.* PhD thesis at the University of Washington, 1986.

[13] King A. J., Wets R. J. -B.: Epi-consistency of convex stochastic programs. *Stochastics and Stochastics Reports* **34** (1991), 83-92.

[14] Lachout P.: On multifunction transforms of probability measures. *Ann. Oper. Res.* **56**(1995), 241-249.

[15] Lachout P.: A general version of delta theorem. *Acta Univ. Carolinae Math. et Phys.* **35**(1994), 51-57.

[16] Lachout P.: Periodic transformations of the sample average reciprocal value. *Kybernetika* **32,5**(1996), 511-520.

[17] Lachout P.: Delta Theorem in Hausdorff topological vector spaces. Preprit No. 03 of the Charles University of Prague, 2000.

[18] Mann H. B., Wald A.: On stochastic limit and order relationships. *Ann. Math. Stat.* **14**(1943), 217-226.

[19] Römisch W., . Schultz R.: Lipschitz stability for stochastic programs with complete recourse. *SIAM J. Optimization* **6,2**(1996), 531-547.

[20] Rockafellar R. T.: Directional differentiability of the optimal value function in a nonlinear programming problem. *Mathematical Programming Study* **21**(1984), 213-226.

[21] Rubinstein R.Y., Shapiro A.: *Discrete Event Systems: Sensitivity Analysis and Stochastic Optimization by the Score Function Method.* John Wiley & Sons, Chichester, 1993.

[22] Shapiro A.: On concepts of directional differentiability. Research Report No. 73/88(18) of the University of South Africa, Pretoria, 1993.

[23] Topsøe F.: Measurable spaces connected by correspondence. Math. Scand. **30**(1972), 5–45.

[24] van der Vaart A. W., Wellner J. A.: *Weak Convergence and Empirical Processes.* Springer, New York, 1996.

Department of Probability Theory and Statistics, Charles University, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic and

Institute of Information Theory and Automation, Czech Academy of Sciences, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8, Czech Republic

E-mail: `lachout@karlin.mff.cuni.cz`