ROBUST'2000, 135 – 148 © JČMF 2001

KONFIDENČNÍ A PRAHOVÉ ELIPSOIDY V DEFORMAČNÍCH MĚŘENÍCH

PAVLA KUNDEROVÁ

Abstrakt. Confidence and joint confidence ellipsoids, threshold and joint threshold ellipsoids within a regular multiepoch linear regression model with nuisance parameters are derived.

Резюме. В статье введены доверительные и совместные доверительные еллипсоиды, пороговые и совместные пороговые еллипсоиды в линеарной регрессионной модели с мешающими параметрами.

1. Úvod, označení

Ověření stability velkých inženýrských staveb (mostů, přehrad a pod.) resp. sledování jejich případných deformací v čase se provádí měřením bodů určité geodetické sítě, která se opakují ve vhodně zvolených časových okamžicích-epochách (viz [1], kap. 9).

Průběh deformací je modelován pomocí multiepochového lineárního regresního modelu. Existují dva základní typy multiepochových modelů (viz [1], str. 366):
a) Modely s pevnými a proměnnými parametry:
opakovaná měření, která slouží k popisu průběhu deformací určitého objektu se realizují na geodetické síti, která je specielně navržena k tomuto účelu. Skládá se ze skupiny podpůrných bodů, jejichž polohu pokládáme za stabilní (tento předpoklad se ověřuje v průběhu měření) a ze skupiny pohyblivých (nestabilních) bodů, jejichž pozice vzhledem k pevným bodům jsou měřeny. Souřadnice pevných bodů jsou apriori neznámé. Po měření v každé epoše se určují (odhadují) jak souřadnice stabilních bodů tak souřadnice nestabilních bodů. Zjištěné souřadnice pevných bodů slouží k ověření hypotézy o jejich stabilitě.
b) Modely pouze s proměnnými parametry:
sledují se souřadnice nestabilních (pohyblivých bodů) vzhledem ke geodetické síti pevných bodů, jejichž souřadnice jsou v tomto modelu pokládány apriori za známé.

Uvažujme model prvního typu. Předpokládejme, že se deformační měření provádějí v m epochách, kdy sledujeme celkem k stabilních bodů a l nestabilních (pohyblivých) bodů. Body uvažované geodetické sítě jsou charakterizovány souřadnicemi, které mohou být z $R^k, k = 1, 2, 3, \ldots$.

V tomto článku budeme předpokládat, že souřadnice sledovaných bodů jsou z R^2, tj. měření v j-té epoše ($j = 1, \ldots, m$) charakterizuje $2k$-rozměrný vektor β_1 tzv. rušivých parametrů (souřadnice pevných bodů) a $2l$-rozměrný vektor $\beta_{2,j}$ tzv. užitečných parametrů (souřadnice pohyblivých bodů).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J05; Secondary 62P30.
Klíčová slova. Lineární regresní model, geodetické sítě, konfidenční a prahové elipsoidy.

Při hodnocení stability resp. nestability objektu v čase jsou velmi užitečné *konfidenční elipsoidy. Prahové elipsoidy* umožňují ocenit spolehlivost tvrzení: “poloha stejných bodů se ve dvou různých epochách měření nezměnila” (viz [2], str. 157).

Budeme užívat název elipsoid i když v některých případech jde o intervaly nebo o elipsy.

V dalším textu budeme užívat následující označení

R^n	prostor všech n-rozměrných reálných vektorů;
$\mathrm{u}_p,\ \mathrm{A}_{m,n}$	reálný sloupcový p-rozměrný vektor, reálná $m \times n$ matice;
$\mathrm{A}', \mathrm{R}(\mathrm{A})$,	transpozice matice, prostor generovaný sloupci matice A;
$\mathrm{N}(\mathrm{A}), r(\mathrm{A})$,	nulový prostor a hodnost matice A;
$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$	Kroneckerův (tensorový) součin matic A,B;
A^-	pseudoinverzní matice k matici A (splňující $\mathrm{AA^-A = A}$);
A^+	Moore-Penroseova pseudoinverzní matice k matici A (splňující $\mathrm{AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+, (AA^+)' = AA^+, (A^+A)' = A^+A}$);
P_A	ortogonální projektor na R(A);
$\mathrm{M}_A = \mathrm{I} - \mathrm{P}_A$	ortogonální projektor na $\mathrm{R}^\perp(\mathrm{A}) = \mathrm{N}(\mathrm{A}')$;
I_k	$k \times k$ jednotková matice;
$1_k = (1, \ldots, 1)' \in R^k$,	
$0_{m,n}$	$m \times n$ nulová matice;
$\chi^2_r(0)$	centrální χ^2-rozdělení o r stupních volnosti;
$\chi^2_r(\delta)$	necentrální χ^2-rozdělení o r stupních volnosti s parametrem necentrality δ;
$\chi^2_r(0, 1-\alpha)$	$(1-\alpha)$-kvantil příslušného rozdělení.

2. Multiepochový lineární regresní model

Uvažujme následující model měření prováděného v m epochách

$$\mathrm{Y}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1, & \mathrm{X}_2, & 0, & \ldots & 0 \\ \mathrm{X}_1, & 0, & \mathrm{X}_2, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{X}_1, & 0, & 0, & \ldots & \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_{2,1} \\ \vdots \\ \beta_{2,m} \end{pmatrix} + \varepsilon^{(m)}, \tag{1}$$

kde

$\mathrm{Y}^{(m)} = (\mathrm{Y}'_1, \ldots, \mathrm{Y}'_m)'$ je mn-rozměrný vektor pozorování,

$var(\mathrm{Y}^{(m)}) = \Sigma^{(m)} = \mathrm{I}_m \otimes \Sigma$, kde Σ je známá, pozitivně definitní matice,
Y_j je n-rozměrný vektor hodnot naměřených v j-té epoše, $j = 1, \ldots, m$,
$n \times 2k$ matice X_1 je matice plánu příslušná vektoru rušivých parametrů $\beta_1 \in R^{2k}$,
$n \times 2l$ matice X_2 je matice plánu odpovídající vektoru užitečných parametrů $\beta_{2,j} \in R^{2l}$, $j = 1, \ldots, m$.

Model (1) lze zapsat ve tvaru

$$\mathrm{Y}^{(m)} = (\mathbf{X}_1^{(m)}, \mathbf{X}_2^{(m)}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^{(m)},$$

kde

$$\mathbf{X}_1^{(m)} = 1_m \otimes \mathrm{X}_1, \quad \mathbf{X}_2^{(m)} = \mathrm{I}_m \otimes \mathrm{X}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{2,1} \\ \beta_{2,2} \\ \vdots \\ \beta_{2,m} \end{pmatrix}, \text{ souřadnice pohyblivých bodů ve všech epochách.}$$

Věta *Nechť jsou v modelu (1) měření po m-té epoše splněny tyto předpoklady:* $r(X_1) = 2k < n,\ r(X_2) = 2l < n,\ r(X_1, X_2) = 2k + 2l$. *Potom pro globálně nejlepší lineární nestranné odhady (BLUE) parametrů* β_1 *a* $\boldsymbol{\beta}_2,\ \beta_{2,j},\ j = 1, \ldots, m$, *platí*

$$\widehat{\beta_1} = [m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+(\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Y}_i), \tag{2}$$

$$var[\widehat{\beta_1}] = [m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}, \tag{3}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} = \{[\mathrm{I}_m \otimes (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}] \tag{4}$$

$$-[1_m 1_m' \otimes (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_1[m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+]\}\,\mathrm{Y}^{(m)},$$

$$\mathrm{V} = var[\widehat{\boldsymbol{\beta}_2}] = [\mathrm{I}_m \otimes (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}] \tag{5}$$

$$+[1_m 1_m' \otimes (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_1[m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2(\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}],$$

$$\widehat{\beta_{2,j}} = (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1} \tag{6}$$

$$\cdot\left[\mathrm{Y}_j - \mathrm{X}_1[m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+[\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Y}_i]\right],\ j = 1, \ldots, m,$$

$$\mathrm{V}_{jj} = var[\widehat{\beta_{2,j}}] = (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1} \tag{7}$$

$$+(\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_1[m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2(\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1},$$
$$j = 1, \ldots, m,$$

$$\mathrm{V}_{r,s} = cov[\widehat{\beta_{2,r}}, \widehat{\beta_{2,s}}] \tag{8}$$

$$= (\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_1[m\mathrm{X}_1'(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+\mathrm{X}_1]^{-1}\mathrm{X}_1'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2(\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1},$$
$$\forall\ r, s = 1, \ldots, m,\ r \neq s.$$

kde

$$(\mathrm{M}_{X_2}\Sigma\mathrm{M}_{X_2})^+ = \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}\mathrm{X}_2(\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}\mathrm{X}_2)^{-1}\mathrm{X}_2'\Sigma^{-1}.$$

Důkaz: [5], Theorem 1.

Předpoklad

Dále budeme předpokládat, že $\mathrm{Y}^{(m)} \sim N_{nm}\left[(\mathbf{X}_1^{(m)}, \mathbf{X}_2^{(m)})\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}, \mathrm{I}_m \otimes \Sigma\right]$.

Potom

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} \sim N_{2lm}(\boldsymbol{\beta}_2, \mathrm{V}).$$

3. Konfidenční elipsoidy

Nejprve uvedeme obecnou definici konfidenční oblasti. Mějme lineární regresní model $\mathrm{Y} = \mathrm{X}\beta + \varepsilon$, $\beta \in \underline{\beta} \subset R^k$, nechť B_k označuje třídu borelovských množin v prostoru R^k.

Definice 1 (viz [4], str. 87)
Nechť zobrazení $C(.) : R^n \to \mathrm{B}_k$ má následující vlastnost

$$\forall \{\beta \in \underline{\beta}\} \quad P_\beta[\beta \in C(\mathrm{Y})] = 1 - \alpha,\ \alpha \in (0,1).$$

Náhodná množina C(Y) se nazývá $(1-\alpha)$*-konfidenční oblast pro parametr* β.
(V praxi se užívá výraz konfidenční oblast pro realizaci C(y) náhodné množiny C(Y)).

Vraťme se k multiepochovému regresnímu modelu (1). Označme

$$\beta_{2,j} = \begin{pmatrix} \beta_{2,j}^{(1)} \\ \vdots \\ \beta_{2,j}^{(l)} \end{pmatrix}, \text{souřadnice } l \text{ pohyblivých bodů v } j\text{-té epoše měření}, j = 1, \dots, m.$$

Z předpokladu víme, že

$$\widehat{\beta_{2,j}} \sim N_{2l}(\beta_{2,j}, V_{jj}),\ j = 1, \dots, m.$$

a) Zajímejme se nejprve o souřadnice i-tého pohyblivého bodu v j-té epoše.

Zvolme blokovou matici $H_i = (0_{2,2}, \dots, \mathrm{I}_2, \dots, 0_{2,2})$, kde i-tý blok
$(i = 1, \dots, l)$, je tvořen jednotkovou maticí, ostatní bloky jsou nulové. Potom

$$\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} = H_i \widehat{\beta_{2,j}} \sim N_2(\beta_{2,j}^{(i)}, H_i V_{jj} H_i').$$

Podle Pearsonova lematu $[\eta \sim N_s(\mathrm{O}, \mathrm{W}) \ \Rightarrow\ \eta' \mathrm{W}^- \eta \sim \chi^2_{r(W)}(0)]$ platí, že

$$(\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} - \beta_{2,j}^{(i)})'[H_i V_{jj} H_i']^{-1}(\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} - \beta_{2,j}^{(i)}) \ \sim\ \chi_2^2(0),$$

a proto $(1-\alpha)$-*konfidenční elipsoid pro souřadnice* i*-tého bodu v* j*-té epoše*,
$i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, m$, má tvar

$$\mathrm{E}\,(\beta_{2,j}^{(i)}) = \left\{ u \ \in R^2 : (u \ - \widehat{\beta_{2,j}^{(i)}})'[H_i V_{jj} H_i']^{-1}(u - \widehat{\beta_{2,j}^{(i)}}) \leq\ \chi_2^2(0, 1-\alpha) \right\}.$$

b) Uvažujme odhad souřadnic r-tého a s-tého bodu ve stejné (j-té) epoše,
$r, s = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, m$, tj. náhodný vektor

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,j}^{(r)}} \\ \widehat{\beta_{2,j}^{(s)}} \end{pmatrix} = H_{rs} \widehat{\beta_{2,j}} \sim N_4 \left(\begin{pmatrix} \beta_{2,j}^{(r)} \\ \beta_{2,j}^{(s)} \end{pmatrix}, \mathrm{H}_{rs} \mathrm{V}_{jj} \mathrm{H}_{rs}' \right),$$

kde

$$\mathrm{H}_{rs} = \begin{pmatrix} 0_{2,2}, & \dots & \mathrm{I}_2, & \dots & \dots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2}, & \dots & \dots & \mathrm{I}_2, & \dots & 0_{2,2} \end{pmatrix},$$

je bloková matice o dvou řádcích a l sloupcích tvořená bloky o rozměru 2×2, v prvním řádku je matice I_2 na r-tém místě, ostatní bloky jsou nulové, ve druhém řádku je matice I_2 na s-tém místě, ostatní bloky jsou nulové.

Opět užitím Pearsonova lematu dostaneme, že

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,j}^{(r)}} - \beta_{2,j}^{(r)} \\ \widehat{\beta_{2,j}^{(s)}} - \beta_{2,j}^{(s)} \end{pmatrix}' [\mathrm{H}_{rs} \mathrm{V}_{jj} \mathrm{H}_{rs}']^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,j}^{(r)}} - \beta_{2,j}^{(r)} \\ \widehat{\beta_{2,j}^{(s)}} - \beta_{2,j}^{(s)} \end{pmatrix} \sim \chi_4^2(0),$$

a tedy pro $(1-\alpha)$-*konfidenční elipsoid pro souřadnice r-tého a s-tého bodu v j-té epoše měření* platí

$$\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix}\beta_{2,j}^{(r)}\\ \beta_{2,j}^{(s)}\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left\{u\ \in R^4:[u\ -\begin{pmatrix}\widehat{\beta_{2,j}^{(r)}}\\ \widehat{\beta_{2,j}^{(s)}}\end{pmatrix}]'[\mathrm{H}_{rs}\mathrm{V}_{jj}\mathrm{H}_{rs}']^{-1}[u-\begin{pmatrix}\widehat{\beta_{2,j}^{(r)}}\\ \widehat{\beta_{2,j}^{(s)}}\end{pmatrix}]\le\chi_4^2(0,1-\alpha)\right\}.$$

c) Stabilitu i-tého bodu posoudíme pomocí konfidenčního elipsoidu rozdílu souřadnic tohoto bodu v sousedních epochách měření, tj. určíme-li tzv. *relativní konfidenční elipsoid.*

Uvažujme rozdíl odhadů

$$\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}}-\widehat{\beta_{2,j+1}^{(i)}}=\mathrm{C}_j^{(i)}\widehat{\boldsymbol{\beta}_2},$$

kde

$$\mathrm{C}_j^{(i)}=(0_{2,2},\dots,0_{2,2},\mathrm{I}_2,0_{2,2},\dots,0_{2,2},-\mathrm{I}_2,0_{2,2},\dots,0_{2,2}),\tag{9}$$

je bloková matice s ml bloky o rozměru 2×2, ve které je matice I_2 na $[i+(j-1)l]$-tém místě, matice $-\mathrm{I}_2$ na $[i+jl]$-tém místě, ostatní bloky jsou nulové.

Obdobně jako v bodech a), b) odvodíme, že

$$P\left[(\beta_{2,j}^{(i)}-\beta_{2,j+1}^{(i)})\in\mathrm{E}\,(\beta_{2,j}^{(i)}-\beta_{2,j+1}^{(i)})\right]=1-\alpha,$$

kde

$$\mathrm{E}\,(\beta_{2,j}^{(i)}-\beta_{2,j+1}^{(i)})=$$

$$\left\{u\ \in R^2:(u\ -[\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}}-\widehat{\beta_{2,j+1}^{(i)}}])'[\mathrm{C}_j^{(i)}\mathrm{V}(\mathrm{C}_j^{(i)})']^{-1}(u\ -[\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}}-\widehat{\beta_{2,j+1}^{(i)}}])\le\chi_2^2(0,1-\alpha)\right\}.$$

4. Sdružené konfidenční elipsoidy

Mějme opět obecný lineární regresní model $\mathrm{Y}=\mathrm{X}\beta+\varepsilon,\ \beta\in R^k$, nechť $\alpha\in(0,1)$ je předem zvolené číslo.

Definice 2 (viz [2], str.158)
Náhodné elipsoidy $\mathrm{E}_{1-\alpha}(\beta_i), i=1,\dots,k$, takové, že

$$P[\ \forall\{i=1,\dots,k\}\quad \beta_i\in\mathrm{E}_{1-\alpha}(\beta_i)]\ge1-\alpha,$$

se nazývají $(1-\alpha)$-*sdružené konfidenční elipsoidy založené na observačním vektoru* Y.

a) Odvodíme nejprve sdružené elipsoidy pro souřadnice jednoho (pevně zvoleného) bodu ve všech epochách měření. Uvažujme odhady souřadnic i-tého bodu ve všech epochách měření

$$\widehat{\beta_2^{(i)}}=\begin{pmatrix}\widehat{\beta_{2,1}^{(i)}}\\ \widehat{\beta_{2,2}^{(i)}}\\ \vdots\\ \widehat{\beta_{2,m}^{(i)}}\end{pmatrix}=\mathrm{G}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}_2}\ \sim\ N_{2m}\left[\begin{pmatrix}\beta_{2,1}^{(i)}\\ \beta_{2,2}^{(i)}\\ \vdots\\ \beta_{2,m}^{(i)}\end{pmatrix},\mathrm{G}_i\mathrm{V}\mathrm{G}_i'\right],$$

kde

$$\mathrm{G}_i = \begin{pmatrix} 0_{2,2},\dots,0_{2,2}, & \mathrm{I}_2, 0_{2,2},\dots,0_{2,2}, & \dots\dots\dots\dots & 0_{2,2},\dots,0_{2,2} \\ 0_{2,2},\dots,0_{2,2}, & 0_{2,2}, 0_{2,2}\dots,0_{2,2}, & \mathrm{I}_2, 0_{2,2},\dots,0_{2,2} & 0_{2,2},\dots,0_{2,2} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ 0_{2,2},\dots,0_{2,2} & 0_{2,2}, 0_{2,2},\dots,0_{2,2}, & \dots\dots\dots\dots & \mathrm{I}_2, 0_{2,2},\dots,0_{2,2} \end{pmatrix},$$

je bloková matice typu $m \times lm$ taková, že v 1. řádku je matice I_2 v i-tém sloupci, ve 2. řádku je matice I_2 v $(l+i)$-tém sloupci, atd., v m-tém řádku je matice I_2 v $[(m-1)l+i]$-tém sloupci, ostatní bloky jsou nulové.

Užitím Pearsonova lematu

$$(10) \qquad P\left[(\widehat{\beta_2^{(i)}} - \beta_2^{(i)})'[\mathrm{G}_i\mathrm{V}\mathrm{G}_i']^{-1}(\widehat{\beta_2^{(i)}} - \beta_2^{(i)}) \le \chi^2_{2m}(0, 1-\alpha)\right] = 1-\alpha.$$

V dalších úvahách užijeme zobecněnou Scheffého větu.

Zobecněná Scheffého věta Nechť $\eta \sim N_s(\mu, \mathrm{V})$, kde V je pozitivně definitní matice. Nechť $\mathcal{A}$ je třída všech $t \times s$ matic A takových, že $r(\mathrm{A}) = t < s$. Potom

$$P[(\eta-\mu)'\mathrm{V}^{-1}(\eta-\mu) \le \chi^2_s(0,1-\alpha)] = 1-\alpha$$

$$(11) \quad \Leftrightarrow \quad P[\forall\{\mathrm{A} \in \mathcal{A}\} : [\mathrm{A}(\eta-\mu)]'(\mathrm{AVA}')^{-1}\mathrm{A}(\eta-\mu) \le \chi^2_s(0,1-\alpha)] = 1-\alpha.$$

Důkaz: [3], Theorem 2.2

Označme $\mathrm{A}_j = (0_{2,2},\dots,0_{2,2},\mathrm{I}_2,\dots,0_{2,2})$ blokovou matici složenou z m bloků rozměrů 2×2 takovou, že j-tý blok tvoří jednotková matice I_2, ostatní bloky jsou nulové, $j = 1,\dots,m$. Potom

$$\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} = \mathrm{A}_j\widehat{\beta_2^{(i)}}, \;\; j = 1,\dots,m.$$

Podle uvedené zobecněné Scheffého věty plyne ze vztahů (10), (11), že

$$P\Big\{\forall\{j=1,\dots,m\}\; [\mathrm{A}_j(\widehat{\beta_2^{(i)}} - \beta_2^{(i)})]'(\mathrm{A}_j\mathrm{G}_i\mathrm{V}G_i'\mathrm{A}_j')^{-1}\mathrm{A}_j(\widehat{\beta_2^{(i)}} - \beta_2^{(i)}) \le \chi^2_{2m}(0,1-\alpha)\Big\}$$
$$\ge 1-\alpha, \;\; \text{tj.}$$

$$P\left\{\forall\{j=1,\dots,m\}\; (\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} - \beta_{2,j}^{(i)})'[var(\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}})]^{-1}(\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}} - \beta_{2,j}^{(i)}) \le \chi^2_{2m}(0,1-\alpha)\right\} \ge 1-\alpha.$$

Elipsoidy

$$\mathrm{E}^{\,s}_{1-\alpha}(\beta_{2,j}^{(i)}) = \{u \in R^2 : (u - \widehat{\beta_{2,j}^{(i)}})'[var(\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}})]^{-1}(u - \widehat{\beta_{2,j}^{(i)}})\} \le \chi^2_{2m}(0,1-\alpha)\},$$

tvoří $(1-\alpha)$-*sdružené konfidenční elipsoidy pro souřadnice pevně zvoleného i-tého bodu $(i = 1,\dots,l)$ ve všech j epochách* $(j = 1,\dots,m)$.

b) Stejným postupem jako v odstavci a) odvodíme sdružené elipsoidy pro rozdíly souřadnic pevně zvoleného i-tého bodu ($i = 1,\dots,l$) ve všech sousedních epochách.

Uvažujme blokovou matici

$$\mathrm{D}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1^{(i)} \\ \mathrm{C}_2^{(i)} \\ \vdots \\ \mathrm{C}_{m-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ kde matice } \mathrm{C}_j^{(i)} \text{ jsou dané vztahem (9).}$$

$$\mathrm{D}^{(i)}\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta^{(i)}_{2,1}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,2}} \\ \widehat{\beta^{(i)}_{2,2}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,3}} \\ \vdots \\ \widehat{\beta^{(i)}_{2,m-1}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,m}} \end{pmatrix} \sim N_{2(m-1)}\left[\begin{pmatrix} \beta^{(i)}_{2,1} - \beta^{(i)}_{2,2} \\ \beta^{(i)}_{2,2} - \beta^{(i)}_{2,3} \\ \vdots \\ \beta^{(i)}_{2,m-1} - \beta^{(i)}_{2,m} \end{pmatrix}, \mathrm{D}^{(i)}\mathrm{V}(\mathrm{D}^{(i)})'\right].$$

Užijeme-li opět Pearsonovo lema a zobecněnou Scheffého větu pro blokové matice

$$\mathrm{B}_j = (0_{2,2}, \dots, \mathrm{I}_2, \dots, 0_{2,2}),$$

o $m-1$ blocích rozměru 2×2, ve kterých je jednotková matice na j-tém místě, ostatní bloky jsou nulové, $j = 1, \dots, m-1$, dokážeme toto tvrzení:

$$\mathrm{E}^{\,s}_{1-\alpha}(\beta^{(i)}_{2,j} - \beta^{(i)}_{2,j+1}) =$$

$$\{u \in R^2 : [u - (\widehat{\beta^{(i)}_{2,j}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,j+1}})]'(var[\widehat{\beta^{(i)}_{2,j}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,j+1}}])^{-1}[u - (\widehat{\beta^{(i)}_{2,j}} - \widehat{\beta^{(i)}_{2,j+1}})] \leq \chi^2_{2(m-1)}(0, 1-\alpha)\},$$

tvoří $(1-\alpha)$*-sdružené konfidenční elipsoidy pro rozdíl souřadnic pevně zvoleného* i*-tého bodu* $(i = 1, \dots, l)$*, ve všech sousedních epochách měření* [j-té a $(j+1)$-ní, $\forall j = 1, \dots, m-1$].

5. Prahové elipsoidy

$(1-\alpha)$-konfidenční elipsoid $\mathrm{E}\,(\beta)$ pokrývá skutečnou hodnotu parametru β^* s pravděpodobností $1-\alpha$. Je to pojem, který přímo souvisí s přesností určení odhadu neznámého parametru.

Pojem prahového elipsoidu souvisí s testováním hypotéz o parametrech. Vyjádřeme pro zjednodušení zápisů model (1) ve tvaru

$$\mathrm{Y}^{(m)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \sim N_{nm}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \Sigma^{(m)}), \tag{12}$$

kde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(m)}_1, \mathbf{X}^{(m)}_2), \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} \in R^{2k+2lm}.$$

Pomocná věta 1

Nechť $\mathrm{Y}^{(m)}$ splňuje předpoklady regularity z věty 1. Potom platí

1.
$$R^2_0 = min\left\{(\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'[\Sigma^{(m)}]^{-1}(\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\beta} \in R^{2k+2lm}\right\}$$
$$= (\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\Sigma^{(m)}]^{-1}(\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \sim \chi^2_{mn-(2k+2lm)}(0),$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathrm{Y}^{(m)}.$$

2. Jsou-li dány matice $\mathrm{H}_{q,(2k+2lm)}$ a vektor h_{2k+2lm} takové, že $r(\mathrm{H}) = q \leq 2k+2lm$, potom

$$R^2_1 = min\left\{(\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'[\Sigma^{(m)}]^{-1}(\mathrm{Y}^{(m)} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\beta} \in R^{2k+2lm}, \mathrm{H}\boldsymbol{\beta} + \mathrm{h} = 0\right\}$$
$$= R^2_0 + (\mathrm{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathrm{h})'[\mathrm{H}(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathrm{H}']^{-1}(\mathrm{H}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathrm{h}).$$

Důkaz: [4], důkaz věty IV.1.4.

Nechť nulová hypotéza o parametru $\boldsymbol{\beta}$ má tvar

$$H_0 : \ \mathrm{H}\boldsymbol{\beta} + \mathrm{h} = 0,$$

a alternativní hypotéza

$$H_a: \ \mathrm{H}\boldsymbol{\beta} + \mathrm{h} = \boldsymbol{\xi} \neq 0.$$

Tuto hypotézu testujeme pomocí testovacího kriteria $\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) = R_1^2 - R_0^2$.

Pomocná věta 2

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) = R_1^2 - R_0^2 \ \sim \ \chi_q^2(0), \text{ platí-li nulová hypotéza } H_0,$$

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) = R_1^2 - R_0^2 \ \sim \ \chi_q^2(\delta), \text{ platí-li alternativní hypotéza } H_a.$$

Pro parametr necentrality platí

$$\delta = (\mathrm{H}\boldsymbol{\beta}^* + \mathrm{h})'[\mathrm{H}(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathrm{H}']^{-1}(\mathrm{H}\boldsymbol{\beta}^* + \mathrm{h}),$$

kde $\boldsymbol{\beta}^*$ je skutečná hodnota parametru $\boldsymbol{\beta}$.
Důkaz: [4], věta IV.1.4.

Síla testu v alternativě H_a je rovna

$$P[\text{zamítnutí } H_0 | \text{platí } H_a] = P[\chi_q^2(\delta) \geq \chi_q^2(0, 1-\alpha)].$$

Je-li $\delta = 0$, tj. jestliže H_0 platí, potom se síla testu rovná riziku zamítnutí pravdivé nulové hypotézy

$$P[\text{zamítnutí } H_0 | \text{platí } H_0] = P[\chi_q^2(0) \geq \chi_q^2(0, 1-\alpha)] = \alpha.$$

V dalším textu určíme v parametrickém prostoru hranici takové množiny (hranici tzv. prahové oblasti), na které dosáhne síla testu hodnoty κ_α, kde κ_α je číslo dost blízké číslu 1. Uvnitř prahové oblasti je síla testu menší než κ_α.

Definice 3 (viz [2], str. 158)
V modelu (12) nazveme *κ_α-prahovým elipsoidem pro parametr $\boldsymbol{\beta}$* oblast

$$\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \left\{u \ \in R^{2k+2lm} : (u \ - \boldsymbol{\beta}_0)'\mathrm{T}(u - \boldsymbol{\beta}_0) \leq c^2\right\}, c \in R^1,$$

kde symetrická matice T a číslo c jsou zvoleny tak, že $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\boldsymbol{\beta})$ splňuje následující požadavky:

a) $\boldsymbol{\beta}_0$ je hodnota parametru $\boldsymbol{\beta}$ určená nulovou hypotézou

$$H_0: \ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0,$$

kterou testujeme proti alternativní hypotéze $H_a : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0$ za rizika α,

b) leží-li skutečná hodnota $\boldsymbol{\beta}^*$ parametru $\boldsymbol{\beta}$ na hranici $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\boldsymbol{\beta})$, je hodnota síly testu pro alternativu H_a právě rovna κ_α.

Poznámka Z definice je zřejmé, že jakékoliv vybočení $\boldsymbol{\beta}^*$ z elipsoidu $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}$ zjistí testovací procedura s pravděpodobností nejméně rovnou κ_α.

Určení prahového elipsoidu pro parametr $\boldsymbol{\beta}_2$
V modelu (1) budeme testovat hypotézu o užitečných parametrech

$$H_0: \ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2^0 \quad \text{proti} \quad H_a: \ \boldsymbol{\beta}_2 \neq \boldsymbol{\beta}_2^0.$$

Užijeme Pomocnou větu 2, ve které zvolíme $\mathrm{H}_{2lm,(2k+2lm)} = (0_{2lm,2k}, \mathrm{I}_{2lm}), \mathrm{h} = -\boldsymbol{\beta}_2^0$.
Pro testové kriterium

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) = (\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} - \boldsymbol{\beta}_2^0)'[(0,\mathrm{I})(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}(0,\mathrm{I})']^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} - \boldsymbol{\beta}_2^0)$$

platí

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) \sim \chi_{2lm}^2(0), \quad \text{je-li } H_0 \ \text{ správná},$$

nebo

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}^{(m)}) \;\sim\; \chi^2_{2lm}(\delta),\ \text{je-li správná } H_a,$$

kde

$$\delta = (\boldsymbol{\beta}_2^* - \boldsymbol{\beta}_2^0)'[(0,\mathrm{I})(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}(0,\mathrm{I})']^{-1}(\boldsymbol{\beta}_2^* - \boldsymbol{\beta}_2^0),$$

a kde $\boldsymbol{\beta}^*$ je skutečná hodnota $\boldsymbol{\beta}$.

Síla testu je konstantní na množině těch vektorů $\boldsymbol{\beta}_2$, pro které

$$(\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_2^0)'[(0,\mathrm{I})(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}(0,\mathrm{I})']^{-1}(\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_2^0) = \delta.$$

Pro zvolenou sílu testu (úroveň spolehlivosti) κ_α určíme kritickou hodnotu parametru necentrality $\delta_{krit}(\kappa_\alpha)$ ze vztahu

(13) $$P[\chi^2_{2lm}(\delta_{krit}(\kappa_\alpha)) \geq \chi^2_{2lm}(0, 1-\alpha)] = \kappa_\alpha.$$

Poznámka Při řešení této rovnice se užívá aproximace náhodné veličiny s necentrálním χ^2-rozdělením náhodnou veličinou, která má centrální χ^2-rozdělení.
$\delta(\kappa_\alpha)$ dostaneme řešením rovnice

$$P\left[\frac{2lm+2\delta}{2lm+\delta}\chi^2_{\frac{(2lm+\delta)^2}{2lm+2\delta}}(0) \geq \chi^2_{2lm}(0,1-\alpha)\right] = \kappa_\alpha,$$

interpolací v tabulkách kvantilů χ^2-rozdělení (viz [4], str.106).

Z předchozích úvah plyne

Tvrzení 1 *κ_α-prahovým elipsoidem pro parametr $\boldsymbol{\beta}_2$ v modelu (1) je*

(14)

$$\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\boldsymbol{\beta}_2) = \left\{u \in R^{2lm} : (u - \boldsymbol{\beta}_2^0)'[(0,\mathrm{I})(\mathbf{X}'[\Sigma^{(m)}]^{-1}\mathbf{X})^{-1}(0,\mathrm{I})']^{-1}(u - \boldsymbol{\beta}_2^0) \leq \delta_{krit}(\kappa_\alpha)\right\},$$

kde $\delta_{krit}(\kappa_\alpha)$ je parametr necentrálního χ^2-rozdělení s $2lm$ stupni volnosti určený vztahem (13).

6. Sdružené prahové elipsoidy

Definice 4 (viz [2], str. 159)

V modelu (1) nazveme κ_α-sdruženými prahovými elipsoidy pro parametry $\beta_{2,j}^{(i)}$, $i = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, m$, takové množiny

$$\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\beta_{2,j}^{(i)}) = \{u \in R^2 : (u - \beta_{2,j}^{(i),0})'\mathrm{T}_i(u - \beta_{2,j}^{(i),0}) \leq c^2\},\ c \in R_1,$$

$i = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, m,$

ve kterých jsou 2×2 rozměrné symetrické matice T_i a číslo c zvolené tak, že $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\beta_{2,j}^{(i)})$ vyhovují následujícím požadavkům

a) $\beta_{2,j}^{(i),0},\ (j = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, m)$, jsou hodnoty určené nulovou hypotézou

$$H_0 : \beta_{2,1}^{(1)} = \beta_{2,1}^{(1),0}\ \ \&\ \ \beta_{2,1}^{(2)} = \beta_{2,1}^{(2),0}\ \ \&\ \dots \&\ \ \beta_{2,m}^{(l)} = \beta_{2,m}^{(l),0},$$

kterou testujeme (za rizika α) proti alternativě

$$H_a:\ \text{existuje aspoň jedna dvojice indexů } i,j \text{ taková, že } \beta_{2,j}^{(i)} \neq \beta_{2,j}^{(i),0};$$

b) leží-li skutečná hodnota $\beta_{2,j}^{(i)*}$ libovolného subvektoru $\beta_{2,j}^{(i)}$ vektoru $\boldsymbol{\beta}_2$ vně elipsoidu $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\beta_{2,j}^{(i)})$, nulová hypotéza se zamítá s pravděpodobností aspoň κ_α.

Tvrzení 2
V modelu (1) jsou *sdružené prahové elipsoidy pro parametry* $\beta_{2,j}^{(i)},\ i=1,\dots,l$, $j=1,\dots,m$, dány vztahy

$$\mathrm{T}\,{}^{s}_{\kappa_\alpha}(\beta_{2,j}^{(i)}) = \{u \ \in R^2 : (u \ -\beta_{2,j}^{(i),0})'(var[\widehat{\beta_{2,j}^{(i)}}])^{-1}(u \ -\beta_{2,j}^{(i),0}) \le \delta_{krit}(\kappa_\alpha)\},$$

kde $\delta_{krit}(\kappa_\alpha)$ je definována vztahem (13).

Toto tvrzení plyne z výrazu (14) pro prahový elipsoid $\mathrm{T}_{\kappa_\alpha}(\boldsymbol{\beta}_2)$ a ze vztahu pro sdružené elipsoidy pro parametry $\beta_{2,j}^{(i)}$ (viz odst. 4, bod a)).

Příklad (zadání formuloval prof. Kubáček,DrSc.)
V článku jsme předpokládali, že souřadnice sledovaných bodů jsou z R^2, v tomto příkladu se pro jednoduchost výkladu omezíme na případ jednorozměrný, kdy se budou měřit výšky sledovaných bodů. V geodetické praxi je totiž při sledování plošných souřadnic nutno do měření zahrnout i měření vzdáleností a úhlů a to vede ke složitým modelům. Metodika zpracování naměřených dat v jednorozměrné situaci je stejná s metodikou užívanou ve vícerozměrných situacích.

Představme si, že na staveništi velké stavby sledujeme (po provedených zemních úpravách) jeden pevný bod a tři pohyblivé body ve třech epochách. Pro potřeby simulace zvolíme "skutečnou" počáteční výšku pevného bodu 105.032 m, "skutečné" počáteční výšky pohyblivých bodů: 107.061 m; 106.968 m; 107.210 m.

Předpokládejme, že pokles podloží lze modelovat funkcí

$$\beta_{2,2}^{(i)} = \beta_{2,1}^{(i)} - 0.5(1-e^{-\gamma_i.14}),\ \gamma_i>0,\ i=1,2,3, \tag{15}$$

$$\beta_{2,3}^{(i)} = \beta_{2,2}^{(i)} - 0.5(1-e^{-\gamma_i.28}),\ \gamma>0,\ i=1,2,3, \tag{16}$$

tj. čas měříme ve dnech, první měření proběhne v čase 0, druhé měření za 14 dnů a poslední měření za dalších 14 dnů.

Předpokládejme, že $\gamma_1=\gamma_3$, tj. že chování podloží je v těchto dvou bodech stejné, odlišné je ve druhém bodě. Se stavbou na upraveném terénu se může začít v době, kdy je pokles podloží již zanedbatelný, např. bude-li pokles mezi druhou a třetí epochou měření v 1. a 3. bodě 1 cm, resp. ve 2. bodě 0.5 cm. Z tohoto požadavku pro naši simulaci dostaneme

$$\gamma_1=\gamma_3=0.277956, \quad \gamma_2=0.328215.$$

Dosazením do funkcí (15),(16) vypočteme "skutečné" hodnoty parametrů ve 2. a 3. epoše, výsledky v Tabulce 1.

Tabulka 1

	$\beta_{2,j}^{(1)}$	$\beta_{2,j}^{(2)}$	$\beta_{2,j}^{(3)}$
$j=1$	107.0610	106.9680	107.2100
$j=2$	106.5712	106.4731	106.7202
$j=3$	106.5612	106.4681	106.7102

Experiment lze popsat nejjednodušším modelem měření

$$\mathrm{Y}_j = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_{j1} \\ \mathrm{Y}_{j2} \\ \mathrm{Y}_{j3} \\ \mathrm{Y}_{j4} \\ \mathrm{Y}_{j5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_{2,j}^{(1)} \\ \beta_{2,j}^{(2)} \\ \beta_{2,j}^{(3)} \end{pmatrix} + \varepsilon_j,\ j=1,2,3.$$

Předpokládáme $var(\mathrm{Y}_j)=\Sigma=\sigma^2\mathrm{I}, \quad \sigma=0.001m.$

Hodnoty vektorů $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ nasimulujeme pomocí náhodných čísel z normálního rozdělení, např. hodnotu Y_{11} pro $\mu = 105.032$, hodnotu Y_{12} pro $\mu = 2.029$, hodnotu Y_{13} pro $\mu = -0.093$, Y_{14} pro $\mu = 0.242$, Y_{15} pro $\mu = -0.149$ atd., vždy pro $\sigma = 0.001$.

Výsledky simulací

$$Y_1 = (105.031; 2.02933; -0.092810; 0.241155; -0.148574)',$$

$$Y_2 = (105.033; 1.53815; -0.097792; 0.246624; -0.148653)',$$

$$Y_3 = (105.032; 1.52894; -0.092345; 0.242152; -0.148996)'.$$

Užitím vzorců (2), (3) vypočteme

$$\hat{\beta}_1 = 105.0320, \quad var(\hat{\beta}_1) = 0.33333.10^{-6},$$

podle vztahů (4), (5)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (\widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}, \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}}, \widehat{\beta_{2,1}^{(3)}}, \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}}, \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}}, \widehat{\beta_{2,2}^{(3)}}, \widehat{\beta_{2,3}^{(1)}}, \widehat{\beta_{2,3}^{(2)}}, \widehat{\beta_{2,3}^{(3)}})'$$

$(107.0613; 106.9686; 107.2098; 106.5701; 106.4723; 106.7189; 106.5609; 106.4683; 106.7102)'$,

$$var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \begin{pmatrix} A, & B, & B \\ B, & A, & B \\ B, & B, & A \end{pmatrix},$$

kde

$$A = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.1333 & 0.1333 & 0.1333 \\ 0.1333 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.1333 & 0.1667 & 0.2000 \end{pmatrix}, \ B = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.0333 & 0.0333 & 0.0333 \\ 0.0333 & 0.0333 & 0.0333 \\ 0.0333 & 0.0333 & 0.0333 \end{pmatrix}.$$

i) Konfidenční intervaly pro jednotlivé parametry

Protože máme parametry v R_1, konfidenční elipsoidy pro jednotlivé parametry, které byly odvozeny v odstavci 3.a, budou konfidenčními intervaly, např. pro první bod v první epoše měření a pro $\alpha = 0.05$

$$E(\beta_{2,1}^{(1)}) = \{u \in R^1 : (u - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}})[var\widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}]^{-1}(u - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}) \le \chi_1^2(0, 1-\alpha)\}$$
$$= \{u \in R^1 : |u - 107.0613| \le \sqrt{3.8415 \times 0.1333 \times 10^{-5}}\}.$$

Intervalové odhady všech parametrů uvedeme v následující tabulce

Tabulka 2

$\beta_{2,1}^{(1)}$	107.0613 ± 0.0022629	$< 107.05904; 107.063562 >$
$\beta_{2,1}^{(2)}$	106.9686 ± 0.0027718	$< 106.96583; 106.97137 >$
$\beta_{2,1}^{(3)}$	107.2098 ± 0.0027718	$< 107.20703; 107.21257 >$
$\beta_{2,2}^{(1)}$	106.5701 ± 0.0022629	$< 106.56784; 106.57236 >$
$\beta_{2,2}^{(2)}$	106.4723 ± 0.0027718	$< 106.46953; 106.47507 >$
$\beta_{2,2}^{(3)}$	106.7189 ± 0.0027718	$< 106.71613; 106.72167 >$
$\beta_{2,3}^{(1)}$	106.5609 ± 0.0022629	$< 106.55864; 106.56316 >$
$\beta_{2,3}^{(2)}$	106.4683 ± 0.0027718	$< 106.46553; 106.47107 >$
$\beta_{2,3}^{(3)}$	106.7102 ± 0.0027718	$< 106.70743; 106.71297 >$

Je vidět, že všechny nalezené intervalové odhady pokrývají "skutečné" hodnoty parametrů (viz Tabulka 1).

ii) Konfidenční elipsa pro rozdíly výšek 1. a 2. bodu mezi druhou a první epochou

Předpokládáme opět $\widehat{\boldsymbol{\beta}_2} \sim N(\boldsymbol{\beta}_2, var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2))$, označíme-li

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

platí

$$\mathrm{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}} \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}} \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} \\ \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)} \end{pmatrix}, \mathrm{C}[var\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2]\mathrm{C}' \right].$$

Užitím Pearsonova lematu odvodíme, že konfidenční elipsoid pro rozdíly uvedených souřadnic je tvaru

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} \\ \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \{\mathrm{u} \in R^2 : \left[\mathrm{u} - \begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}} \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}} \end{pmatrix}\right]' (\mathrm{C}[var\hat{\beta}_2]\mathrm{C}')^{-1} \left[\mathrm{u} - \begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}} \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}} \end{pmatrix}\right] \le \chi_2^2(0, 1{-}\alpha)\}.$$

Po dosazení (pro $\alpha = 0.05$) obdržíme

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} \\ \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)} \end{pmatrix} = \{\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)' \in R^2 :$$

$$(\mathrm{u}_1{+}0.4912; \mathrm{u}_2{+}0.4963) \left[10^6 \begin{pmatrix} 1.2500 & -0.7500 \\ -0.7500 & 0.7500 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 + 0.4912 \\ \mathrm{u}_2 + 0.4963 \end{pmatrix} \le 5.9915\}.$$

Pomocí této elipsy můžeme testovat nulovou hypotézu

$$H_0 : \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} = \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)} \text{ proti alternativě } \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} \ne \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)}.$$

Protože elipsa neobsahuje žádný bod přímky $y = x$, nulovou hypotézu zamítneme.

iii) Konfidenční elipsoid pro rozdíly výšek všech tří pohyblivých bodů mezi druhou a první epochou

Zcela stejným postupem jako v odstavci ii) dostaneme následující konfidenční elipsoid (opět pro $\alpha = 0.05$)

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} \beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)} \\ \beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)} \\ \beta_{2,2}^{(3)} - \beta_{2,1}^{(3)} \end{pmatrix} = \{\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)' \in R^3 :$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 + 0.4912 \\ \mathrm{u}_2 + 0.4963 \\ \mathrm{u}_3 + 0.4909 \end{pmatrix}' \left[10^6 \begin{pmatrix} 1.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & -0.5000 \\ -0.5000 & -0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 + 0.4912 \\ \mathrm{u}_2 + 0.4963 \\ \mathrm{u}_3 + 0.4909 \end{pmatrix} \le 7.8147\}.$$

iv) Sdružené konfidenční intervaly

Uveďme pro ilustraci sdružené konfidenční intervaly pro 1. bod ve všech třech epochách. Na základě teorie uvedené v odstavci 4a ($\alpha = 0.05$)

$$\mathrm{E}^{\,(s)}(\beta_{2,1}^{(1)}) = \{\mathrm{u} \in R^1 : (\mathrm{u} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}})^2 [var\widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}]^{-1} \le \chi_3^2(0, 1 - \alpha)\}$$

$= \{u \in R^1 : |u - 107.0613| \leq \sqrt{7.8147 \times 10^{-5} \times 0.1333}\} =< 107.05808; 107.06452 > .$

Obdobně vypočteme

$$\mathrm{E}^{(s)}(\beta_{2,2}^{(1)}) =< 106.56688; 106.57332 >, \quad \mathrm{E}^{(s)}(\beta_{2,3}^{(1)}) =< 106.55768; 106.56412 > .$$

Tyto intervaly současně pokrývají parametry $\beta_{2,1}^{(1)}, \beta_{2,2}^{(1)}, \beta_{2,3}^{(1)}$ (výšky 1. bodu ve všech třech epochách měření) se spolehlivostí alespoň 95%.

v) Sdružené konfidenční intervaly pro rozdíly výšek všech tří bodů mezi druhou a první epochou

Uvažujme matici

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

která z vektoru $\boldsymbol{\beta}_2$ vytvoří rozdíly zmíněné v názvu odstavce. Z předpokladu normality užitím Pearsonova lematu odvodíme, že platí rovnost

$$P\left[\begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}} - (\beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)}) \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}} - (\beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)}) \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(3)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(3)}} - (\beta_{2,2}^{(3)} - \beta_{2,1}^{(3)}) \end{pmatrix}' [\mathrm{D}(var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)\mathrm{D}']^{-1} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}} - (\beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)}) \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(2)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(2)}} - (\beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)}) \\ \widehat{\beta_{2,2}^{(3)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(3)}} - (\beta_{2,2}^{(3)} - \beta_{2,1}^{(3)}) \end{pmatrix} \leq \chi_3^2(0, 1-\alpha) \right] = 1 - \alpha.$$

Označme

$$\mathrm{A}_1 = (1; 0; 0), \quad \mathrm{A}_2 = (0; 1; 0), \quad \mathrm{A}_3 = (0; 0; 1).$$

Podle zobecněné Scheffého věty

$$P[\forall i = 1, 2, 3 : [\widehat{\beta_{2,2}^{(i)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(i)}} - (\beta_{2,2}^{(i)} - \beta_{2,1}^{(i)})]^2 [\mathrm{A}_i \mathrm{D}(var\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)\mathrm{D}'\mathrm{A}_i']^{-1} \leq \chi_3^2(0, 1-\alpha)] \geq 1-\alpha.$$

Proto 95%-ní sdružené konfidenční intervaly pro rozdíly výšek všech tří bodů mezi druhou a první epochou jsou následující

$$\mathrm{E}^{(s)}(\beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)})$$

$$= \{u \in R^1 : |u + 0.4912| \leq \sqrt{7.8147 \times (5.10^5)^{-1}}\} =< -0.4951531; -0.4872466 >,$$

$$\mathrm{E}^{(s)}(\beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)})$$

$$= \{\mathrm{u} \in R^1 : |u + 0.4963| \leq \sqrt{7.8147 \times (3.10^5)^{-1}}\} =< -0.5014038; -0.4911962 >,$$

$$\mathrm{E}^{(s)}(\beta_{2,2}^{(3)} - \beta_{2,1}^{(3)})$$

$$= \{\mathrm{u} \in R^1 : |u + 0.4909| \leq \sqrt{7.8147 \times (3.10^5)^{-1}}\} =< -0.4960038; -0.4857962 > .$$

Poznámka Pro srovnání uveďme “obyčejné” konfidenční intervaly pro uvedené rozdíly.

$$\mathrm{E}(\beta_{2,2}^{(1)} - \beta_{2,1}^{(1)}) = \{u \in R^1 : (u - [\widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}])^2 [var(\widehat{\beta_{2,2}^{(1)}} - \widehat{\beta_{2,1}^{(1)}}]^{-1} \leq \chi_1^2(0, 1-\alpha)\}$$

$$= \{u \in R^1 : |u + 0.4912| \leq \sqrt{3.8415 \times (5.10^5)^{-1}}\} =< -0.4939718; -0.4884282 > .$$

Obdobně

$$E\,(\beta_{2,2}^{(2)} - \beta_{2,1}^{(2)}) =< -0.4998784; -0.4927216 >,$$
$$E\,(\beta_{2,2}^{(3)} - \beta_{2,1}^{(3)}) =< -0.4944784; -0.4873216 > .$$

vi) Prahové elipsoidy

Podle *Tvrzení 1* je 95%-ním prahovým elipsoidem pro parametr $\boldsymbol{\beta}_2$ množina

$$\mathrm{T}_{0.95}(\boldsymbol{\beta}_2) = \{\mathrm{u} \in R^9 : (\mathrm{u} - \widehat{\boldsymbol{\beta}_2})'[var\widehat{\boldsymbol{\beta}_2}]^{-1}(\mathrm{u} - \widehat{\boldsymbol{\beta}_2}) \leq 24\}.$$

Číslo $\delta_{krit}(0.95) = 24$ jsme určili interpolací ze vztahu

$$P[\frac{9+2\delta}{9+\delta}\chi^2_{\frac{(9+\delta)^2}{9+2\delta}} \geq \chi^2_9(0; 0.95)] = 0.95.$$

Podle *Tvrzení 2* jsou množiny

$$\mathrm{T}_{0.95}(\beta_{2,j}^{(i)}) = \{\mathrm{u} \in R^1 : (\mathrm{u} - \beta_{2,j}^{(i),0})^2[\widehat{var\beta_{2,j}^{(i)}}]^{-1} \leq 24\},\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,$$

sdruženými prahovými elipsoidy pro parametry $\beta_{2,j}^{(i)},\ i = 1,2,3,\ j = 1,2,3.$

Jsou-li $\beta_{2,j}^{(i),0}$ projektované hodnoty parametrů $\beta_{2,j}^{(i)}$, (tj. hodnoty zadané projektantem), lze s pravděpodobností větší než 0.95 pomocí experimentu zjistit, zda se skutečné hodnoty těchto parametrů odlišují od projektovaných hodnot o víc než 5.6 mm pro 1. bod a o víc než 6.9 mm pro 2. a 3. bod.

Literatura

[1] Kubáček, L., Kubáčková, L., Volaufová, J.: *Statistical models with linear structures.* Veda, Publishing house of the Slovak Academy of Sciences, Bratislava, 1995.

[2] Kubáčková, L.: *Joint confidence and threshold ellipsoids in regression models.* Tatra Mountains Math. Publ. 7 (1996), 157 - 160.

[3] Kubáček, L., Kubáčková, L.: *Testing Statistical Hypotheses in Deformation Measurement; One Generalization of the Scheffé Theorem.* Acta Univ.Palacki.Olomuc., Mathematica **37** (1998), 81 - 88.

[4] Kubáček, L., Kubáčková, L.: *Statistika a metrologie.* Univerzita Palackého v Olomouci - vydavatelství, Olomouc, 2000.

[5] Kunderová, P.: *Linear models with nuisance parameters and deformation measurement.* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Mathematica **39** (2000), 95 - 105.

Univerzita Palackého, PřF, KMA&AM, Tomkova 40, 779 00 Olomouc
E-mail: kunderov@matnw.upol.cz