ROBUST'2002, 117 – 125 

# PITMANOVO POROVNÁNÍ ODHADŮ

MICHAL FRIESL, JIŘÍ REIF

ABSTRACT. The paper deals with the Pitman closeness criterion for a comparison of estimators. First, some general properties of the Pitman closeness and its Bayesian version are recalled. Then, under this criterion, for a normal linear model the least square estimator is compared with the restricted model estimator and with pre-test estimators.

Резюме.Авторы занимаются альтернативным критерием для сравнения оценивателей, касаются некоторых свойств близости Питмана и его байесовской аналогии. В нормальной линейной модели сравнивается оцениватель методом найменьших квадратов с оценивателем из подмодели и пре-тест оценивателем.

## 1. Úvod

Práce Reif a Vlček (v tisku), jejíž závěry byly prezentovány na minulém Robustu, se zabývá optimálními pre-test odhady v regresi, přičemž odhady byly porovnávány z hlediska střední čtvercové chyby (MSE). V tomto příspěvku porovnáme odhady regresních parametrů metodou nejmenších čtverců z úplného modelu s analogickým odhadem z chudšího modelu a s pre-test odhadem pomocí Pitmanova kritéria.

Při odhadování parametru hledáme obvykle odhad, který je z nějakého hlediska nejlepší. Pitman (1937) navrhl ze dvou odhadů $\delta_1$ a $\delta_2$ reálného parametru $\theta$ považovat za lepší ten, který pravděpodobně bude ležet blíže k odhadovanému parametru. Definoval, že $\delta_1$ je bližší (closer) odhad $\theta$ než $\delta_2$, když

$$\mathrm{P}_\theta(|\delta_1-\theta|<|\delta_2-\theta|)>1/2 \qquad \text{pro všechna } \theta. \tag{1.1}$$

Číslo uvedené na levé straně nerovnosti (1.1) se přitom někdy (poněkud vágně) nazývá Pitmanovou mírou blízkosti (Pitman's closeness/nearness measure). Tímto kritériem nestanovujeme měřítko pro kvalitu jednotlivých odhadů (jako je např. měřítko MSE), ale porovnáváme dvojice odhadů. V knize Keating, Mason a Sen (1993) je uvedena řada příkladů, ve kterých má Pitmanovo porovnání smysluplnější význam než porovnání založené na MSE. Je např. zřejmé, že ve srovnání s kritériem MSE klade Pitmanovo porovnání menší důraz na velké odchylky vyskytující se s malou pravděpodobností a nevyžaduje existenci momentů odhadů.

Kritérium (1.1) je možná příliš přísné. Pro některé hodnoty $\theta$ bychom mohli připustit i rovnost s $1/2$ a ostrou nerovnost mezi vzdálenostmi nahradit neostrou, zvláště hodláme-li navzájem porovnávat odhady, které se při mnohých pozorováních mohou shodovat (příkladem jsou tzv. pre-test odhady, viz níže). Používají se proto různé varianty porovnávající pravděpodobnost z (1.1) s pravděpodobností, že nastane opačná nerovnost. Např. Saleh a Sen (1991), Nayak (1998) aj. užívají následující definici.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 62J05 62F12 62F15.

*Klíčová slova.* Pitmanova míra blízkosti, lineární regrese, pre-test odhad.

Tato práce vznikla za podpory výzkumného záměru MSM 235200001.

**Definice 1.1.** *Řekneme, že $\delta_1$ je bližší odhad $\theta$ než $\delta_2$, když*

$$\mathrm{P}_\theta(|\delta_1-\theta|<|\delta_2-\theta|) \geqq \mathrm{P}_\theta(|\delta_1-\theta|>|\delta_2-\theta|) \quad \textit{pro vš. } \theta \tag{1.2}$$

*s ostrou nerovností alespoň pro jedno $\theta$. Rozdíl pravděpodobností v* (1.2)

$$\mathrm{PC}_\theta(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{P}_\theta(|\delta_1-\theta|<|\delta_2-\theta|)-\mathrm{P}_\theta(|\delta_1-\theta|>|\delta_2-\theta|) \tag{1.3}$$

*nazveme opravenou Pitmanovou mírou blízkosti.*

Různí autoři odvozují tvrzení o tzv. nejbližších odhadech, ale obvykle tento pojem nedefinují a rovněž my přenecháme tento krok čtenáři. Místo absolutní hodnoty, tj. místo ztrátové funkce $L(\delta,\theta)=|\delta-\theta|$, lze použít i jinou ztrátovou funkci. Pitmanova míra však zřejmě vyjde stejně pro všechny ztrátové funkce, které jsou rostoucí funkcí vzdálenosti mezi $\delta$ a $\theta$. V případě, že nevíme, s jakou ztrátovou funkcí počítat, tuto vlastnost oceníme.

Dokladem obnoveného zájmu o toto kritérium je, kromě řady dalších článků, speciální číslo časopisu Communications in Statistics [3], které bylo celé tomuto kritériu věnováno a obsahuje též reedici článku Pitman (1937). Pitmanovým porovnáním odhadů se zabývá také monografie Keating, Mason a Sen (1993) a od jejího vydání vyšlo více než 50 prací, které Pitmanovo kritérium studují nebo ho používají. O některých známých vlastnostech tohoto kritéria se zmíníme v částech 2 a 3 tohoto příspěvku, část 4 bude věnována našim výsledkům při porovnání odhadů v regresi.

## 2. Některé vlastnosti

Přirozenou otázkou je, jak hledat nejbližší odhad, tj. odhad, který bude bližší než ostatní. Při tomto hledání se musíme omezit jen na určitou třídu odhadů (např. na odhady invariantní vůči posunutí, změně měřítka nebo jiným transformacím), protože mezi všemi odhady je nejbližším jen správná hodnota parametru. Pitman (1937) např. uvažoval, že nejbližší odhad (ve smyslu (1.1)) bude funkcí postačující statistiky $T$, její medián označme $\psi(\theta)=\operatorname{med}_\theta T$. Je-li $\psi(\theta)$ monotónní, pak

$$\operatorname{med}_\theta \psi^{-1}(T)=\theta.$$

V důsledku intuitivní představy, že medián je „nejlepší předpovědí" (co do blízkosti) pro budoucí hodnotu statistiky, se $T_1=\psi^{-1}(T)$ stává kandidátem na nejbližší odhad $\theta$. Příznivé vlastnosti odhadu, jehož mediánem je odhadovaný parametr, prokázal Pitman za pomoci následujícího tvrzení.

**Tvrzení 2.1.** *Jsou-li $T_1$ a $T_2$ spojitě rozdělené veličiny, $T_1$ s mediánem $\theta$, a existuje-li veličina $Z$ (buď kladná, nebo záporná) taková, že $T_1$ a $Z(T_2-T_1)$ jsou nezávislé, pak $T_1$ je bližším odhadem $\theta$ než $T_2$.*

Předpoklady tohoto tvrzení lze zeslabit; k platnosti závěru tvrzení stačí, aby byly nezávislé jevy $[T_1>\theta]$ a $[T_1<T_2]$, resp. $[T_1<\theta]$ a $[T_1>T_2]$.

Pro problémy nejbližšího invariantního odhadu parametru měřítka, resp. polohy, se hodí použít uvedené tvrzení se $Z=1/T_1$ (předpoklad pak znamená nezávislost $T_1$ a $T_2/T_1$), resp. se $Z=1$ ($T_1$ a $T_2-T_1$ nezávislé). Pitman (1937) ukazuje aplikaci Tvrzení 2.1 na příkladu normálního, gama, exponenciálního či rovnoměrného rozdělení.

Mějme např. náhodný výběr $X_1,\dots,X_n$ z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ a odhadujme rozptyl $\sigma^2$ při neznámé střední hodnotě $\mu$. Postačující statistika

$$T_1=(n-1)s^2/\operatorname{med}\chi^2_{n-1},$$

kde $s^2$ je výběrový rozptyl, má medián $\sigma^2$. Každý jiný odhad $T_2$ invariantní vzhledem ke změně měřítka a polohy (tudíž s podílem $T_2/T_1$ nezávislým s $T_1$) je horší. Při známé střední hodnotě $\mu$ je takovým nejbližším odhadem $\sum_i (X_i - \mu)^2 / \operatorname{med} \chi^2_n$. Pokud jde o odhad střední hodnoty z $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$, postačující statistika $T_1 = \overline{X}$ má medián $\mu$ a každý jiný odhad $T_2$ invariantní vůči posunutí (tudíž $T_2 - T_1$ nezávislé s $T_1$) je horší, podobně při neznámém rozptylu.

Pochází-li výběr z gama rozdělení $\mathrm{G}(1/\theta, m)$ se známým $m$, je nejbližším odhadem $\theta$ invariantním vůči změně měřítka

$$\widehat{\theta} = 2 \sum X_i / \operatorname{med} \chi^2_{2nm}.$$

Pro výběr z $\mathrm{Exp}(a, 1/\theta)$ uvádí Pitman (1937) odhady

$$\widehat{\theta} = 2 \sum (X_i - X_{(1)}) / \operatorname{med} \chi^2_{2n-2} \quad \text{a} \quad \widehat{a} = X_{(1)} - (2^{1/(n-1)} - 1) \sum (X_i - X_{(1)})/n,$$

pro rovnoměrné rozdělení $\mathrm{Ro}(a - \theta/2, a + \theta/2)$ odhady

$$\widehat{a} = (X_{(1)} + X_{(n)})/2, \qquad \widehat{\theta} = (X_{(n)} - X_{(1)})/m,$$

kde $m$ je řešením rovnice $nm^{n-1} - (n-1)m^n = 1/2$.

Řada tvrzení byla později odvozena pro mediánově nestranné odhady. Připomeňme, že $T$ se nazývá mediánově nestranný odhad $\theta$, když $\mathrm{P}_\theta(T \leqq \theta) = \mathrm{P}_\theta(T \geqq \theta)$. Ghosh a Sen (1989) modifikují Pitmanovu definici (1.1) tak, že obě nerovnosti uvažují neostré, a dokazují následující tvrzení.

**Tvrzení 2.2.** *Mediánově nestranný odhad $T_1$ je bližším odhadem $\theta$ než odhady tvaru $T_2 = T_1 + Z$, kde $T_1$ a $Z$ jsou nezávislé.*

Pomocí předchozího tvrzení Ghosh a Sen podobně jako Pitman odvozují nejbližší odhady (ve třídě odhadů invariantních vůči příslušným transformacím) pro parametry polohy a pomocí obdobného tvrzení také pro parametry měřítka.

Vyjádřením odhadů pro parametry polohy a měřítka se věnuje též Nayak (1990) používající Definici 1.1. Například:

**Tvrzení 2.3.** *Nejbližším invariantním odhadem parametru polohy $\theta \in \mathbf{R}$ z pozorování $(X_1, \ldots, X_n)$ s hustotou $f(x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta)$ při libovolné ztrátové funkci, která jakožto funkce rozdílu $\delta - \theta$ nejprve klesá k hodnotě 0 pro $\delta - \theta = 0$, a pak roste, je odhad*

$$X_n - \operatorname{med}_{\theta=0}(X_n \mid X_1 - X_n, \ldots, X_{n-1} - X_n).$$

V práci Nayak (1998) následují tvary odhadů pro elipticky symetrické hustoty.

**Tvrzení 2.4.** *Má-li $(X_1, \ldots, X_n)$ elipticky symetrickou hustotu*

$$f(x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta) = h((x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta)' B (x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta)),$$

*pak nejbližším invariantním odhadem $\theta$ při ztrátové funkci z Tvrzení 2.3 je*

$$\sum_i \left( X_i \sum_j b_{ij} \right) / \sum_{ij} b_{ij},$$

*kde $b_{ij}$ jsou prvky matice $B$.*

Obdobná tvrzení uvádí Nayak též pro vícerozměrný parametr.

Pitmanův způsob porovnání odhadů má některé nepříznivé vlastnosti, jednou z nich je jeho netranzitivita. Odhad $\delta_1$ může být bližší než $\delta_2$, $\delta_2$ bližší než $\delta_3$, a přitom $\delta_3$ bližší než $\delta_1$. Např. při odhadu $\theta$ z $X \sim \mathrm{Ro}(-0{,}9\theta; 1{,}1\theta)$ je $X$ bližší než

$0,9|X|$, dále $0,9|X|$ je bližší než $3,2|X|$ a ten je bližší než $X$. Pokud nám však jde o nejbližší odhad a nacházíme ho, nemusí nás tolik zajímat, jak se mezi sebou seřadí poražené odhady.

Výsledek Pitmanova porovnání je určen sdruženým rozdělením dvojic odhadů. Může se stát, že dva odhady mají stejné (marginální) rozdělení a přesto jeden je bližší než druhý. Např. pro $X_1, X_2$ nezávislé se stejným Cauchyovým rozdělením má průměr $(X_1+X_2)/2$ opět totéž Cauchyovo rozdělení a je bližším odhadem parametru polohy než $X_1$ (OPNayak (1998) navíc ukázal, že při náhodném výběru $X_1, X_2$ z rozdělení s hustotou symetrickou kolem odhadovaného parametru polohy je $(X_1 + X_2)/2$ nejbližším invariantním odhadem).

## 3. Bayesovský přístup ke kritériu

Nepříznivým vlastnostem Pitmanova porovnání se lze vyhnout použitím bayesovského přístupu k tomuto kritériu, který navrhli Ghosh a Sen (1991). Ti pro reálný parametr $\theta$ předpokládali apriorní rozdělení $\pi(\theta)$ a definovali prostřednictvím aposteriorního rozdělení, že odhad $\delta_1$ je aposteriorně bližším (posterior Pitman closer) odhadem $\theta$ než odhad $\delta_2$, pokud

$$\mathrm{P}(|\delta_1 - \theta| \leqq |\delta_2 - \theta| \mid X) \geqq 1/2 \qquad \text{pro všechna } X \tag{3.1}$$

a pro některé $X$ je tato pravděpodobnost větší než $1/2$. Ukázali, že je-li $\delta_1$ medián aposteriorního rozdělení, $\delta_1 = \mathrm{med}(\theta \mid X)$, pak pro libovolný odhad $\delta_2$ platí (3.1). Jsou-li aposteriorní rozdělení $\pi(\theta|X)$ spojitá pro všechna $X$, kritérium je tranzitivní.

Bose (1991) jejich definici upravil. Místo (3.1) použil rozdíl aposteriorních pravděpodobností

$$\mathrm{PPC}(\delta_1, \delta_2 \mid X) = \mathrm{P}(|\delta_1 - \theta| < |\delta_2 - \theta| \mid X) - \mathrm{P}(|\delta_1 - \theta| > |\delta_2 - \theta| \mid X) \geqq 0$$

a ukázal mimo jiné, že stejně rozdělené odhady jsou stejně preferovány. Bose (1998) se dále zabýval tranzitivitou kritéria, nutnou a postačující podmínkou pro ni je jednoznačnost mediánu aposteriorního rozdělení. V případě vektorového parametru $\theta$ pracuje s vícerozměrným mediánem ($m$ je vícerozměrný medián $Y$, když $a'm = \mathrm{med}\, a'Y$ pro vš. $a$). Pokud existuje a rozdělení není koncentrováno na přímce, je dán jednoznačně. Aposteriorní medián je nejbližším (při použití eukleidovské vzdálenosti) odhadem. I ve vícerozměrném případě jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro tranzitivitu kritéria.

Uvedením Pitmanova porovnání do pojmů teorie rozhodování (Robert, Hwang a Strawderman (1993) kritériu vytýkali, že do ní nezapadá) se zabýval Rukhin (1996). Ve zbytku odstavce se pokusíme jeho koncepci popsat. Mnohé v teorii rozhodování závisí jen na rozdílech rizikových funkcí $R_\theta(\delta_0) - R_\theta(\delta_1)$, kde riziková funkce odhadu $\delta$ je definována jako $R_\theta(\delta) = \mathrm{E}_\theta\, L(\delta, \theta)$. Vyjděme proto ze srovnávacího rizika (comparative risk)

$$R_\theta(\delta_0, \delta_1) = \mathrm{E}_\theta\, L(\theta, \delta_0, \delta_1), \tag{3.2}$$

kde $L(\theta, \delta_0, \delta_1)$ je srovnávací ztrátová funkce vyjadřující ztrátu vzniklou z použití $\delta_0$ namísto $\delta_1$ (čím je větší, tím hůře si $\delta_0$ vede ve srovnání s $\delta_1$). Předpokládejme přitom konečnost (3.2) a symetrii $R_\theta(\delta_0, \delta_1) = -R_\theta(\delta_1, \delta_0)$.

Definujme přípustnost odhadu a bayesovský odhad. Odhad $\delta_0$ je $C$-přípustný (comparative admissible), když neexistuje lepší, tj. $R_\theta(\delta_0, \delta) \geqq 0$ pro vš. $\theta$ implikuje $R_\theta(\delta_0, \delta) = 0$. K Pitmanovu kritériu (se ztrátovou funkcí $L(\delta, \theta)$) se dostaneme vhodnou volbou srovnávací ztrátové funkce. Pro

$$L(\theta, \delta_0, \delta_1) = \mathrm{sign}(L(\delta_0, \theta) - L(\delta_1, \theta)) \tag{3.3}$$

vychází $R_\theta(\delta_0, \delta_1) = -\,\mathrm{PC}_\theta(\delta_0, \delta_1)$. I když vycházíme ze srovnávací ztrátové funkce, která je tranzitivní, tranzitivitu kritéria nemáme zaručenu. Může se také stát, že některý nepřípustný odhad nemá žádné přípustné zlepšení.

Při apriorním rozdělení $\pi(\theta)$ nazveme odhad $\delta_0$ $C$-bayesovský, když

$$\sup_\delta \int R_\theta(\delta_0, \delta)\,\mathrm{d}\pi(\theta) \leqq 0 \qquad \text{(tedy rovno 0)}.$$

$C$-bayesovský odhad je $C$-přípustný a naopak každý $C$-přípustný odhad je (v jistém smyslu) „limitou“ $C$-bayesovských. Při hledání $C$-bayesovského odhadu místo klasického

$$\operatorname*{argmin}_\delta \int L(\delta, \theta) f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}\pi(\theta) \quad \text{máme} \quad \operatorname*{argmin}_\delta \max_{\delta_1} \int L(\theta, \delta, \delta_1) f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}\pi(\theta),$$

přičemž dosaženým minimem je 0. Pro reálný parametr $\theta$ a ztrátovou funkci $L(\delta, \theta)$, která je pro každé $\delta$ jakožto funkce $\theta$ unimodální, spojitá a má minimum v $\delta$, je $C$-bayesovský odhad $\delta_0$ při (3.3) dán rovností

$$\int_{-\infty}^{\delta_0} f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}\pi(\theta) = \int_{\delta_0}^{\infty} f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}\pi(\theta).$$

Dostáváme tedy $\delta_0$ jako aposteriorní medián a tento odhad nezávisí na konkrétní volbě $L(\delta, \theta)$ s uvedenými vlastnostmi.

## 4. Porovnání některých odhadů v regresi

Zabývejme se standardním lineárním modelem

$$y = X\beta + e \tag{4.1}$$

s $k$-složkovým vektorem parametrů $\beta$, kde matice $X$ má plnou hodnost $k$ a chybový vektor $e \sim \mathrm{N}_n(0, \sigma^2 I)$. Maximálně věrohodný odhad $\beta$ (který je roven odhadu metodou nejmenších čtverců) značme $b = (X'X)^{-1}X'y$. Podobně jako při porovnání pomocí střední čtvercové chyby také při použití Pitmanova porovnání existují bližší odhady než $b$. Např. Steinovy odhady

$$b^S = \Big(1 - c\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{(n - k + 2)b'X'Xb}\Big)b$$

při $0 < c < 2(k-1)$, $k > 1$ a ztrátové funkci $L(b, \beta) = (b - \beta)'X'X(b - \beta)$ jsou dle práce Srivastava a Srivastava (1993) bližší, a to asymptoticky, za předpokladu konvergence $X'X/n$ ke konečné nesingulární matici (připomínáme, že při použití MSE platí totéž při $k > 2$ a $0 < c < 2(k-2)$). I ty lze dále zlepšit, jak ukazují Tran Van Hoa a Chaturvedi (1997) při $\sigma \to 0$.

Uvažujme nyní situaci, ve které máme podezření, že v modelu (4.1) je vhodné vynechat poslední regresor. Pišme $X = (X_1, x_2)$ a $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, kde $x_2$ je poslední sloupec $X$ a $\beta_2$ poslední složka $\beta$, tedy

$$y = X_1\beta_1 + e^*, \qquad e^* = x_2\beta_2 + e.$$

Maximálně věrohodný odhad v modelu s omezením $\beta_2 = 0$ (tj. v podmodelu $y = X_1\beta_1 + e$) je

$$b^o = ((b_1^o)', 0)', \qquad \text{kde } b_1^o = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y.$$

V praxi se obvykle volí mezi mezi odhady $b^o$ a $b$ na základě testu hypotézy $\beta_2 = 0$, tj. používá se tzv. pre-test odhad

$$b_a^P = \begin{cases} b^o & \text{je-li } |T| < a, \\ b & \text{je-li } |T| \geqq a, \end{cases} \tag{4.2}$$

kde $T$ je vhodná testovací statistika (bude upřesněna níže v Tvrzeních 4.3 a 4.4) a $a \geqq 0$ její kritická hodnota pro zvolenou hladinu významnosti testu. V dalším uvedeme bez důkazu některé vlastní výsledky pro Pitmanovo porovnání odhadu $b$ z původního modelu s odhadem $b^o$ z menšího modelu a s pre-test odhadem $b_a^P$.

Předpokládáme ztrátovou funkci ve tvaru $L(b,\beta) = (b-\beta)'Q(b-\beta)$, kde $Q = A'A$ je pozitivně semidefinitní matice, $A$ je libovolná matice o $k$ sloupcích. Podobně jako v matici $X$ odlišme v $A$ poslední sloupec, $A = (A_1, a_2)$. Dále označme

$$c = (a_2 - z)'(a_2 - z), \qquad \text{kde } z = A_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'x_2,$$
$$d = \sigma\sqrt{(a_2 - z)'A_1(X_1'X_1)^{-1}A_1'(a_2 - z)}.$$

Lze ukázat, že hodnoty konstant $c$ a $d$ nezávisejí na volbě rozkladu $Q = A'A$.

V případě regresní přímky $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + e_i$, $i = 1,\dots,n$, lze snadno interpretovat význam konstant $c$ a $d$. Počítáme-li s přirozenou ztrátovou funkcí $\sum_i (b_1 + b_2 x_i - (\beta_1 + \beta_2 x_i))^2$, je $c = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ a $d = 0$. Při ztrátové funkci $(b_1 + b_2 x_0 - (\beta_1 + \beta_2 x_0))^2$ je $c = (x_0 - \bar{x})^2$, $d = |x_0 - \bar{x}|\sigma/\sqrt{n}$.

Obecně pro (4.1) a nesingulární (tj. pozitivně definitní) matici $Q$ je $c \neq 0$. Často je $d = 0$, např. pro ztrátovou funkci s $Q = X'X$ (nebo také pro $Q = I$, když $x_2'X_1 = 0$).

V následujícím budou $\Phi$ a $\varphi$ značit distribuční funkci a hustotu normálního normovaného rozdělení, $v_2$ bude značit poslední diagonální prvek matice $(X'X)^{-1}$, $b_2$ bude poslední složka vektoru $b$ a $s^2$ standardně používaný nestranný odhad $\sigma^2$. Označme $\eta$ parametr necentrality definovaný předpisem

$$\eta = \beta_2/\sqrt{\operatorname{var} b_2} = \beta_2/\sqrt{\sigma^2 v_2}. \tag{4.3}$$

Uvedeme nejprve Pitmanovu míru blízkosti pro porovnání odhadu $b^o$ z chudšího modelu s odhadem $b$ z úplného modelu. Případ $c = 0$ je triviální, neboť pak se rovnají už hodnoty ztrátových funkcí obou odhadů, odhady jsou tedy stejně dobré.

**Tvrzení 4.1.** *Je-li $c \neq 0$ a $d = 0$, pak*

$$\mathrm{PC}_\beta(b^o, b) = 3 - 4\Phi(|\eta|).$$

Při zúžení parametrického prostoru na $|\eta| < u_{0,75} \doteq 0,773$ je tedy odhad z menšího modelu $b^o$ bližší než $b$, při $|\eta| > u_{0,75}$ je tomu naopak. Není tak žádný z odhadů bližší než druhý.

**Tvrzení 4.2.** *Je-li $c \neq 0$ a $d \neq 0$, pak*

$$\mathrm{PC}_\beta(b^o, b) = 2(R^+ + R^-) - 1,$$

*kde*

$$R^\pm = \int_0^\infty \Phi\Big(\frac{c\sigma\sqrt{v_2}}{2d}(x \pm 2\eta)\Big)\varphi(x \pm \eta)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud lze dále odvodit, že $b^o$ je bližší pro $|\eta| \leqq \eta_1 = u_{0,75}$, zatímco $b$ je bližší pro $|\eta| \geqq \eta_2 \doteq 0,877$, kde $\eta_2$ je jediné kladné řešení rovnice $\eta + 2\varphi(\eta) - 2\eta\Phi(\eta) = 0$. Pro $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$ mohou vyjít preference ve prospěch $b^o$ nebo ve prospěch $b$ v závislosti na volbě matice $Q$, která určuje ztrátovou funkci. V tomto případě tedy dává Pitmanovo porovnání komplikovanější výsledek než porovnání pomocí MSE, neboť MSE preferuje $b^o$ v oblasti $|\eta| < 1$ a $b$ v oblasti $|\eta| > 1$.

Nakonec porovnáme maximálně věrohodný odhad $b$ s pre-test odhadem $b_a^P$ v případě dvou testových statistik $T$ volených podle toho, zda rozptyl rozptyl chyb $\sigma^2$ známe či ne. Abychom situaci zjednodušili, omezíme se na případ $d = 0$, neboť pak Pitmanovo porovnání nebude záviset na volbě pozitivně semidefinitní matice $Q$.

**Tvrzení 4.3.** *Při $c \neq 0$, $d = 0$ a volbě testové statistiky $T = b_2/\sqrt{\sigma^2 v_2}$ ve (4.2) platí*

$$\mathrm{PC}_\beta(b_a^P, b) = g_a(|\eta|),$$

*kde*

$$g_a(x) = \begin{cases} \Phi(a+x) + \Phi(a-x) - 4\Phi(x) + 1 & \textit{pro } x < a/2, \\ \Phi(a+x) - \Phi(a-x) - 2\Phi(x) + 1 & \textit{pro } x \geqq a/2. \end{cases}$$

Odtud plyne, že pro $a > 0$ pre-test odhad $b_a^P$ je preferován před $b$ při $|\eta| < \eta^*$ a odhad $b$ je bližší při $|\eta| > \eta^*$, kde $\eta^*$ je kladné číslo závisející jen na kritické hodnotě testu $a$, přičemž hodnota $\eta^*$ je menší než $a/2$ i než $u_{0,75}$.

Protože $b$ lze ztotožnit s pre-test odhadem s kritickou hodnotou $a = 0$, dostáváme odtud speciálně, že ve třídě $\{b_a^P\}_{a \geqq 0}$ neexistuje nejbližší odhad $\beta$.

**Tvrzení 4.4.** *Pro $c \neq 0$, $d = 0$ a $T = b_2/\sqrt{s^2 v_2}$ je*

$$\mathrm{PC}_\beta(b_a^P, b) = \int_0^\infty g_{ax}(|\eta|) f(x)\,\mathrm{d}x$$

*kde $f(x)$ je hustota $s/\sigma \sim \sqrt{\chi^2(n-k)/(n-k)}$.*

Odtud lze získat, že při $a > 0$ je $b_a^P$ bližší než $b$ pro $\eta$ blízké k 0, pro $|\eta| \geqq u_{0,75}$ je tomu naopak. Přesnější vyjádření preferenčních oblastí pro pre-test odhad $b_a^P$ a odhad $b$ je v tomto případě obtížné, avšak z uvedeného je jasné, že závisejí pouze na $\eta$, kritické hodnotě $a$ testové statistiky a počtu stupňů volnosti $n-k$ a platí $\mathrm{PC}_\beta(b_a^P, b) \to g_a(|\eta|)$ pro $n - k \to \infty$.

Zabývejme se nyní otázkou, kdy lze ve třídě pre-test odhadů najít optimální odhady ve smyslu bayesovského přístupu z odstavce 3. Abychom úvahy zjednodušili, dívejme se na $\sigma^2$ jako na pevný (známý nebo neznámý) parametr a bayesovský přístup uplatníme pouze vzhledem k vektoru $\beta$. Lze dokázat, že místo apriorního rozdělení vektoru $\beta$ pak stačí pro účely Pitmanova porovnání pre-test odhadů znát pouze marginální apriorní rozdělení složky $\beta_2$.

Domníváme se, že bayesovský přístup k pre-test odhadu vektoru $\beta$ bude lépe odpovídat realitě, jestliže místo tradičního spojitého apriorního rozdělení použijeme kombinace spojitého rozdělení s diskrétním tak, aby apriorní pravděpodobnost jevu $\beta_2 = 0$ (tj. pravděpodobnost platnosti testované hypotézy) byla obecně nenulová, viz např. Griffiths a Dao (1980). Zvolme $p_0 \in \langle 0, 1)$ a $\sigma_2 > 0$ a předpokládejme, že apriorní rozdělení složky $\beta_2$ má distribuční funkci

$$\mathrm{P}(\beta_2 \leqq x) = \begin{cases} (1-p_0)\Phi(x/\sigma_2) & \text{pro } x < 0, \\ p_0 + (1-p_0)\Phi(x/\sigma_2) & \text{pro } x \geqq 0. \end{cases}$$

Diskuse existence aposteriorně nejbližšího odhadu $\beta$ mezi pre-test odhady je pak poměrně rozvětvená.

**Tvrzení 4.5.** *Nechť $c \neq 0$, $d = 0$ a nechť testová statistika $T$ v (4.2) je rovna $T = b_2/\sqrt{\sigma^2 v_2}$ nebo $T = b_2/\sqrt{s^2 v_2}$. Předpokládejme, že vektor $\beta$ má apriorní rozdělení takové, že marginální rozdělení složky $\beta_2$ má výše uvedenou distribuční funkci s parametry $p_0 \in \langle 0, 1)$ a $\sigma_2 > 0$. O aposteriorně nejbližším pre-test odhadu (který obecně nemusí existovat) vektoru $\beta$ ve třídě pre-test odhadů $\{b_a^P\}_{0 \leqq a \leqq \infty}$, kde $b_0^P = b$ a $b_\infty^P = b^o$, platí následující.*

(i) *Je-li* $\sigma_2^2 < \sigma^2 v_2$ *nebo je-li* $\sigma_2^2 = \sigma^2 v_2$ *a* $p_0 > 0$*, pak aposteriorně nejbližším pre-test odhadem* $\beta$ *je* $b^o$*, tj. odhad metodou nejmenších čtverců v chudším modelu.*

(ii) *Je-li* $\sigma_2^2 = \sigma^2 v_2$ *a* $p_0 = 0$*, pak všechny pre-test odhady* $\beta$ *jsou z hlediska aposteriorní Pitmanovy míry blízkosti ekvivalentní.*

(iii) *Je-li* $\sigma_2^2 > \sigma^2 v_2$ *a* $p_0 = 0$*, pak aposteriorně nejbližším pre-test odhadem* $\beta$ *je* $b$*, tj. odhad metodou nejmenších čtverců v úplném modelu.*

(iv) *Je-li* $\sigma_2^2 > \sigma^2 v_2$ *a* $p_0 > 0$*, pak:*

a) *V případě volby testové statistiky* $T = b_2/\sqrt{s^2 v_2}$ *aposteriorně nejbližší pre-test odhad vektoru* $\beta$ *neexistuje, protože pro každé dvě různé hodnoty* $a_1, a_2$ *z množiny* $\langle 0, \infty\rangle$ *existují vektory pozorování* $y_1, y_2$ *takové, že*

$$\mathrm{PPC}(b^P_{a_1}, b^P_{a_2} \mid y_1) > 0 \qquad a \qquad \mathrm{PPC}(b^P_{a_1}, b^P_{a_2} \mid y_2) < 0.$$

b) *V případě volby testové statistiky* $T = b_2/\sqrt{\sigma^2 v_2}$ *existuje* $a \in (0, \infty)$ *takové, že* $b^P_a$ *je aposteriorně nejbližším pre-test odhadem vektoru* $\beta$*. Číslo* $a$ *je řešením rovnice*

$$\sqrt{2\pi}\frac{p_0}{1-p_0}\sqrt{1+r^2}\,\varphi\Big(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}a\Big) + 2\Phi\Big(\frac{1-r^2}{2r\sqrt{1+r^2}}a\Big) - 1 = 0,$$

*kde* $r = \sigma_2(\sigma^2 v_2)^{-1/2}$.

## Literatura


[1] Bose, S.: *Some properties of posterior Pitman closeness*, Pitman's measure of closeness. Comm. Statist. Theory Methods **20** (1991), no. 11, 3697–3712.

[2] Bose, S.: *On the transitivity of the posterior Pitman closeness criterion*, J. Statist. Plann. Inference **69** (1998), no. 2, 263–274.

[3] Comm. Statist. Theory Methods **20** (1991), no. 11 (Pitman's measure of closeness).

[4] Ghosh, M., Sen, P. K.: *Median unbiasedness and Pitman closeness*, J. Amer. Statist. Assoc. **84** (1989), no. 408, 1089–1091.

[5] Ghosh, M., Sen, P. K.: *Bayesian Pitman closeness*, Pitman's measure of closeness. Comm. Statist. Theory Methods **20** (1991), no. 11, 3659–3695.

[6] Griffiths, W., Dao, D.: *A note on a Bayesian estimator in an autocorrelated error model*, J. Econometrics **12** (1980), no. 3, 389–392.

[7] Keating, J. P., Mason, R. L., and Sen, P .K.: *Pitman's measure of closeness. A comparison of statistical estimators*, SIAM, Philadelphia, 1993.

[8] Nayak, T. K.: *Estimation of location and scale parameters using generalized Pitman nearness criterion*, J. Statist. Plann. Inference **24** (1990), no. 2, 259–268.

[9] Nayak, T. K.: *On equivariant estimation of the location of elliptical distributions under Pitman closeness criterion*, Statist. Probab. Lett. **36** (1998), no. 4, 373–378.

[10] Pitman, E. J. G.: *The closest estimates of statistical parameters*, Proc. Camb. Phil. Soc. **33** (1937), 212–222.

[11] Rao, C. R., Keating, J. P., Mason, R. L.: *The Pitman nearness criterion and its determination*, Comm. Statist. A—Theory Methods **15** (1986), no. 11, 3173–3191.

[12] Reif, J., Vlček, K.: *Optimal pre-test estimators in regression*, to appear in J. Econometrics.

[13] Robert, Ch. P., Hwang, J. T. G., Strawderman, W. E.: *Is Pitman closeness a reasonable criterion?*, J. Amer. Statist. Assoc. **88** (1993), no. 421, 57–76.

[14] Rukhin, A. L.: *On the Pitman closeness criterion from the decision-theoretic point of view*, Statist. Decisions **14** (1996), no. 3, 253–274.

[15] Saleh, A. K. Md. Ehsanes, Sen, P. K.: *Pitman-closeness of some preliminary test and shrinkage estimators*, Comm. Statist. Theory Methods **20** (1991), no. 11, 3643–3657.

[16] Srivastava, A. K., Srivastava, V. K.: *Pitman closeness for Stein-rule estimators of regression coefficients*, Statist. Probab. Lett. **18** (1993), no. 2, 85–89.
[17] Tran Van Hoa, Chaturvedi, A.: *Performance of the 2SHI estimator under the generalised Pitman nearness criterion*, Comm. Statist. Theory Methods **26** (1997), no. 5, 1227–1238.

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
E-mail: friesl@kma.zcu.cz, reif@kma.zcu.cz