ROBUST'2000, 368 – 381

VÝPOČET NIEKTORÝCH EXAKTNÝCH ROZDELENÍ POMOCOU CHARAKTERISTICKÝCH FUNKCIÍ

VIKTOR WITKOVSKÝ

ABSTRAKT. The inversion formula allows to evaluate (numerically) the distribution function of a linear combination of independent random variables. The method is not new, it is based on the result derived by Gil-Pelaez (1951). In this paper we discuss the method for evaluation of the distribution function of the linear combination of independent random variables distributed as $\chi^2_\nu(\delta^2)$ (non-central chi-square distribution), $1/\chi^2_\nu$ (inverted chi-square distribution), t_ν (Student's t distribution) and F_{ν_1,ν_2} (Fisher-Snedecor distribution). The numerical evaluation of the distribution functions and the quantiles of the distributions is illustrated by several examples: the power analysis of one test, distribution of the Durbin-Watson test statistic, exact confidence interval for the common mean of several normal populations.

Резюме. Обратная формула позволяет вычислитъ функцию распределения линейной комбинации независимых случайных величин. Метод основывается на резулътатах полученных Гил-Пелаезом (1951). В статъи рассмотрен метод вычисления функции распределения, линейной комбинации независимых случайных величин, которые распределены по $\chi^2_\nu(\delta^2)$ (нецентралъное хи-квадрат распределение), $1/\chi^2_\nu$ (обратное хи-квадрат распределение), t_ν (распределение Студента) и F_{ν_1,ν_2} (распределенние Фишер-Снедокора). Полученные значения функций распределения и квантилъей иллыустрируются несколъкими примерами.

1. Úvod

Gil-Pelaez (1951) publikoval verziu vety o inverznej transformácii charakteristickej funkcie, ktorá umožňuje výpočet distribučnej funkcie (v prípade spojitého rozdelenia aj hustoty) pomocou jednorozmernej numerickej integrácie. V tomto príspevku ponúkame podrobnejší prehľad metódy a jej aplikácie na výpočet distribučnej funkcie lineárnej kombinácie nezávislých náhodných premenných s rozdelením $\chi^2_\nu(\delta^2)$, $1/\chi^2_\nu$ (čo je špeciálny prípad inverzného gamma rozdelenia), t_ν a F_{ν_1,ν_2}. Charakteristické funkcie inverzného gamma, t a F rozdelenia závisia od špeciálnych matematických funkcií (vo všeobecnosti komplexnej premennej). Presnejšie, charakteristická funkcia inverzného gamma rozdelenia a Studentovho t rozdelenia závisí od modifikovanej Besselovej funcie druhého druhu a charakteristická funkcia Fisherovho-Snedecorovho F rozdelenia závisí od konfluentnej hypergeometrickej funkcie druhého druhu.

Prvou zaujímavou aplikáciou tejto metódy bol tzv. Imhofov algoritmus (pozri Imhof (1961), tiež Davies (1973)), ktorý odvodil formulu na numerický výpočet

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62E15; Secondary 62E25.

Key words and phrases. Characteristic function of the $\chi^2_\nu(\delta^2)$, $1/\chi^2_\nu$, t_ν and F_{ν_1,ν_2} distribution; Linear combination of independent random variables.

The research has been supported by the Grant VEGA 1/7295/20 from the Science Grant Agency of the Slovak Republic.

rozdelenia lineárnej kombinácie nezávislých necentrálne rozdelených chi-kvadrát náhodných premenných. V prácach Witkovský (1999), Witkovský (2001a) a Witkovský (2001b) bola táto metóda výpočtu aplikovaná na výpočet distribučnej funkcie, kvantily a konfidenčné intervaly pre lineárne kombinácie inverzného gamma rozdelenia, Studentovho t rozdelenia a Fisherovho F rozdelenia. Ako prehľadový článok o numerickej inverzii charakteristickej funkcie ako nástroja na získanie distribučnej funkcie možno odporúčiť prácu Waller et al. (1995).

Táto metóda môže byť využitá aj na numerický výpočet hustoty a kvantilov rozdelenia lineárnej kombinácie nezávislých náhodných premenných. V príspevku je použitie metódy ilustrované na niekoľkých príkladoch: analýza sily testu, rozdelenie Durbin-Watsonovej štatistiky, Behrens-Fisherov problém, výpočet konfidenčného intervalu pre spoločnú strednú hodnotu výberu z niekoľkých normálnych populácií.

2. Veta o inverznej transformácii

V tejto časti uvádzame výsledok z práce Gil-Pelaez (1951), kde bola odvodená verzia vety o inverznej transformácii charakteristickej funkcie, ktorá je vhodná na numerický výpočet hodnoty distribučnej funkcie pomocou jednorozmernej numerickej integrácie.

Veta 1. *Nech $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$ označuje charakteristickú funkciu jednorozmernej distribučnej funkcie $F(x)$. Potom, ak x označuje bod, v ktorom je distribučná funkcia spojitá, platia nasledujúce vzťahy:*

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-itx}\phi(t) - e^{itx}\phi(-t)}{2it}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi(t)}{t}\right) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Navyše, ak ide o spojité rozdelenie, hustota je daná vzťahom

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(e^{itx}\phi(-t) - e^{-itx}\phi(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-itx}\phi(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Základné vlastnosti podintegálnej funkcie zo vzťahu (1) charakterizované v hraničných bodoch sú uvedené v nasledujúcom tvrdení:

Lema 1. *Nech $F(x)$ označuje distribučnú funkciu náhodnej premennej X, pričom existuje jej stredná hodnota $E(X)$, a nech $\phi(t)$ označuje jej charakteristickú funkciu. Potom*

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi(t)}{t}\right) = E(X) - x, \quad a \quad \lim_{t\to\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi(t)}{t}\right) = 0. \tag{3}$$

Důkaz. Pre prvú rovnosť platí:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi(t)}{t}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{i}\left(\frac{e^{-itx}\phi(t) - e^{itx}\phi(-t)}{2t}\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(e^{-itx}\phi(t)\right)'\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i}\left((-ix)e^{-itx}\phi(t) + e^{-itx}\phi'(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i}\left(\phi'(t)|_{t=0} - ix\right) = E(X) - x. \end{aligned} \tag{4}$$

Druhá rovnosť vyplýva priamo z faktu, že funkcia $e^{-itx}\phi(t)$ je ohraničená v module. $\square$

Uvažujme teraz lineárnu kombináciu nezávislých náhodných premenných $X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$. Nech $\phi_{X_k}(t)$ označuje charakteristickú funkciu náhodnej premennej X_k, $k = 1, \ldots, n$. Potom charakteristická funkcia náhodnej premennej X je

$$\phi_X(t) = \phi_{X_1}(\lambda_1 t) \cdots \phi_{X_n}(\lambda_n t), \tag{5}$$

a jej distribučnú funkciu $F_X(x) = \Pr\{X \le x\}$ možno určiť zo vzťahu (1), pričom $\phi(t) = \phi_X(t)$. Všimnime si, že podľa lemy 1 platí

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi_X(t)}{t}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(X_k) - x, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to \infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-itx}\phi_X(t)}{t}\right) = 0. \tag{7}$$

Vzťah (1) možno priamo využiť na približný numerický výpočet hodnoty distribučnej funkcie $F_X(x)$ použitím konečnej oblasti integrovania $0 \le t \le T$, $T < \infty$. Vo všeobecnosti, pri výpočte treba pracovať s komplexnými funkciami. Stupeň presnosti numerickej aproximácie závisí od chyby spôsobenej useknutím oblasti integrovania a od chyby spôsobenej numerickou integračnou metódou.

3. Charakteristické funkcie $\chi^2_\nu(\delta^2)$, $IG_{\alpha,\beta}$, t_ν a F_{ν_1,ν_2} náhodnej premennej

V tejto časti uvedieme uzavretý tvar charakteristických funkcií pre náhodné premenné $\chi^2_\nu(\delta^2)$ (necentrálny chi-kvadrát) $IG_{\alpha,\beta}$ (inerzné gamma), t_ν (Studentovo t) a F_{ν_1,ν_2} (Fisher-Snedecorovo F).

3.1. Necentrálne chi-kvadrát rozdelenie.

Veta 2. *Nech $X \sim \chi^2_\nu(\delta^2)$ označuje náhodnú premennú s necentrálnym chi-kvadrát rozdelením s ν stupňami voľnosti a parametrom necentrality δ^2. Potom charakteristická funkcia náhodnej premennej X je*

$$\phi^{\chi^2}_{\nu,\delta^2}(t) = E\left(e^{itX}\right) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}\nu} \exp\left\{\frac{it\delta^2}{1-2it}\right\}. \tag{8}$$

Důkaz. Pozri napr. Stuart & Ord (1987, str. 278). $\square$

3.2. Inverzné gamma rozdelenie. Nech $Z \sim G(\alpha,\beta)$ označuje náhodnú premennú s gamma rozdelením, t.j. s hustotou $f_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^{\alpha-1} e^{-z/\beta}$, kde $\alpha > 0$ je parameter tvaru a $\beta > 0$ je parameter škály. Centrálne rozdelená chi-kvadrát náhodná premenná χ^2_ν s ν stupňami voľnosti je špeciálnym prípadom gamma náhodnej premennej, $\chi^2_\nu \sim G(\frac{\nu}{2}, 2)$. Potom náhodná premenná $Y = Z^{-1}$ je známa ako inverzná gamma náhodná premenná, $Y \sim IG(\alpha,\beta)$. Jej hustota rozdelenia $f_Y(y)$ je definovaná pre $y \ge 0$ vzťahom

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha+1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta y}\right\}. \tag{9}$$

Veta 3. *Nech $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ označuje inverznú gamma náhodnú premennú s hustotou $f_Y(y)$ danou vzťahom (9). Potom charakteristická funkcia náhodnej premennej Y je*

$$\phi^{IG}_{\alpha,\beta}(t) = E\left(e^{itY}\right) = \frac{2(-it\beta)^{\frac{1}{2}\alpha} K_\alpha\left\{\frac{2}{\beta}(-it\beta)^{\frac{1}{2}}\right\}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \tag{10}$$

pričom $K_\alpha(z)$ označuje modifikovanú Besselovu funkciu druhého druhu.

Důkaz. S využitím vzťahu (2.2.16.1) v práci Prudnikov et al. (1981):

$$\int_0^\infty y^{\nu-1} e^{-py-\frac{q}{y}}\, dy = 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu\left\{2(pq)^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{11}$$

kde ν, p, q sú také komplexné čísla, že $\mathrm{Re}(p) > 0$ a $\mathrm{Re}(q) > 0$, a $K_\nu(z)$ označuje modifikovanú Besselovú funkciu druhého druhu (podrobnosti pozri v Abramiwitz & Stegun (1965, str. 374)), priamo dostávame Laplaceovu transformáciu Y:

$$E\left(e^{-tY}\right) = \frac{2(t\beta)^{\frac{1}{2}\alpha} K_\alpha\left\{\frac{2}{\beta}(t\beta)^{\frac{1}{2}}\right\}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}. \tag{12}$$

Substitúciou t za $\varepsilon - it$, kde ε je malé kladné reálne číslo, a limitným prechodom $\varepsilon \to 0$, dostávame charakteristickú funkciu $\phi^{IG}_{\alpha,\beta}(t)$ náhodnej premennej Y, ktorá je daná vzťahom (10). □

Bez dôkazov uvedieme niektoré vlastnosti charakteristickej funkcie (10).

Lema 2. *Nech $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ označuje inverznú gamma náhodnú premennú s charakteristickou funkciou $\phi^{IG}_{\alpha,\beta}(t)$ danou vzťahom (10). Nech $Z = \lambda Y$, kde λ je reálne číslo. Nech ďalej $\kappa_Z(t)$ označuje kumulantovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej Z, teda $\kappa_Z(t) = \log \phi_Z(t) = \log \phi^{IG}_{\alpha,\beta}(\lambda t)$. Potom prvá a druhá derivácia funkcie $\kappa_Z(t)$ je daná vzťahmi:*

$$\kappa'_Z(t) = \frac{\alpha}{t} + \frac{i\lambda}{(-it\lambda\beta)^{\frac{1}{2}}} R(t), \tag{13}$$

$$\kappa''_Z(t) = -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{i\lambda}{t\beta}\left(R^2(t) - \frac{(1+\alpha)\beta}{(-it\lambda\beta)^{\frac{1}{2}}} R(t) - 1\right), \tag{14}$$

kde

$$R(t) = \frac{K_{\alpha+1}\left\{\frac{2}{\beta}(-it\lambda\beta)^{\frac{1}{2}}\right\}}{K_\alpha\left\{\frac{2}{\beta}(-it\lambda\beta)^{\frac{1}{2}}\right\}}. \tag{15}$$

Ako priamy dôsledok dostávame vzťah pre strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej Z:

$$E(Z) = \lim_{t\to 0} \frac{\kappa'_Z(t)}{i} = \frac{\lambda}{(\alpha-1)\beta}, \quad \alpha > 1, \tag{16}$$

$$Var(Z) = \lim_{t\to 0} \frac{\kappa''_Z(t)}{i^2} = \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2\beta^2(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2. \tag{17}$$

Lema 3. *Nech $Y_n \sim IG(\alpha_n, \beta)$ označuje inverznú gamma náhodnú premennú s parametrami $\alpha_n = n + \frac{1}{2}$ a $\beta > 0$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$. Označme ďalej $w = \frac{2}{\beta}(-2it)^{\frac{1}{2}}$. Potom charakteristická funkcia $\phi_n(t)$ náhodnej premennej Y_n je daná vzťahmi*

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \exp\{-w\} \\ \phi_1(t) &= \exp\{-w\}(1+w) \\ \phi_2(t) &= \exp\{-w\}\left(1 + w + \frac{1}{3}w^2\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Pre $n \geq 2$, možno funkciu $\phi_{n+1}(t)$ vyjadriť rekurentným vzťahom:

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{w^2}{(2n+1)(2n-1)}\phi_{n-1}(t) + \phi_n(t). \tag{19}$$

3.3. **Studentovo t rozdelenie.**

Veta 4. *Nech $X \sim t_\nu$ označuje náhodnú premennú, ktorá má Studentovo t rozdelenie s ν stupňami voľnosti, ktorej hustota je daná vzťahom:*

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}, \tag{20}$$

pričom $-\infty < x < \infty$. Potom charakteristická funkcia náhodnej premennej $X \sim t_\nu$ je

$$\phi_\nu^t(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(\nu^{\frac{1}{2}}|t|\right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\frac{\nu}{2}}\left\{\nu^{\frac{1}{2}}|t|\right\}, \tag{21}$$

kde $K_\alpha\{z\}$ označuje modifikovanú Besselovu funkciu druhého druhu.

Důkaz. Charakteristická funkcia náhodnej premennej $X \sim t_\nu$ je

$$\begin{aligned} \phi_\nu^t(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})} dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})\nu^{\frac{\nu}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(\nu + x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})\nu^{\frac{\nu}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{itx}}{(\nu + x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(\nu + x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx\right] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})\nu^{\frac{\nu}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-itx} + e^{itx}}{(\nu + x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})\nu^{\frac{\nu}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_{0}^{\infty} \frac{2\cos(tx)}{(\nu + x^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx. \end{aligned} \tag{22}$$

V súlade so vzťahom (9.6.25) v Abramowitz & Stegun (1965, str. 376) dostávame

$$K_{\frac{\nu}{2}}\{tz\} = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})(2z)^{\frac{\nu}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}t^{\frac{\nu}{2}}}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + z^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}\, dx \tag{23}$$

pre $\mathrm{Re}(\nu) \geq -1$, $t > 0$ a $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$. Voľbou $z = \nu^{\frac{1}{2}}$ a s využitím faktu, že $\cos(tx) = \cos(-tx)$ dostávame tvrdenie vety. □

Nasledujúca lema je v zhode so známym výsledkom daným v práci Mitra (1978). Pozri tiež Johnson et al. (1995, str. 367). Dôkaz vyplýva priamo z vlastnosti modifikovanej Besselovej funkcie druhého druhu, pozri Abramowitz & Stegun (1965, str. 444).

Lema 4. *Nech ν je nepárne číslo, $\nu = 2n+1$ pre nejaké celé číslo n, potom charakteristická funkcia náhodnej premennej $X \sim t_\nu$ je daná vzťahom*

$$\phi_\nu^t(t) = \varphi_n(t) \exp\left\{-\nu^{\frac{1}{2}}|t|\right\}, \tag{24}$$

kde $\varphi_n(t)$ je funkcia daná rekurentným vzťahom

$$\varphi_{k+1}(t) = \frac{\nu t^2}{(2k+1)(2k-1)}\varphi_{k-1}(t) + \varphi_k(t), \tag{25}$$

$k = 1, \ldots, n-1$, pričom $\varphi_0(t) = 1$ a $\varphi_1(t) = 1 + \nu^{\frac{1}{2}}|t|$.

Dôsledok 1. *Charakteristická funkcia $\phi_\nu^t(t)$ náhodnej premennej $X \sim t_\nu$ s $\nu = 2n+1$ stupňami voľnosti, pričom $n = 0, 1, 2, 3$ je daná vzťahmi*

$$\begin{aligned}
\phi_1^t(t) &= \exp\{-|t|\} \\
\phi_3^t(t) &= \left(1+\sqrt{3}|t|\right)\exp\left\{-\sqrt{3}|t|\right\} \\
\phi_5^t(t) &= \left(1+\sqrt{5}|t|+\frac{5}{3}t^2\right)\exp\left\{-\sqrt{5}|t|\right\} \\
\phi_7^t(t) &= \left(1+\sqrt{7}|t|+\frac{14}{5}t^2+\frac{7\sqrt{7}}{15}|t|^3\right)\exp\left\{-\sqrt{7}|t|\right\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

3.4. **Fisher-Snedecorovo F rozdelenie.**

Veta 5. *Nech $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ označuje náhodnú premennú, ktorá má centrálne Fisher-Snedecorovo F rozdelenie s ν_1 a ν_2 stupňami voľnosti a hustotou danou vzťahom*

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-(\frac{\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2})}, \tag{27}$$

pričom $0 < x < \infty$. Potom charakteristická funkcia náhodnej premennej $X \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ je

$$\phi_{\nu_1,\nu_2}^F(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\Psi\left(\frac{\nu_1}{2}, 1-\frac{\nu_2}{2}; -it\frac{\nu_2}{\nu_1}\right), \tag{28}$$

pričom $\Psi(a, c; z)$ označuje konfluentnú hypergeometrickú funkciu druhého druhu definovanú integrálnou rovnicou

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt. \tag{29}$$

Důkaz. Phillips (1982). □

4. Aplikácie

4.1. **Analýza sily testu.**

Príklad 1. Uvažujme experiment na porovnanie efektu rôznych druhov hnojív určených na zvýšenie úrody, v ktorom bude n experimentálnych políčok. Ide o tzv. *cross-over trial*, teda taký experiment, že na každom políčku použijeme všetky úrovne ošetrenia (kontrolná vzorka bez hnojiva, hnojivo typu P, hnojivo typu K, hnojivo typu N).

Po skončení experimentu chceme testovať, či rôzne úrovne ošetrenia majú rovnaký efekt na úrodu. Chceli by sme odhaliť (minimálny) rozdiel vo výnose asi 40g medzi jednotlivými ošetreniami. Z predchádzajúcich experimentov a z odborných článkov je odhadnutá *between subject* smerodajná odchýlka (55.2g) a *within subject* smerodajná odchýlka (23g), ktoré budeme považovať za skutočné parametre. Otázka je, koľko políčok potrebujeme v experimente, aby sme s vysokou pravdepodobnosťou mohli zamietnuť nulovú hypotézu o rovnosti efektov jednotlivých ošetrení, pokiaľ skutočný rozdiel je aspoň 40g.

Budeme uvažovať zmiešaný vyvážený model dvojitého triedenia:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \tag{30}$$

kde $i = 1, \ldots, k$, pričom $k = 4$ a $j = 1, \ldots, n$. Označme $y = (y_{11}, \ldots, y_{kn})'$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)'$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)'$, a $\epsilon = (\epsilon_{11}, \ldots, \epsilon_{kn})'$. Pretože výber políčok do experimentu je náhodný z vopred určenej populácie políčok, budeme predpokladať normalitu rozdelenia vektora $\beta \sim N(0, \sigma_\beta^2 I_n)$ a vektora chýb $\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2 I_{kn})$. Efekt ošetrenia budeme považovať za pevný (nenáhodný) pričom budeme predpokladať platnosť reštrikcie $\sum_{i=1}^k \tau_i = 0$ pre skutočné hodnoty úrovní ošetrenia. Model možno zapísať v maticovom tvare

$$y = (1_k \otimes 1_N)\mu + (I_k \otimes 1_N)\tau + (1_k \otimes I_N)\beta + (I_k \otimes I_N)\epsilon. \tag{31}$$

Navyše, z prepokladov vyplýva rozdelenie vektora y:

$$y \sim N\left((1_k \otimes 1_N)\mu + (I_k \otimes 1_N)\tau, \sigma_\beta^2 (J_k \otimes I_N) + \sigma_\epsilon^2 (I_k \otimes I_N)\right). \tag{32}$$

Zodpovedajúca tabuľka analýzy rozptylu pre daný model je nasledovná:

	Efekt	SS_i	DF_i	$E(MS_i)$
1	μ	$y'(J \otimes J)y$	1	$kn\mu^2 + \sigma_\epsilon^2$
2	τ	$y'(\bar{C} \otimes \bar{J})y$	$k-1$	$\frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^k \tau_i^2 + \sigma_\epsilon^2$
3	β	$y'(\bar{J} \otimes \bar{C})y$	$n-1$	$k\sigma_\beta^2 + \sigma_\epsilon^2$
4	ϵ	$y'(\bar{C} \otimes \bar{C})y$	$(k-1)(n-1)$	σ_ϵ^2
5	Celkom	$y'(I \otimes I)y$	kn	$\mu^2 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \tau_i^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\epsilon^2$

kde $\bar{J} = 1(1'1)^{-1}1'$ a $\bar{C} = I - \bar{J}$. Pre test hypotézy $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$ použijeme F-štatistiku z ANOVA-tabuľky:

$$F = \frac{MS_2}{MS_4} = \frac{y'(\bar{C} \otimes \bar{J})y/(k-1)}{y'(\bar{C} \otimes \bar{C})y/(k-1)(n-1)} \sim F_{k-1,(k-1)(n-1)}(\lambda), \tag{33}$$

ktorá má necentrálne F-rozdelenie s $k-1$ a $(k-1)(n-1)$ stupňami voľnosti a parametrom necentrality $\lambda = n\sum_{i=1}^k \tau_i^2/\sigma_\epsilon^2$. Za platnosti nulovej hypotézy má F-štatistika centrálne F-rozdelenie s $k-1$ a $(k-1)(n-1)$ stupňami voľnosti.

Parameter necentrality λ závisí od n, takže aj sila testu $\beta(n, \lambda(n))$ závisí od n. Chceme odhaliť akýkoľvek rozdiel úrovní ošetrení, ktorý prevyšuje 40g. Extrémnym prípadom je situácia keď $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = -20$ a $\tau_3 = \tau_4 = 0$. V takom prípade $\sum_{i=1}^k \tau_i^2 = 800$. Takže, keď budeme predpokladať, že parameter necentrality bude $\lambda = n\sum_{i=1}^k \tau_i^2/\sigma_\epsilon^2 = n\frac{800}{23^2} = 1.5123n$, potom silu testu možno vypočítať pomocou Imhofovho algoritmu zo vzťahu:

$$\begin{aligned}
\beta(n, \lambda(n)) &= \Pr\left(F_{k-1,(k-1)(n-1)}(\lambda(n)) > F^\alpha_{k-1,(k-1)(n-1)}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\chi^2_{(k-1)}(\lambda(n))}{\chi^2_{(k-1)(n-1)}} \frac{(k-1)(n-1)}{(k-1)} > F^\alpha_{k-1,(k-1)(n-1)}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\chi^2_{(k-1)}(\lambda(n))}{(k-1)} - F^\alpha_{k-1,(k-1)(n-1)} \frac{\chi^2_{(k-1)(n-1)}}{(k-1)(n-1)} > 0\right),
\end{aligned}$$

kde $F^{\alpha}_{k-1,(k-1)(n-1)}$ je kritická hodnota $F_{k-1,(k-1)(n-1)}$ rozdelenia, taká, že

$$\Pr(F_{k-1,(k-1)(n-1)} \le F^{\alpha}_{k-1,(k-1)(n-1)}) = 1 - \alpha.$$

Výsledky takých výpočtov pre rôzne vopred zvolené hodnoty hladiny významnosti testu $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ a pre $n = 2, \dots, 15$ sú uvedené v nasledujúcej tabuľke. Z uvedeného vyplýva, že potrebujeme aspoň 15 políčok v experimente, aby sme odhalili rozdiel medzi jednotlivými úrovňami ošetrenia väčší ako 40g s pravdepodobnosťou väčšou ako 90%.

n	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$	n	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
2	0.0261	0.1200	0.2223	9	0.5843	0.8246	0.9033
3	0.0657	0.2326	0.3729	10	0.6644	0.8725	0.9335
4	0.1284	0.3575	0.5126	11	0.7339	0.9087	0.9549
5	0.2095	0.4796	0.6320	12	0.7925	0.9355	0.9697
6	0.3022	0.5901	0.7289	13	0.8406	0.9550	0.9799
7	0.3994	0.6848	0.8044	14	0.8792	0.9689	0.9868
8	0.4949	0.7627	0.8614	15	0.9096	0.9788	0.9914

4.2. **Durbin-Watsonov test.** Durbin-Watsonov test je často používaným nástrojom na testovanie adekvátnosti modelu. Presnejšie, test overuje nulovú hypotézu o nekorelovanosti chýb oproti alternatíve, že chyby sa správajú ako stacionárny AR(1) proces.

Uvažujme lineárny model

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

kde X označuje (nenáhodnú) maticu plánu, β je vektor neznámych parametrov a vektor chýb $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$. Označme $e = (e_1, \dots, e_n)'$, $e = y - X\hat{\beta}$ vektor rezíduí, pričom $\hat{\beta} = (X'X)^{-}X'y$ je odhad parametra β obyčajnou metódou najmenších štvorcov. Potom Durbin-Watsonova štatistika je definovaná ako

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t-1}^{n} e_t^2} = \frac{e'Ae}{e'e} = \frac{\varepsilon' MAM\varepsilon}{\varepsilon' M\varepsilon}, \tag{34}$$

kde $M = I - X(X'X)^{-}X'$ a matica A je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nech $\varepsilon \sim N(0, V)$, kde V je pozitívne definitná matica, a nech Q je symetrická matica patričných rozmerov. Označme rôzne nenulové vlastné čísla matice QV ako $\lambda_1, \dots \lambda_m$ s násobnosťami $\nu_1, \dots \nu_m$. Potom pre rozdelenie kvadratickej formy $\varepsilon' Q\varepsilon$ platí

$$\varepsilon' Q \varepsilon \sim \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi^2_{\nu_i}, \tag{35}$$

kde $\chi^2_{\nu_i}$ sú nezávislé náhodné premenné s centrálnym chi-kvadrát rozdelením a ν_i stupňami voľnosti.

Za platnosti nulovej hypotézy teda platí $V = \sigma^2 I_n$. Na testovanie nulovej hypotézy oproti alternatíve (existuje pozitívna autokorelácia prvého rádu) využijeme p-hodnotu, ktorá je daná ako

$$\begin{aligned} p &= \Pr(DW < DW_{obs}) \\ &= \Pr\left(\frac{\varepsilon' MAM\varepsilon}{\varepsilon' M\varepsilon} < DW_{obs}\right) \\ &= \Pr\left(\varepsilon' MAM\varepsilon - DW_{obs}\varepsilon' M\varepsilon < 0\right) \\ &= \Pr\left(\varepsilon' M(A - DW_{obs} I_n) M\varepsilon < 0\right) \\ &= \Pr\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi^2_{\nu_i} < 0\right), \end{aligned} \tag{36}$$

kde DW_{obs} označuje realizáciu Durbin-Watsonovej DW štatistiky a $\lambda_1, \dots \lambda_m$ sú rôzne nenulové vlastné čísla matice $M(A - DW_{obs} I_n)M$ s násobnosťami $\nu_1, \dots \nu_m$. Poznamenávame, že za platnosti nulovej hypotézy pravdepodobnosť (36) nezávisí od parametra σ^2. Nulovú hypotézu zamietame pokiaľ p-hodnota je menšia ako zvolena hladina významnosti testu.

Príklad 2. Pri analýze lineárneho modelu

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, 10,$$

bola určená hodnota Durbin-Watsonovej štatistiky $DW_{obs} = 0.879$. Nenulové vlastné čísla matice $M(A - 0.879 I_{10})M$ sú

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
−0.4970	−0.0628	0.5030	1.1187	1.7390	2.2960	2.7390	3.0231

pričom násobnosť všetkých je rovná jednej. Potom p-hodnota, ktorá slúži na testovanie nulovej hypotézy oproti alternatíve, že existuje pozitívna autokorelácia, určená podľa (36), je $p = 0.0043$. Teda, nulovú hypotézu, že chyby sú nekorelované, na hladine významnosti $\alpha = 0.05$, zamietame.

Poznamenávame, že hodnota 0.879 je zhodná s dolnou medzou DW_L pre kvantil rozdelenia štatistiky DW, ktorá je určená z tabuliek Durbin-Watsonovej štatistiky pre $n = 10$ a $k' = 1$ (počet regresorov bez interceptu) na hladine významnosti $\alpha = 0.05$. Pre hornú medzu $DW_U = 1.320$ dostávame p-hodnotu $p = 0.0506$.

4.3. **Behrens-Fisherov problém.** Nech $X = (X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sú dva nezávislé náhodné výbery z normálnych populácií s charakterizovaných parametrami μ_1, μ_2, σ_1^2, a σ_2^2. Nech $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum X_k$, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_k$ označujú výberové priemery a $S_1^2 = \frac{1}{m}\sum(X_k - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n}\sum(Y_k - \bar{Y})^2$ označujú výberové rozptyly. $(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)$ vytvára postačujúcu štatistiku pre parametre rozdelenia. Platí, že

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}\right) \quad \text{a} \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right), \tag{37}$$

$$\frac{m}{\sigma_1^2} S_1^2 \sim \chi^2_{m-1} \quad \text{a} \quad \frac{n}{\sigma_2^2} S_2^2 \sim \chi^2_{n-1}, \tag{38}$$

sú navzájom nezávislé náhodné premenné.

Nech $\theta = \mu_1 - \mu_2$ a $\vartheta = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Chceli by sme testovať hypotézu

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0. \tag{39}$$

V tomto testovacom probléme je parametrom záujmu θ, zatiaľ čo ϑ je vektor rušivých parametrov.

Nech $x = (x_1, \ldots, x_m)$ je vektor realizovaných hodnôt náhodného vektora X a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ je vektor realizovaných hodnôt náhodného vektora Y. Pre testovanie hypotézy H_0 a konštrukciu intervalového odhadu pre θ definujeme zovšeobecnenú testovaciu premennú (pozri Tsui & Weerahandi (1989) a Weerahandi (1995)):

$$T(X, Y, x, y, \theta, \vartheta) = \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \theta)^2}{\left(\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)} \left(\frac{\sigma_1^2}{m}\frac{s_1^2}{S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{n}\frac{s_2^2}{S_2^2}\right). \tag{40}$$

Poznamenávame, že pre ľubovoľné dané $\theta = \theta_0$, $t_{obs} = (\bar{x} - \bar{y} - \theta_0)^2$ nezávisí od neznámych parametrov a za platnosti H_0 označme $T_0 = T(X, Y, x, y, \theta_0, \vartheta)$. Potom rozdelenie náhodnej premennej T_0 je

$$T_0 \sim \chi_1^2 \left(\frac{s_1^2}{\chi_{m-1}^2} + \frac{s_2^2}{\chi_{n-1}^2}\right). \tag{41}$$

Pre pevné x, y a $\vartheta = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$, T je stochasticky rastúca pre $\theta > \bar{x} - \bar{y}$ a stochstisky klesajúca pre $\theta < \bar{x} - \bar{y}$.

Zovšeobecnená p-hodnota je definovaná ako $p(\theta) = \Pr\{T > t_{obs}|\theta\}$. Test významnosti hypotézy H_0 je založený na $p(\theta_0)$:

$$p(\theta_0) = \Pr\left\{\frac{s_1^2}{\chi_{m-1}^2} + \frac{s_2^2}{\chi_{n-1}^2} - \frac{(\bar{x} - \bar{y} - \theta_0)^2}{\chi_1^2} > 0\right\}. \tag{42}$$

Hypotézu H_0 zamietame, pokiaľ je p-hodnota malá (menšia ako zvolená kritická p-hodnota, povedzme $p_{crit} = 0.05$).

Potom $100(1 - p_{crit})\%$ inteval spoľahlivosti založený na zovšeobecnenej p-hodnote je

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm \delta_{crit} \tag{43}$$

pričom δ_{crit} je dané vzťahom:

$$p_{crit} = \Pr\left\{\frac{s_1^2}{\chi_{m-1}^2} + \frac{s_2^2}{\chi_{n-1}^2} - \frac{\delta_{crit}^2}{\chi_1^2} > 0\right\}. \tag{44}$$

Príklad 3. Simulovli sme realizácie z dvoch náhodných výberov $X_i \sim N(3, 4)$, $i = 1, \ldots, 7$, a $Y_j \sim N(5, 9)$, $j = 1, \ldots, 10$, pričom $\bar{x} = 2.871$, $\bar{y} = 5.8685$, $s_1^2 = 4.1014$, a $s_2^2 = 7.5135$.

Potom, podľa (42), p-hodnota pre test významnosti hypotézy $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta \neq 0$ je

$$p = \Pr\left\{\frac{4.1014}{\chi_6^2} + \frac{7.5135}{\chi_9^2} - \frac{(-2.9975)^2}{\chi_1^2} > 0\right\} = 0.0424, \tag{45}$$

takže, pre $p_{crit} = 0.05$ zamietame nulovú hypotézu, že $\theta = 0$. Podľa (43) a (44) 95% intervalový odhad parametra $\theta = \mu_1 - \mu_2$ založený na zovšeobecnenej p-hodnote je

$$\langle -5.8732; -0.1218 \rangle.$$

4.4. **Konfidenčný interval pre spoločnú strednú hodnotu z niekoľkých normálnych populácií.** Budeme predpokladať, že máme náhodný výber z $k \geq 2$ nezávislých populácií, pričom rozdelenie i-tej populácie je normálne, $N(\mu, \sigma_i^2)$, so spoločnou strednou hodnotou μ a (vo všeobecnosti nerovnakým) rozptylom σ_i^2, $i = 1, \ldots, k$.

Nech X_{ij}, $j = 1, \dots, n_i$ ($n_i \geq 2$), označuje náhodný výber z i-tej populácie. Definujeme $\bar{X}_i$ a S_i^2:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \tag{46}$$

$i = 1, \dots, k$. Náhodné premenné $\bar{X}_i$ a S_i^2 sú navzájom nezávislé a

$$\bar{X}_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right), \quad (n_i - 1)S_i^2 \sim \sigma_i^2 \chi^2_{n_i - 1}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{47}$$

Odtiaľ dostávame

$$t_i = \frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i - \mu)}{S_i} \sim t_{n_i - 1}, \quad F_i = \frac{n_i(\bar{X}_i - \mu)^2}{S_i^2} \sim F_{1, n_i - 1}, \tag{48}$$

$i = 1, \dots, k$.

Fairweather (1972) navrhol konštrukciu exaktného konfidenčného intervalu pre μ za pomoci váženej lineárnej kombinácie Studentových t_i štatistík. Presnejšie

$$W_t = \sum_{i=1}^{k} u_i t_i, \quad u_i = \frac{(\mathit{Var}(t_i))^{-1}}{\sum_{i=1}^{k} (\mathit{Var}(t_i))^{-1}} = \frac{(n_i - 3)/(n_i - 1)}{\sum_{j=1}^{k} (n_j - 3)/(n_j - 1)}. \tag{49}$$

Rozptyl $\mathit{Var}(t_i)$ existuje iba keď $n_i > 3$. Ak ako $b_{\alpha/2}$ označíme hornú kritickú hodnotu rozdelenia náhodnej premennej W_t, takú, že pre dané $\alpha \in (0, 1)$

$$\Pr(|W_t| \leq b_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \tag{50}$$

potom exaktný (symetrický, obojstranný) $100(1 - \alpha)\%$-konfidenčný interval pre μ je určený vzťahom

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n_i} u_i \bar{X}_i / S_i - b_{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n_i} u_i / S_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n_i} u_i \bar{X}_i / S_i + b_{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n_i} u_i / S_i} \right\rangle. \tag{51}$$

Na odvodenie približnej kritickej hodnoty $b^*_{\alpha/2}$ Fairweather (1972) navrhol aproximovať rozdelenie náhodnej premennej W_t rozdelením ct_ν, kde ν a $c > 0$ sú určené tak, aby sa druhý a štvrtý moment ct_ν zhodoval s momentami W_t. Teda, ak navyše $n_i > 5$ pre všetky $i = 1, \dots, k$, dostávame

$$\nu = 4 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} u_i^2/(n_i - 5)}, \quad c = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)/(n_i - 1)}}. \tag{52}$$

Jordan and Krishnamoorthy (1996) navrhli použiť váženú lineárnu kombináciu F_i štatistík, pričom váhy sú inverzne proporcionálne rozptylom $\mathit{Var}(F_i)$, teda

$$W_f = \sum_{i=1}^{k} w_i F_i, \quad w_i = \frac{[(n_i - 3)^2 (n_i - 5)]/[(n_i - 1)^2 (n_i - 2)]}{\sum_{i=1}^{k} [(n_j - 3)^2 (n_j - 5)]/[(n_j - 1)^2 (n_j - 2)]}. \tag{53}$$

Rozptyl $\mathit{Var}(F_i)$ existuje iba keď $n_i > 5$. Ak ako a_α označíme kritickú hodnotu rozdelenia náhodnej premennej W_f, takú, že pre $\alpha \in (0, 1)$

$$\Pr(W_f \leq a_\alpha) = 1 - \alpha, \tag{54}$$

potom exaktný (symetrický, obojstranný) $100(1 - \alpha)\%$-konfidenčný interval pre μ je určený vzťahom

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} p_i \bar{X}_i - \Delta, \sum_{i=1}^{k} p_i \bar{X}_i + \Delta \right\rangle, \tag{55}$$

kde

$$p_i = \frac{w_i n_i / S_i^2}{\sum_{j=1}^{k} w_j n_j / S_j^2} \tag{56}$$

a

$$\Delta^2 = \frac{a_\alpha}{\sum_{i=1}^{k} w_i n_i / S_i^2} - \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i \bar{X}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \bar{X}_i \right)^2 \right\}. \tag{57}$$

Na určenie približnej hodnoty a_α^* Jordan and Krishnamoorthy (1996) navrhli aproximovať rozdelenie náhodnej premennej W_f rozdelením $cF_{k,\nu}$, kde ν a $c > 0$ sú určené tak, že prvé dva momenty $cF_{k,\nu}$ sú zhodne s prvými dvomi momentami W_f. Presnejšie, ak $n_i > 5$ pre všetky $i = 1, \ldots, k$, potom

$$\nu = \frac{4kM_2 - 2(k+2)M_1^2}{kM_2 - (k+2)M_1^2}, \quad c = \frac{\nu - 2}{\nu} M_1, \tag{58}$$

kde

$$M_1 = E(W_f) = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i(n_i - 1)}{(n_i - 3)} \tag{59}$$

a

$$M_2 = E(W_f)^2 = 3 \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^2 (n_i - 1)^2}{(n_i - 3)(n_i - 5)} + 2 \sum_{i>j} \frac{w_i w_j (n_i - 1)(n_j - 1)}{(n_i - 3)(n_j - 3)}. \tag{60}$$

Nasledujúci príklad bol analyzovaný v článkoch Jordan and Krishnamoorthy (1996) a Yu et al. (1999). Tu porovnáme konfidenčné intervaly určené pomocou približných a exaktných kritických hodnôt.

Príklad 4. Meier (1953) študoval percentuálny podiel albuminu v proteinovej plazme ľudí.

Experiment	n_i	$\bar{X}_i$	S_i^2
A	12	62.3	12.986
B	15	60.3	7.840
C	7	59.5	33.433
D	16	61.5	18.513

Dáta v tabuľke sú založené ne štyroch nezávislých experimentoch. Predpoklad je, že výbery pochádzajú z normálnej populácie.

Chceme kombinovať výsledky štyroch experimentov tak, aby sme skonštruovali $100(1-\alpha)\%$-konfidenčný interval pre spoločnú strednú hodnotu μ pre $\alpha = 0.05$.

Približnú kritickú hodnotu $b_{0.025}^*$ váženej lineárnej kombinácie

$$W_t = \sum_{i=1}^{4} u_i t_{n_i - 1}$$

s váhami

$$u = (0.2550, 0.2671, 0.2078, 0.2701),$$

možno určiť podľa (52) z rozdelenia náhodnej premennej ct_ν, pričom $\nu = 26.3984$ a $c = 0.5367$. Táto aproximácia vedie k hodnote $b_{0.025}^* = 1.1024$. Potom výsledná realizácia konfidenčného intervalu pre μ je

$$\langle 59.8973, 62.1921 \rangle.$$

Skutočná pravdepodobnosť pokrytia (spočítaná numerickou integráciou na základe (1), (5) a (21)) je však

$$\Pr(|W_t| < b^*_{0.025}) = 0.9504.$$

Exaktná kritická hodnota (zaokrúhlená na štyri desatinné miesta) je $b_{0.025} = 1.1002$. Potom exaktný konfidenčný interval je

$$\langle 59.8996, 62.1899 \rangle.$$

Približnú kritickú hodnotu $a^*_{0.05}$ váženej lineárnej kombinácie

$$W_f = \sum_{i=1}^{4} w_i F_{1,n_i-1}$$

s váhami

$$w = (0.2601, 0.3137, 0.0987, 0.3276),$$

možno určiť podľa (58) z rozdelenia náhodnej premennej $cF_{4,\nu}$, pričom $\nu = 15.6082$ a $c = 1.0548$. Táto aproximácia vedie k hodnote $a^*_{0.05} = 3.1918$ a výsledná realizácia konfidenčného intervalu pre μ je

$$\langle 59.5621, 62.4430 \rangle.$$

Skutočná pravdepodobnosť pokrytia (spočítaná numerickou integráciou na základe (1), (5) a (28)) je

$$\Pr(W_f < a^*_{0.05}) = 0.9503.$$

Exaktná kritická hodnota (zaokrúhlená na štyri desatinné miesta) je $a_{0.05} = 3.1853$. Potom exaktný konfidenčný interval je

$$\langle 59.5640, 62.4410 \rangle.$$

5. Záverečné poznámky

Implementácia uvedených algoritmov je pomerne jednoduchá, za predpokladu, že máme k dispozícii spoľahlivé a efektívne algoritmy na výpočet Besselovej funkcie druhého rádu, resp. konfluentnej hypergeometrickej funkcie druhého rádu. Pozri napr. Amos (1986), Nardin et al. (1992).

Literatúra

[1] Amos, D.E., 1986. A portable package for bessel functions of a complex argument and nonnegative order. ACM Transactions on Mathematical Software, 12, 265–273.

[2] Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1965. Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York.

[3] Davies, R.B., 1973. Numerical inversion of a characteristic function. *Biometrika 60* (1973), pp. 415–417.

[4] Fairweather, W.R., 1972. A method of obtaining an exact confidence interval for the common mean of several normal populations. Applied Statistics 21, 229–233.

[5] Gil-Pelaez, J., 1951. Note on the inversion theorem. Biometrika 38, 481–482.

[6] Imhof, J.P., 1961. Computing the distribution of quadratic forms in normal variables. Biometrika 48, 419–426.

[7] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N., 1995. Continuous Univariate Distributions. Volume 2. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[8] Jordan, S.M., Krishnamoorthy, K., 1996. Exact confidence intervals for the common mean of several normal populations. Biometrics 52, 77–86.

[9] Mitra, S.S., 1978. Recursive formula for the characteristic function of Student t distributions for odd degrees of freedom. Manuscript, Pensylvania State University, State College.

[10] Nardin, M., Perger, W.F., Bhalla, A., 1992. Algorithm 707: Solution to the confluent hypergeometric function. ACM Transactions on Mathematical Software, 18, 345–349.

[11] Phillips, P.C.B., 1982. The true characteristic function of the F distribution. Biometrika 69, 261–264.

[12] Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A., Marichev, O.I., 1981. Integraly i Rjady. (Integrals and Series). Nauka, Moscow.
[13] Stuart, A., Ord, J.K., 1987. Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume I, Distribution Theory (5th ed.), Oxford: Oxford University Press.
[14] Tsui, K.W., Weerahandi, S., 1989. Generalized p values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters. J. Am. Statist. Assoc. 84, pp. 602–607.
[15] Weerahandi, S., 1995. Exact Statistical Methods for Data Analysis. Springer-Verlag, New York.
[16] Witkovský, V., 1999. Exact tests of variance components using generalized p-values. DATASTAT 99, Rusava-Jesřábí, 30.8.–3.9. 1999, ČR.
[17] Witkovský, V., 2001a. Computing the distribution of a linear combination of inverted gamma variables. Submitted for publication to Kybernetika.
[18] Witkovský, V., 2001b. On the exact computation of the density and of the quantiles of linear combinations of t and F random variables. Journal of Statistical Planning and Inference 94, 1–13.
[19] Yu, P.L.H., Sun, Y., Sinha, B.K., 1999. On exact confidence intervals for the common mean of several normal populations. Journal of Statistical Planning and Inference 81, 263–277.

Slovak Academy of Sciences, Institute of Measurement Science, Dubravska cesta 9, SK – 842 19 Bratislava, Slovakia
E-mail: umerwitk@savba.sk