ROBUST'2002, 159 – 162

ANALÝZA OBRAZŮ S GAUSSOVSKÝM ŠUMEM

JIŘÍ JANÁČEK

Abstract. An effect of noise on image analysis mesurements of area, perimeter and Euler characteristic is estimated using geometry of Gaussian random fields.
Résumé. Un effet du rapport signal/bruit sur détermination de la surface, du diametre et du nombre de connexité á partir d'analyse automatique d'images est estimé en utilisant géométrie des champes aléatoires Gaussiennes.

1. Úvod

Reálné obrazy používané k měření pomocí automatické analýzy obrazu mohou být zkresleny přítomností šumu a vlivem omezené rozlišovací schopnosti snímací soustavy. Cílem této studie je odvodit vztahy pro vliv šumu a Gaussovského filtru na měření základních geometrických charakteristik objektů.

Úvodem budou shrnuty potřebné vlastnosti obecných geometrických charakteristik, Minkowského funkcionálů. Vliv šumu a filtrace bude demonstrován simulací, odhadnut pomocí geometrie stacionárních Gaussovských polí [6] a původního výsledku, týkajícího se nestacionárních Gaussovských polí.

2. Minkowského funkcionály

Označme κ_n objem jednotkové koule:

$$\kappa_n = \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma^{-1} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

Minkovského funkcionál [4], [5] můžeme definovat pro konvexní množinu C v R^d jako střední hodnotu projekce přes všechny možné směry projekce:

$$V_j(C) = \frac{d! \kappa_d}{j! \kappa_j (d-j)! \kappa_{d-j}} \int_{G_{dj}} \lambda^j (PC) \, dP$$

Pro množinu C s dostatečně hladkou hranicí lze definovat Minkovského funkcionál jako plošný integrál symetrické funkce hlavních křivostí:

$$V_j(C) = \frac{1}{(d-j) \kappa_{d-j}} \int_{\partial C} \sum_{i_1 < \ldots < i_{d-j-1}} r_{i_1}^{-1} \ldots r_{i_{d-j-1}}^{-1} dS$$

j-tý Minkowského funkcionál je j-homogenní, aditivní, pohybově invariantní a je normovaný tak, aby platily následující vztahy k Lebesgueove míře λ, Hausdorffově míře H^j (ta je definována pouze pro j-rozměrné variety) a k Eulerově charakteristice χ:

$$V_d = \lambda^d, \quad V_{d-1}(C) = \tfrac{1}{2} H^{d-1}(\partial C), \quad V_1 = \tfrac{1}{2} H^1, \quad V_0 = \chi$$

Platí následující, tzv. kinematický vztah:

2000 *Mathematics Subject Classification.* 62M40.
Klíčová slova. Náhodná pole, analýza obrazu, Minkowského funkcionály.
Autor děkuje za podporu GA ČR (projekty 304/01/0257 a 304/00/1622).

$$\int_{SO_d}\int_{R^d} V_j\left(C\cap T\left(D+x\right)\right)dxdT=\sum_{k=j}^{d} c_{djk}V_k\left(C\right)V_{d+j-k}\left(D\right)$$

s koeficienty:

$$c_{djk}=\tfrac{d_k^d d_{d+j-k}^d}{d_j^d},\quad d_n^d=\tfrac{\kappa_n n!}{\kappa_d d!}$$

Pro průnik s nadrovinou dimenze k platí Croftonova formule:

$$\int_{G_{dk}}\int_{L^\top} V_j\left(C\cap\left(L+x\right)\right)dxdL=c_{djk}V_k\left(C\right)$$

V rovině ($d=2$) platí speciálně $c_{201}=\frac{2}{\pi}$, $c_{2jk}=1$ jinak, $V_2=S$ je plocha, $V_1=\frac{P}{2}$ je polovina obvodu.

3. Simulace

Do osmibitového šedotónového obrázku o rozměrech 150^2 pixelů byl nakreslen kruh o poloměru 50, obrázek byl vyhlazen Gaussovským filtrem o šířce pásma $\rho_0=\sqrt{50\frac{2}{3}}\cong 5.77$, byl přidán aditivní nekorelovaný šum s normálním rozložením, nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou σ_0a výsledný obrázek byl znovu vyhlazen Gaussovským filtrem o šířce pásma $\rho=\sqrt{2\frac{2}{3}}\cong 1.15$. Prahováním na hodnotu 127.5 byl vytvořen binární obraz a byla změřena plocha, obvod a Eulerova charakteristika popředí standardními metodami analýzy obrazu [3], v tabulce jsou uvedeny hodnoty průměrů ze 100 opakování:

σ_0	S_{sim}	P_{sim}	χ_{sim}
0	1852	152	1
50	1865	164.7	1
100	1866	206.8	1.3
150	1878	283.4	4.4
200	1974	506	30.4
250	2222	972	84.9
300	2603	1582	142.3

Stojí za povšimnutí, že hodnoty obvodu narůstají plynule už od malých intenzit šumu, na rozdíl od hodnot plochy a Eulerovy charakteristiky.

4. Stacionární Gaussovské pole

Vyhlazením nekorelovaného Gaussovského šumu o směrodatné odchylce σ_0 Gaussovským filtrem s jádrem:

$$K\left(x\right)=\left(2\pi\rho^2\right)^{-\frac{d}{2}}\exp-\frac{\left|x\right|^2}{2\rho^2}$$

dostaneme hladké Gaussovské pole X s Gaussovskou kovarianční funkcí R [6]:

$$X\left(x\right)\sim N\left(\mu,\sigma\right),\quad R\left(x\right)=\exp-\tfrac{\left|\lambda x\right|^2}{2}$$

což budeme značit $X\sim GG\left(\mu,\sigma,\lambda\right)$. Pro parametry platí:

$$\lambda = \tfrac{1}{\sqrt{2}\rho}, \quad \sigma \cong \left(2\sqrt{\pi}\rho\right)^{-\frac{d}{2}} \sigma_0$$

Nechť V_j' je střední hodnota hustoty j-tého Minkowského funkcionálu množiny, na níž náhodné pole překračuje úroveň u: $U(u) = \{x | X(x) \geq u\}$, definovaná jako:

$$V_j' = \lim_{r \to \infty} \frac{EV_j\left(B_{0r} \cap U(u)\right)}{V_d\left(B_{0r}\right)}$$

Pak podle [6]:

$$V_{d-j}'(u) = c_{d0j}^{-1} \lambda^j (2\pi)^{-\frac{j+1}{2}} H_{j-1}\left(\tfrac{u-\mu}{\sigma}\right), \quad H_n(t) = (-1)^n \tfrac{\delta^n \exp - \frac{t^2}{2}}{\delta t^n}$$

a podle kinematického vztahu platí pro izotropickou množinu $U(u)$:

$$EV_j\left(U(u) \cap M\right) = \sum_{k=j}^{d} c_{djk} V_{d+j-k}(M) V_k'(u)$$

Nechť c je kontrast obrázku, C měřený objekt, W plocha obrázku, pak střední hodnota j-tého Minkowského funkcionálu množiny bodů v obrázku, na níž intenzita šedi přesahuje hodnotu $\frac{c}{2}$ je (z aditivity Minkowského funkcionálů):

$$EV_j\left(U\left(-\frac{c}{2}\right) \cap C\right) + EV_j\left(U\left(\frac{c}{2}\right) \cap (W \setminus C)\right) - EV_j\left(U\left(\frac{c}{2}\right) \cap \delta C\right)$$

σ_0	S_{st}	P_{st}	χ_{st}
0	1852	152.0	1.0
50	1852	152.0	1.0
100	1852	152.0	1.0
150	1857	168.3	4.7
200	1937	382.2	41.0
250	2198	937.0	110.8
300	2622	1681.2	180.4

Výsledek dobře popisuje chování hodnot plochy a Eulerovy charakteristiky, pro lepší popis chování hodnot obvodu při malých hodnotách šumu bude zřejmě nutné modelovat nestacionární chování šumu na pozvolných hranách měřeného objektu.

5. Nestacionární Gaussovské pole

Nejjednodušším případem nestacionarity je linearní funkce na přímce: $\alpha x + \beta$.

Označme $\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\lambda\sigma}$, pak lze elementárními prostředky, podobně jako v [1], dokázat pro hustotu počtu průsečíků Gaussovského pole $X \sim GG(\mu, \sigma, \lambda)$ a funkce $\alpha x + \beta$ na úrovni u:

$$\begin{aligned} E\tfrac{\partial n_1(u,\alpha)}{\partial x} &= \tfrac{\lambda}{\pi} \exp\left(-\tfrac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(\exp -\tau^2 + 2\tau \textstyle\int_0^\tau \exp -t^2 dt\right) = \\ &= \tfrac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\tfrac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \textstyle\int_\tau^\infty t^{-2} \exp -t^2 dt\right) \end{aligned}$$

Odtud ihned plyne střední hodnota počtu průsečíků Gaussovského pole $X \sim GG(\mu, \sigma, \lambda)$ a funkce $\alpha x + \beta$ je:

$$En_1(\alpha) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{2\lambda^2\sigma^2}\right)$$

kde Γ je neúplná gamma funkce.

Pro střední počet průsečíků náhodně orientované přímky s hranou o strmosti α v rovině platí:

$$En_2(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} En_1(\alpha\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi$$

podobně v prostoru:

$$En_3(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} En_1(\alpha\cos\varphi)\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

Pro náš dvourozměrný případ a strmost hrany $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_0}$ aplikací Croftonovy formule dostaneme:

σ_0	S_{nst}
50	167.3
100	216.0
150	283.2

Výsledek dobře popisuje chování hodnot obvodu při malých hodnotách šumu.

6. Diskuse

Uvedené vztahy dobře aproximují vliv šumu a Gaussovského filtru na měření základních geometrických chrakteristik objektů pro účel odhadu chyby 2D a 3D analýzy obrazu. Při popisu chování chyby většiny charakteristik vystačíme se stacionární teorií popsanou v [6], pro odhad chyby $d-1$-ního Minkowského funkcionálu potřebujeme nestacionární teorii Gaussovských polí, případně výše odvozené lineární přiblížení.

Literatura

[1] Anděl J. (1976): Statistická analýza časových řad. SNTL.
[2] Kellerer H.G. (1984): Minkowski functionals of Poisson processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 67, 63-84.
[3] Serra J. (1982): Image analysis and mathematical morphology, Academic Press, London.
[4] Saxl I. (1989): Stereology of objects with internal structure. Academia.
[5] Weil W. (1989): Integral geometry, stochastic geometry and stereology. Acta Stereologica 8, 65-76.
[6] Worsley K.J. (1995): Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images. Annals of Statistics, 23, 640-669.

FgÚ AV ČR, Vídeňská 1083, Praha 4