ROBUST'2002, 107 – 116

INVARIANTNÍ ROZDĚLENÍ ČÁSTICOVÝCH SYSTÉMŮ

LUCIE FAJFROVÁ

Abstract. In the paper we consider interacting particle system that have zero range interactions. It means we have special Markov process with uncountable state space where one state is configuration of particles on sites and interactions can occur just among particles at the same site. The natural question are invariant measures of this Markov process. We can find some of them and in special cases we can find just set of extremal invariant measures. We deal with a characterization of the invariant measures in several examples.
Резюме. В статье изучается система взаимодействих частиц у которой есть специальные нуль-областные взаимодейства. Это значить что у нас специальный Марковский процесс с несчетным множеством состояний, где элемент этого множества есть конфигурациа частиц на положениях, и частицы могут взаимно влиять на себя только когда оны на тот же самом положении. Интересной является проблемма инвариантных мер этого процесса Маркова. Нам бозможно найти некоторые из них и во специальном случае множество всех экстремальных инвариантных мер. Мы изучаем характеризацию инвариантных мер в несколько примерах.

1. Definice

Buď $\mathcal{X}$ Polský prostor opatřený Borelovskou σ-algebrou. Označme $\mathcal{D}$ prostor „cadlag“ funkcí:

$$\mathcal{D} = \{\varphi : \ \mathbb{R}^+ \to \mathcal{X} \text{ zprava spojitá a existují vlastní limity zleva v každém bodě}\}$$

se σ-algebrou $\mathcal{F}$, kterou definujeme jako nejmenší σ-algebru, při níž jsou měřitelné projekce $\pi_t : \ \mathcal{D} \to \mathcal{X}, \ \varphi \mapsto \varphi(t), \ \forall\, t \geq 0$. Označme $(\mathcal{F}_t \ : t \geq 0)$ soubor σ-algeber do času t, tzn. $\mathcal{F}_t := \sigma(\pi_s : \ 0 \leq s \leq t)$.

Kanonický Markovský proces se stavy v množině $\mathcal{X}$ definujeme jako Markovské jádro $\big(P^\eta \ : \eta \in \mathcal{X}\big)$, kde P^η jsou pravděpodobnostní míry na $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$, jejichž

projekce do času $t = 0$ jsou Dirakovy míry soustředěné v η

a označíme-li pro každé $\eta \in \mathcal{X}$ a $s \geq 0$ $\quad P^\eta(\cdot \mid \mathcal{F}_s)$ podmíněnou pravděpodobnost odvozenou od pravděpodobnosti $P^\eta(\cdot)$, tzn. $\forall C \in \mathcal{F}$ je $P^\eta(C \mid \mathcal{F}_s)$ náhodná veličina na $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, P^\eta)$ splňující

$$P^\eta(C \cap B_s) = \int_{B_s} P^\eta(C \mid \mathcal{F}_s)(\varphi)\, dP^\eta(\varphi) \qquad \forall B_s \in \mathcal{F}_s \ ,$$

potom $P^\eta(\cdot \mid \mathcal{F}_s)$ měří množinu $\{\psi \in \mathcal{D} : \psi(s + \cdot) \in A\}$ stejně, až na množinu nulové míry P^η, jako míra $P^{\varphi(s)}$ množinu A.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 82 C 22; Secondary 60 K 35, 37 L 40.
Klíčová slova. Particle system, Markov process, invariant measure.
Tato práce je podporována grantem GAČR 201/00/1149 a MSM 113200008.

Definice: Soubor $\big(P^\eta \ : \ \eta \in \mathcal{X}\big)$ pravděpodobnostních měr na $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ nazveme kanonický Markovský proces se stavy v $\mathcal{X}$, jestliže

1. zobrazení $\begin{array}{rcl} \eta & \mapsto & P^\eta(A) \\ \mathcal{X} & \to & [0,1] \end{array}$ je měřitelné $\forall\ A \in \mathcal{F}$
2. $P^\eta\big(\varphi(0) = \eta\big) = 1$
3. (Markovská vlastnost) $P^\eta\big(\psi(s+\cdot) \in A \mid \mathcal{F}_s\big)(\varphi) = P^{\varphi(s)}(A)$ pro P^η-s.v. $\varphi \in \mathcal{D}$.

Poznámka 1.1.
Podívejme se, že pro spočetnou množinu stavů $\mathcal{X}$ je tato definice konzistentní s definicí homogenního Markovského řetězce $(\Phi_t : t \geq 0)$, kterou známe ve tvaru:
$\forall\ t \geq 0,\ 0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq s$ *platí*

$$(1) \quad \mathbb{P}(\Phi_{s+t} = \gamma \mid \Phi_s = \delta, \Phi_{u_n} = \delta_n, \ldots, \Phi_{u_1} = \delta_1, \Phi_0 = \eta) = \mathbb{P}(\Phi_t = \gamma \mid \Phi_0 = \delta).$$

Buď $\mathcal{X}$ spočetná diskrétní. Vlastnost 1. je nyní splněna vždy a vlastnost 3. lze z definice podmíněné pravděpodobnosti vyjádřit jako:

$$P^\eta\big(\{\psi(s+\cdot) \in A\} \cap B_s\big) = \int_{B_s} P^{\varphi(s)}(A)\ P^\eta(d\varphi) \quad \forall B_s \in \mathcal{F}_s,$$

Zřejmě stačí uvažovat $B_s = \{\phi : \phi(s) = \delta,\ \phi(u_n) = \delta_n, \ldots, \phi(u_1) = \delta_1\}$, neboť tyto množiny pro všechna $0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq s,\ n \in \mathbb{N}$ generují $\mathcal{F}_s$ a jsou uzavřené na konečné průniky. Podobně stačí uvažovat $A = \{\phi : \phi(t) = \gamma,\ \phi(v_k) = \gamma_k, \ldots, \phi(v_1) = \gamma_1\}$, kde $0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_k \leq t,\ k \in \mathbb{N}$. Rovnost 3. pak dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} &P^\eta\big(\psi(s{+}t){=}\gamma,\ \psi(s{+}v_k){=}\gamma_k, \ldots, \psi(s{+}v_1){=}\gamma_1,\ \psi(s){=}\delta,\ \psi(u_n){=}\delta_n, \ldots, \psi(u_1){=}\delta_1\big) \\ &\quad = \\ &P^\delta(\psi(t){=}\gamma,\ \psi(v_k){=}\gamma_k, \ldots, \psi(v_1){=}\gamma_1)\ P^\eta(\psi(s){=}\delta,\ \psi(u_n){=}\delta_n, \ldots, \psi(u_1){=}\delta_1) \\ &\qquad\qquad P^\eta\text{-s.v. },\ \forall\ 0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq s,\ 0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_k \leq t. \end{aligned}$$

Označme Φ kanonický proces na $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mající podmíněná rozdělení $\Phi \mid \Phi_0 = \eta$ zadaná mírou P^η pro každé $\eta \in \mathcal{X}$ tj.

$$\mathbb{P}(A \mid \Phi_0 = \eta) = \mathbb{P}(\Phi \in A \mid \Phi_0 = \eta) = P^\eta(A) \qquad .$$

Potom dostáváme rovnost ve tvaru

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\Phi_{s+t} = \gamma,\ \Phi_{s+v_k} = \gamma_k, \ldots, \Phi_{s+v_1} = \gamma_1 | \Phi_s = \delta,\ \Phi_{u_n} = \delta_n, \ldots \Phi_{u_1} = \delta_1, \\ &\Phi_0 = \eta\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\Phi_t = \gamma, \Phi_{v_k} = \gamma_k, \ldots, \Phi_{v_1} = \gamma_1 | \Phi_0 = \delta\big), \end{aligned}$$

což je ekvivalentní (1). Tedy Φ je homogenní Markovský proces se spočetnou stavovou množinou $\mathcal{X}$. $\square$

Definice: Označme $C(\mathcal{X})$ prostor spojitých funkcí na $\mathcal{X}$ a $C_b(\mathcal{X})$ prostor spojitých, omezených funkcí. Buď $\big(P^\eta : \eta \in \mathcal{X}\big)$ Markovský proces. Pro každé $t \geq 0$ definujme lineární operátor $S(t)$ na $C_b(\mathcal{X})$ předpisem pro $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ spojitou, omezenou

$$\begin{array}{rrcl} S(t)f : & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \eta & \longmapsto & E^\eta(f \circ \pi_t) = \int\limits_{\mathcal{D}} f\big(\pi_t(\varphi)\big) P^\eta(d\varphi) = \int\limits_{\mathcal{D}} f\big(\varphi_t\big) P^\eta(d\varphi.) \end{array}$$

kde π_t je projekce $\mathcal{D} \to \mathcal{X}$,
E^η je střední hodnota od pravděpodobnosti P^η tj. pro náhodný proces Z s cadlag trajektoriemi je $E^\eta(Z) = \int_{\mathcal{D}} Z dP^\eta$ existuje-li (odtud pochází přirozeně předpoklad uvažovat jen omezené funkce).

Uvažujme Markovský proces $\big(P^\eta : \eta \in \mathcal{X}\big)$. Označíme-li $\forall\ t \geq 0\ P_t^\eta$ projekci míry P^η do času t, tedy $P_t^\eta(\cdot)$ je pravděpodobnostní míra na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, je $P_t^\star(\cdot)$ Markovské jádro na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Speciálně Markovská vlastnost 3. z definice má pro soubor Markovských jader $\big(P_t^\star(\cdot)\big)$ tvar

$$P_{s+t}^\eta(B) = \int P_s^\xi(B)\ P_t^\eta(\mathrm{d}\xi) \quad \text{(Chapman-Kolmogorova rovnost).}$$

Operátory $S(t)$ jsou potom přímo odvozené od takového souboru Markovských jader, $S(t)f(\eta) = \int f(\xi) P_t^\eta(\mathrm{d}\xi)$ a $P_t^\eta(B) = S(t)I_B$.

Zajímavé budou ty situace, kde platí $S(t)f \in C_b(\mathcal{X})$. Snadno dokážeme, že takový soubor operátorů splňuje vlastnosti $\forall t, s \geq 0$:

1) $S(t)f \geq 0$ pro každou $f \geq 0$ a $S(0) = \mathrm{I}$
2) $t \mapsto S(t)f(\eta)$
   $\mathbb{R}^+ \to \mathcal{X}$ je zprava spojité zobrazení $\forall\ f, \forall\ \eta$
3) $S(t+s)f = S(t)S(s)f$
4) $S(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Definice: Soubor operátorů $\big(S(t) : t \geq 0\big)$, $S(t) : C_b(\mathcal{X}) \to C_b(\mathcal{X})$ pro každé $t \geq 0$, splňující vlastnosti 1)- 4) nazveme Markovská semigrupa.

Markovská semigrupa je pro Markovský proces charakterizací v tom smyslu, že k Markovské semigrupě existuje jediný kanonický Markovský proces splňující $S(t)f(\eta) = E^\eta(f \circ \pi_t)$ pro každé $f \in C_b(\mathcal{X})$, $\eta \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$. Lze nalézt například v [2].

Definice: Operátor na $C(\mathcal{X})$ s definičním oborem

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{f \in C(\mathcal{X}) : \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \quad \text{existuje}\}$$

definovaný předpisem

$$\Omega f = \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}$$

se nazývá (infinitesimální) generátor Markovské semigrupy.

Poznámka: limitou $t \searrow 0$ v definici myslíme limitu v metrice $C(\mathcal{X})$.

Mezi Markovskou semigrupou a jejím generátorem za určitých předpokladů platí 1-1 korespondence, to znamená, že pro každou $f \in \mathrm{D}(\Omega)$ lze vyjádřit

$$S(t)f = \lim_{n \to \infty} \Big(\mathrm{I} - \frac{t}{n}\Omega\Big)^{-n} f$$

a platí, že $S(t)f \in \mathrm{D}(\Omega)$. Potom navíc platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)f = \Omega\ S(t)f = S(t)\ \Omega f. \tag{2}$$

Toto tvrzení bývá označováno jako Hille-Yosidova věta a jak jsem již předeslala je uváděno za určitých topologických předpokladů na prostory $\mathcal{X}$, respektive $C(\mathcal{X})$. Lze jej nalézt v [6],[8]. Takovým postačujícím předpokladem je například $\mathcal{X}$ kompaktní metrický prostor.

V některých jiných případech stavového prostoru $\mathcal{X}$ je možné se vyhnout přímému použití H.-Y. věty a ukázat korespondenci ve smyslu (2) operátoru Ω definovaném na husté podmnožině $C(\mathcal{X})$ a Markovské semigrupy $(S(t) : t \geq 0)$ definované na $C_b(\mathcal{X})$. Je možné vyjít z operátoru Ω a zkonstruovat k němu semigrupu, o níž je třeba ukázat, že odpovídá (2) a má vlastnosti Markovské semigrupy. Tuto konstrukci lze nalézt například v [4].

Definice: Buď $\mathcal{P}$ množina Borelovských pravděpodobnostních měr na $\mathcal{X}$ se slabou topologií. Míra $\mu \in \mathcal{P}$ se nazývá invariantní vůči Markovské semigrupě $(S(t) : t \geq 0)$, jestliže pro každou $f \in C_b(\mathcal{X})$ platí

$$\int S(t)f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{3}$$

V této souvislosti označujeme $\mu S(t)$ míru na $\mathcal{X}$ definovanou předpisem: $\int f \, \mathrm{d}\big(\mu S(t)\big) = \int S(t)f \, \mathrm{d}\mu$ pro každou f spojitou omezenou funkci na $\mathcal{X}$. Potom lze místo (3) psát jednoduše $\mu S(t) = \mu \quad \forall\, t \geq 0$.

Definice: ZR proces (Zero range process) definujeme jako Markovský proces se stavovou množinou

$\mathcal{X} = \mathbb{N}^S = \{\eta;\ \eta : S \to \mathbb{N}\}$, kde S je spočetný diskrétní prostor a kde $\mathcal{X}$ opatříme součinovou topologií, tzn. otevřená baze je $\big\{\{\eta:\ \eta(x_1) = k_1, \ldots, \eta(x_n) = k_n\} : n \in \mathbb{N}^+,\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S\big\}$,

zadaný operátorem Ω na nějaké husté podmnožině $C(\mathcal{X})$ předpisem

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} g\big(\eta(x)\big) p(x,y) \big(f(\eta^{xy}) - f(\eta)\big) \quad \forall \eta \in \mathcal{X}, \tag{4}$$

kde g je nezáporná funkce na $\mathbb{N}$, $g(0) = 0$,
$p(\cdot,\cdot)$ je pravděpodobnost přechodu diskrétního Markovského řetězce na S
a konfiguraci $\eta^{xy} \in \mathcal{X}$ definujeme $\forall\, z \in S$ předpisem

$$\eta^{xy}(z) = \begin{cases} \eta(x) - 1 & \text{pro } z = x, \quad \eta(x) > 0 \text{ a } x \neq y \\ \eta(y) + 1 & \text{pro } z = y, \quad \eta(x) > 0 \text{ a } x \neq y \\ \eta(z) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka: Aby definice byla korektní, je potřeba ukázat existenci Markovského procesu s takto definovaným generátorem. Jak už bylo poznamenáno, stačí ukázat existenci Markovské semigrupy korespondující (ve smyslu (2)) s operátorem Ω definovaným v (4). Tuto konstrukci lze nalézt v [5], nebo [4], [3] pro všechny příklady, které budou uvedeny.

První příklad bude speciálním případem, v němž vezmeme množinu pozic S konečnou, tedy stavový prostor $\mathcal{X}$ bude spočetný a ZR proces na $\mathcal{X}$ bude klasický Markovský proces se spočetně stavy definovaný intenzitami přechodů.

Příklad 1.

Mějme prostor pozic $S = [0, n] \cap \mathbb{Z}$, potom stavový prostor $\mathcal{X} = \mathbb{N}^S$ je spočetný. Nechť intenzitová funkce $g(k) = 1_{[k>0]}$ indikuje přítomnost částic a $(p(x,y) : x, y \in S)$ je nerozložitelný Markovský řetězec.

Funkci f na $\mathcal{X}$ lze tedy psát jako vektor $(f(\eta) : \eta \in \mathcal{X})$ a operátor Ω přepsat do matice $(\omega_{\eta\zeta})_{\eta,\zeta \in \mathcal{X}}$. Výrazem Ωf potom míníme násobení matice a vektoru $\Omega * f$.
Z předpisu (4) plyne, že (η, ζ)-tý člen matice Ω pro $\eta \neq \zeta$ je intenzita přechodu z konfigurace η do konfigurace ζ, která je nenulová jen v případě $\zeta = \eta^{xy}$ pro nějaká $x, y \in S$ taková, že $\eta(x) > 0$, a v tom případě $\omega_{\eta\zeta} = p(x,y)$. Diagonální člen $\omega_{\eta\eta}$ je minus celková intenzita stavu η, tj. $\omega_{\eta\eta} = -\sum_{\zeta \neq \eta} \omega_{\eta\zeta}$, kde jen konečně členů sumy je nenulových.

Ω je tudíž matice intenzit Markovského řetězce se zprava spojitými trajektoriemi a řešením zpětné Kolmogorovy diferenciální rovnice $S'(t) = \Omega * S(t), \quad S(0) = \mathrm{I}$

získáme maticovou semigrupu $(S(t),\ t \geq 0)$, která určuje pravděpodobnosti přechodů za čas t tohoto ZR procesu.

Míra $\mu = \big(\mu(\eta) : \eta \in \mathcal{X}\big)$ na $\mathcal{X}$ je invariantní vzhledem k $S(t)$ právě tehdy když

$$(5) \qquad \sum_{\eta\in\mathcal{X}} \big(S(t) * f\big)_\eta\ \mu(\eta) = \sum_{\eta\in\mathcal{X}} f(\eta)\ \mu(\eta) \qquad \forall\ t \geq 0$$

platí pro každou omezenou funkci f na $\mathcal{X}$.
Zřejmě však (5) stačí dokazovat pro $f_\eta = 1_{\{\eta\}},\ \eta \in \mathcal{X}$, proto lze (5) ekvivalentně psát jako: $\big(S(t)\big)^{\mathrm{T}} * \mu = \mu\ \ \forall\ t \geq 0.$ ○

Definujeme nyní pojem cylindrické funkce na součinovém prostoru typu $\mathcal{X} = \mathbb{N}^S$, kde S je spočetný diskrétní prostor. Funkci $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazveme cylindrickou, jestliže existuje $K \subset S$ konečná, že $\forall\ \eta, \zeta \in \mathcal{X}\ :\ (\eta(x) = \zeta(x)\ \forall\ x \in K)$ platí $f(\eta) = f(\zeta)$.

Pozorování: Cylindrické funkce jsou spojité a při vhodně zvolené topologii na $C(\mathcal{X})$ jsou husté v $C(\mathcal{X})$.

Příklad 2.

Jako prostor pozic, na kterém rozmístíme libovolné množství nerozlišitelných částic, si vezměme množinu celých čísel. Tj. $S = \mathbb{Z}$. Konkrétní konfigurace částic $\eta \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, kde $\eta(x)$ udává počet částic na pozici $x \in S$, je tedy prvek stavového prostoru $\mathcal{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. Buď opět intenzitová funkce $g(k) = 1_{[k>0]}$, což lze interpretovat, jako že částice na $x-$té pozici čekají ve frontě s jednou stanicí obsluhy na přeskok na jinou pozici.
Nechť Markovský řetězec $p(x,y)$ je náhodná procházka na $\mathbb{Z}$: buď $0 < p, q < 1$ a $p + q = 1$, potom $p(x, x+1) = p$ a $p(x, x-1) = q$. Pohyb částic po pozicích je možný jen na sousední pozice. Intenzita přeskoku jedné částice z pozice x do pozice y je tudíž $1_{[\eta(x)>0]}p(x,y)$.
Generátor tohoto ZR procesu je

$$(6) \quad \Omega f(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} 1_{[\eta(x)>0]} \Big(p\big(f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\big) + q\big(f(\eta^{x,x-1}) - f(\eta)\big)\Big) \ \ \forall \eta \in \mathcal{X}$$

a definujeme jej pro cylindrické funkce f na $\mathcal{X}$. ○

Příklad 3.

Vezmeme si zobecnění předchozího příkladu v tom smyslu, že Markovský řetězec $p(x,y)$ bude nehomogenní náhodná procházka na $\mathbb{Z}$. Tzn. $p(x, x+1) = p_x$ a $p(x, x-1) = q_x$, kde $q_x = 1 - p_x$, $0 < p_x, q_x < 1\ \ \forall x$ a $\inf p_x > 0,\ \inf q_x > 0$. Přeskok částice je tedy zase možný jen na sousední pozice, jeho intenzita však tentokrát nezávisí pouze na počtu částic na výchozí pozici a směru pohybu, ale navíc na dalším parametru pozice p_x.
Vše ostatní zůstává jako v předchozím příkladu, tj. $\mathcal{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ a generátor tohoto ZR procesu je

$$(7) \quad \Omega f(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} 1_{[\eta(x)>0]} \Big(p_x\big(f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\big) + q_x\big(f(\eta^{x,x-1}) - f(\eta)\big)\Big) \ \ \forall \eta \in \mathcal{X}$$

pro f cylindrické funkce na $\mathcal{X}$. ○

2. Invariantní míry

Nyní se zaměříme na to, jak pro uvedené případy ZR procesů definované generátorem (7), nebo speciálně (6), nalezneme míry invariantní vůči jejich semigrupě $(S(t), t \geq 0)$. Invariantní míry nás zajímají z toho důvodu, že chování procesu vůči nim vykazuje určitou stabilitu. Je-li totiž μ invariantní vůči semigrupě Markovského procesu $(\xi_t : t \geq 0)$, potom vezmeme-li μ jako počáteční rozdělení tohoto procesu, bude celý proces striktně stacionární, tzn. $(\xi_t : t \geq 0)$ a $(\xi_{t+s} : t \geq 0)$ mají stejná konečně rozměrná rozdělení pro každý čas $s \geq 0$. Naopak startuje-li proces z libovolného rozdělení ν na $\mathcal{X}$, pro nějž existuje $\lim_{t\to\infty} \nu S(t) =: \mu$, potom μ je invariantní. To znamená, že množina invariantních měr obsahuje možné kandidáty na limitní rozdělení. Obojí není těžké ukázat.

V celé této kapitole se omezme na situaci popsanou v příkladě 3 (speciálně 2). Označme $\mathcal{I}$ množinu všech invariantních měr pro konkrétní ZR proces se semigrupou $(S(t), t \geq 0)$ a generátorem Ω typu (7). Označme $\mathcal{I}_e$ množinu extremálních bodů $\mathcal{I}$.

Ideální situace nastává, známe-li celou množinu invariantních měr $\mathcal{I}$ a každému počátečnímu stavu umíme přiřadit tu invariantní míru, jež je limitním rozdělením procesu s tímto počátkem.

Následující tvrzení ukazuje, že množinu invariantních měr lze popsat jejími extremálními body.

Tvrzení 2.1.
a) $\mathcal{I} = \{\mu \in \mathcal{P} : \mu = \mu S(t) \quad \forall\ t \geq 0\}$ *je uzavřená, konvexní podmnožina* $\mathcal{P}$
b) $\mathcal{I} = \overline{co}\ \mathcal{I}_e$

důkaz: add a) konvexita a uzavřenost $\mathcal{I}$ jsou zřejmé,
add b) Krein-Milmanova věta pro nekompaktní případ [7]. □

V některých případech ZR procesů se daří nalézt právě extremální body množiny $\mathcal{I}$ a to postupem, který je popsán v následující větě [1, (1.8.)]. Ta dává algoritmus, jak nalézt některé invariantní míry pro ZR proces. Z jejího tvrzení je ihned zřejmé, že pokud tímto způsobem nalezneme jednu míru μ_π, pak celá rodina měr $\mu_{\alpha*\pi}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, aby $\mu_{\alpha*\pi} \in \mathcal{P}$, jsou invariantní míry. Dokázat alespoň v konkrétních případech, že právě tyto míry jsou extremální body $\mathcal{I}$, není snadné. Větu uvádím jen v té obecnosti, kterou použijeme pro uvedené příklady.

Věta 2.2. *(Andjel(1982))*
Buď $p(x, y)$ *irreducibilní Markovský řetězec na* S.
Buď $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $0 < \pi(x) < 1 \quad \forall x \in S$ *takové, že*

$$\sum_{x\in S} \pi(x)p(x, y) = \pi(y) \quad \forall y \in S, \tag{8}$$

potom $\nu_\pi \in \mathcal{I}$, *kde* ν_π *je součinová míra na* X *s marginály definovanými* $\forall\ x \in S$:

$$\nu_\pi(\eta : \eta(x) = k) = \big(1 - \pi(x)\big)\big(\pi(x)\big)^k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Důkaz věty 2.2 lze nalézt v [1]. Probíhá ve třech krocích, z nichž první je obsahem následujícího tvrzení, z něhož vyplyne, že pro invarianci míry μ stačí dokazovat $\int \Omega f \ \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \forall\ f$ cylindrickou na $\mathbb{N}^S$, μ-integrovatelnou.

Druhý krok spočívá v provedení důkazu speciálně pro S konečnou. Tímto případem jsme se zabývali v příkladě 1, odkud plyne, že stačí dokázat $\Omega^{\mathrm{T}} * \mu = \mathbf{0}$, což je pro míru μ zadanou předpisem (9) snadné ukázat.

Třetím krokem je aproximovat $S = \bigcup S_n$, kde S_n jsou konečné do sebe vnořené podmnožiny S, a vhodně zúžit operátor Ω na operátor Ω_n na $\mathbb{N}^{S_n}$, tak že $\Omega_n \to \Omega$ a $|(\Omega_n - \Omega)(f)|$ má μ-integrovatelnou majorantu. Z 1. kroku pak $\int \Omega_n f \; \mathrm{d}\mu = 0$ a limitou $n \to \infty$ je důkaz dokončen.

Tvrzení 2.3.
Nechť operátor Ω na $C\big(\mathbb{N}^S\big)$ je Markovský generátor ZR procesu s $g(k) = 1_{[k>0]}$. Nechť $\big(S(t)\big)$ je korespondující (ve smyslu (2)) Markovská semigrupa. Buď μ míra na $\mathbb{N}^S$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\int S(t)f \; \mathrm{d}\mu = \int f \; \mathrm{d}\mu \quad \forall\, t \geq 0 \qquad \forall\, f$ *omezenou spojitou na* $\mathbb{N}^S$

(2) $\int \Omega f \; \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \forall\, f$ *cylindrickou na* $\mathbb{N}^S$, *μ-integrovatelnou.*

Důkaz tvrzení 2.3:
Uvědomme si, že je-li funkce f cylindrická omezená, pak také $S(t)f$ je cylindrická omezená pro každé $t \geq 0$.
Z korespondence (2) mezi $S(t)$ a Ω plyne

$$\int S(t)f - f \; \mathrm{d}\mu = \int_0^t \Big(\int \Omega S(u) f \mathrm{d}\mu \Big) \; \mathrm{d}u = \int \Big(\int_0^t \Omega S(u) f \mathrm{d}u \Big) \; \mathrm{d}\mu, \tag{10}$$

kde je ovšem pro druhou rovnost potřeba ověřit předpoklady pro záměnu integrálů.

Nechť platí *(2)*. Pro důkaz *(1)* stačí dokázat rovnost $\mu S(t) = \mu \; \forall t \geq 0$ pro bazové množiny $\mathcal{X}$ (viz definice ZR procesu). Tzn. stačí dokázat *(1)* pro cylindrické funkce.
Buď f libovolná cylindrická omezená.
Z předpokladu je $\int \Omega S(t) f \mathrm{d}\mu = 0$ pro každé $t \geq 0$ a tudíž i $\int_0^t \Big(\int \Omega S(u) f \mathrm{d}\mu \Big) \mathrm{d}u = 0$.
Pro záměnu integrálů v (10) stačí nalézt integrovatelnou majorantu pro $\Omega S(u) f$.
Protože f je omezená, existuje $N \in \mathbb{N} : |f(\eta)| \leq N \; \forall \eta$ a potom

$$|S(u)f(\eta)| \leq \int |f(\xi)| \; P_u^\eta(\mathrm{d}\xi) \leq N \; \forall \eta, \; \forall u \geq 0.$$

$S(u)f$ je cylindrická $\forall \; u \geq 0$, speciálně pro $S(t)f$ odtud existuje konečná $K \subset S$, že $S(u)f(\eta) \; \forall \; 0 \leq u \leq t$ zavisí na η jen přes souřadnice z K. Tudíž

$$|\Omega S(u) f(\eta)| \leq \sum_{x \in K} \sum_{y \in K} 1_{[\eta(x)>0]} p(x,y) |S(u)f(\eta^{x,y}) - S(u)f(\eta)| \leq 2N|K|^2.$$

Lze provést záměnu integrálů, tedy $\int S(t)f - f \; \mathrm{d}\mu = 0$.

Nechť platí *(1)*.
Buď f cylindrická, μ-integrovatelná. Označme $f_N(\eta) = \begin{cases} f(\eta) & \text{pokud } |f(\eta)| \leq N \\ N & \text{pokud } f(\eta) > N \\ -N & \text{pokud } f(\eta) < -N \end{cases}$
Zřejmě f_N je cylindrická a omezená, proto z předpokladu platí $\int S(t) f_N - f_N \; \mathrm{d}\mu = 0$ $\forall t \geq 0$. Použitím (10) dostáváme $\int_0^t \big(\int S(u) \Omega f_N \mathrm{d}\mu \Big) \; \mathrm{d}u = 0 \; \forall t \geq 0$. Protože vnitřní integrál je spojitou funkcí u, dostáváme $\int S(u) \Omega f_N \mathrm{d}\mu = 0 \quad \forall u \geq 0$. Speciálně volbou $u = 0$ pak plyne $\int \Omega f_N \mathrm{d}\mu = 0$. Zřejmě $\Omega f_N \to \Omega f$ bodově.
Abychom dokázali $\int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0$, stačí nalézt integrovatelnou majorantu pro $|\Omega(f - f_N)|$. Tou je konst.$*f$, neboť jsme předpokládali f integrovatelnou.
Tedy $|\int \Omega f \mathrm{d}\mu| \leq \int |\Omega(f - f_N)| \; \mathrm{d}\mu \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

3. Aplikace

Pokusíme se nyní co nejlépe popsat množinu invariantních měr pro případ ZR procesu popsaného v příkladě 3), speciálně 2).
Nejprve **druhý příklad**:
máme ZR proces definovaný operátorem (6) odvozený od náhodné procházky na $\mathbb{Z}$. Tzn. pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ je $p(x, x+1) = p$ a $p(x, x-1) = q$, ostatní přechody mají pravděpodobnost nula.
První krok k získání součinové invariantní míry je podle výše uvedené věty nalezení funkce π na $\mathbb{Z}$ řešící soustavu rovnic (8) a splňující $0 < \pi(x) < 1$. V tomto našem případě je rovnice (8) tvaru

$$\pi(x) = p\pi(x-1) + q\pi(x+1) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

a všechna její řešení jsou $\pi(x) = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^x$, A, B libovolné konstanty. Ovšem vzhledem k podmínce $0 < \pi(x) < 1$ jsou pro aplikování věty 2.2 ze všech těchto řešení vhodná jen konstantní řešení: $\pi(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{Z}$, kde $0 < A < 1$. Potom dostáváme, že součinové míry s marginály

$$\nu_A(\eta : \eta(x) = k) = A^k(1 - A)$$

$\forall x \in S$ jsou invariantní pro tento ZR proces, kdykoliv $0 < A < 1$.
Tedy

$$\{\nu_A : 0 < A < 1\} \subset \mathcal{I}.$$

Lze v tomto případě dokonce dokázat, že právě tyto součinové míry tvoří množinu extremálních bodů pro množinu invariantních měr, tj. $\{\nu_A : 0 < A < 1\} = \mathcal{I}_e$. Důkaz je technicky náročný a lze jej nalézt v [1]. Ve smyslu tvrzení 2.1 nám množina součinových měr $\{\nu_A : 0 < A < 1\}$ dobře popisuje celou $\mathcal{I}$.

Třetí příklad:
máme ZR proces definovaný operátorem (7) a rozdíl od předchozího příkladu je ve zobecnění Markovského řetězce $p(x, y)$, který už není prostorově homogenní. Abychom mohli použít větu 2.2 a nalézt k tomuto procesu invariantní míry, je nyní třeba řešit soustavu diferenčních rovnic

$$\pi(x) = p_x\pi(x-1) + q_x\pi(x+1) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

V této obecnosti její řešení explicitně nevyjádříme. Podívejme se alespoň na speciální případ:

$$p_x \equiv p \quad \forall x \le 0 \qquad \& \qquad p_x \equiv \tilde{p} \quad \forall x \ge 1 \quad \text{pro } 0 < p \ne \tilde{p} < 1.$$

Všechna řešení rovnice (11) jsou potom tvaru:

$$\pi(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^{|x|} \quad \forall x \le 0, \qquad \pi(x) = \tilde{A} + \tilde{B}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\right)^x \quad \forall x \ge 1, \tag{12}$$

kde platí

$$(q - p)A = (\tilde{q} - \tilde{p})\tilde{A} \quad \& \quad pB - \tilde{p}\tilde{B} = \tilde{q}\tilde{A} - qA. \tag{13}$$

V rámci (13) lze koeficienty $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ volit tak, aby byla splněna podmínka

$$0 < \pi(x) < 1. \tag{14}$$

Rozeberme řešení pro jednotlivé případy pravděpodobností $p, \tilde{p}$:

$I.$ $\quad p \leq 1/2,\ \tilde{p} \geq 1/2$

$II.$ $\quad p \geq 1/2,\ \tilde{p} \leq 1/2$

$III.$ $\quad p > 1/2,\ \tilde{p} > 1/2$

$IV.$ $\quad p < 1/2,\ \tilde{p} < 1/2,$

z nichž případ, kdy $p = \tilde{p}$, vyjmeme. Množinu všech funkcí π, splňujících (12),(13) a (14) označme $\mathcal{R}$. Kdykoliv je $\mathcal{R}$ neprázdná, dostaneme ji ve tvaru $\mathcal{R} = \{\pi_C : c_1 < C < c_2\}$. $\mathcal{R}$ je tedy indexovaná jedním parametrem z otevřeného intervalu (c_1, c_2), podobně jako v příkladě 2), s tím rozdílem, že π_C není konstantní.
Množina $\mathcal{R}$ vždy intuitivně odpovídá představě o pohybu částic po $\mathbb{Z}$ v jednotlivých situacích:

I. $\underset{q \geq 1/2}{\longleftarrow} \quad \underset{\tilde{p} \geq 1/2}{\longrightarrow}$ Nastává buď $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} > 1$ a $\frac{q}{p} > 1$, což vede z podmínky $\pi < 1$ na $B = 0 = \tilde{B}$ a z podmínky $\pi > 0$ na $A = 0 = \tilde{A}$,
nebo $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} > 1$ a $\frac{q}{p} = 1$, což vede na $\tilde{A} = 0 = \tilde{B}$ a $A + B = 0$,
nebo $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = 1$ a $\frac{q}{p} > 1$, což vede na $A = 0 = B$ a $\tilde{A} + \tilde{B} = 0$.

Dostáváme jedině $\pi \equiv 0$ tj. $\mathcal{R} = \emptyset$.

II. $\underset{p \geq 1/2}{\longrightarrow} \quad \underset{\tilde{q} \geq 1/2}{\longleftarrow}$ Nastává buď $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} < 1$ a $\frac{q}{p} < 1$, potom z podmínky $\pi > 0$ dostaneme $A = 0 = \tilde{A}$ a pro $B, \tilde{B}$ vztah $pB = \tilde{p}\tilde{B}$,
nebo $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} < 1$ a $\frac{q}{p} = 1$, což vede na $\tilde{A} = 0$ a $\tilde{p}\tilde{B} = \frac{1}{2}(A + B)$,
nebo $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = 1$ a $\frac{q}{p} < 1$, což vede na $A = 0$ a $pB = \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{B})$.

Dostáváme

$$\mathcal{R} = \{\pi(x) = B\big(\frac{q}{p}\big)^{|x|} \text{ pro } x \leq 0,\ \pi(y) = B\frac{p}{\tilde{p}}\big(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\big)^{y} \text{ pro } y \geq 1\ :\ 0 < B < b_2\},$$

kde b_2 závisí na konkrétní volbě $p, \tilde{p}$, aby platilo $\pi < 1$. Snadno zjistíme, že $b_2 = \min(1, \frac{\tilde{q}}{p})$. To znamená, že půjde-li „levá“ procházka rychleji $(p > \tilde{q})$, je třeba B omezit shora podílem $\frac{\tilde{q}}{p}$. Bude-li situace opačná a „pravá“ procházka půjde rychleji $(p < \tilde{q})$, stačí B omezit shora 1. Tato nesymetrie vzniká z nesymetrického rozdělení $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$ a $\mathbb{Z} \cap (0, \infty)$.

III. $\underset{p > 1/2}{\longrightarrow} \quad \underset{\tilde{p} > 1/2}{\longrightarrow}$ Aby platilo $0 < \pi < 1$, je nutně $\tilde{B} = 0$ a $0 < \tilde{A} < 1$ a z podmínky (13) plyne pro A, B :
$A = \frac{\tilde{q}-\tilde{p}}{q-p}\tilde{A} =: F(\tilde{A}), \qquad B = \frac{1}{p}(\tilde{q} - \frac{\tilde{q}-\tilde{p}}{q-p})\tilde{A} =: G(\tilde{A})$
(speciálně pro $\tilde{p} > p$ je $A > \tilde{A}$ a $B < 0$).

Dostáváme

$$\mathcal{R} = \{\pi(x) = F(\tilde{A}) + G(\tilde{A})\big(\frac{q}{p}\big)^{|x|} \text{ pro } x \leq 0,\ \pi(y) = \tilde{A} \text{ pro } y \geq 1\ :\ 0 < \tilde{A} < a_2\},$$

kde a_2 závisí na konkrétní volbě $p, \tilde{p}$, aby platilo $\pi < 1$. Zase jej v jednotlivých případech snadno vyjádříme, výraz však bude složitější než v předchozím případě.

IV. $\underset{q>1/2}{\longleftarrow}$ $\underset{\tilde{q}>1/2}{\longleftarrow}$ Kvůli $0<\pi<1$, je nutně $B=0$ a $0<A<1$ a z podmínky (13) plyne pro $\tilde{A},\tilde{B}$:
$\tilde{A}=\frac{q-p}{\tilde{q}-\tilde{p}}A=:H(A)$, $\tilde{B}=\frac{1}{\tilde{p}}(q-\frac{q-p}{\tilde{q}-\tilde{p}})A=:J(A)$
(speciálně pro $\tilde{q}>q$ vyjde $\tilde{A}<A$ a $\tilde{B}>0$).

Dostáváme

$$\mathcal{R}=\{\pi(x)=A \text{ pro } x\le 0,\ \pi(y)=H(A)+J(A)\big(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\big)^y \text{ pro } y\ge 1\ :\ 0<A<c_2\},$$

kde c_2 závisí na konkrétní volbě $p,\tilde{p}$, aby platilo $\pi<1$.

Rozborem případů jsme našli všechna řešení rovnice (11) v našem speciálním případě, která splňují (14). Označme $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ množinu součinových měr daných větou 2.2 pro každý z případů I-IV. V případě I je $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}=\emptyset$. V případech II-IV plyne z citované věty, že $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}\subset\mathcal{I}$. V případě II vypadá množina $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ následovně

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{R}}=\bigcup_{0<B<b_2}\Big\{\nu_B\ :\ \nu_B\big(\eta:\eta(x)=k\big) &= \Big(1-B\big(\frac{p}{q}\big)^x\Big)B^k\Big(\frac{p}{q}\Big)^{kx} && \forall x\le 0\\ &= \Big(1-B\frac{p}{\tilde{p}}\big(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\big)^x\Big)\Big(\frac{p}{\tilde{p}}B\Big)^k\Big(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\Big)^{kx} && \forall x\ge 1\\ \forall k\in\mathbb{N}\Big\}.\end{aligned}$$

V případech III a IV bude zápis množiny $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ vypadat obdobně.

Otázkou v tomto příkladě zůstává, platí-li (stejně jako v příkladě 2), že jsme nalezli přímo všechny extremální body množiny invariantních měr $\mathcal{I}$.

Literatura

[1] Andjel, E.D.: Invariant measures for the zero range proces, Ann.Probab. 10, 525-547, 1982.

[2] Fremlin, D.H.: Measure Theory, Vol. 4: Topological measure spaces, in preparation. Partial drafts available via http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm.

[3] Holley, R.: A Class of Interactions in Infinite Particle System, Adv. in Math. 5, 291-309, 1970.

[4] Liggett, T.M., Spitzer, F.: Ergodic Theorems for Coupled Random Walks and Other Systems with Locally Interacting Components, Z. Wahrsch. Gebiete 56, 443/468, 1981.

[5] Liggett, T.M.: Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] Rogers, L.C.G., Williams, D.: Diffusions, Markov Processes and Martingales, Cambridge University Press, UK, Vol. 1, 2000.

[7] Štěpán, J.: A noncompakt Choquet Theorem, Comment. Math. Univ. Carolinae 25,1, 73-89, 1984.

[8] Yosida, K.: Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

ÚTIA AV ČR, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8
E-mail: fajfrova@karlin.mff.cuni.cz