ROBUST'2000, 125 – 134

ASYMPTOTICKÉ TESTY HYPOTÉZ V MODELECH S RUŠIVÝMI PARAMETRY

MICHAL KULICH

Abstrakt. We discuss likelihood ratio, Wald and Rao test statistics for testing several parameters in a finite-dimensional model with nuisance parameters. A proof of their asymptotic χ^2 distribution is presented. Three examples on the use of the Rao score statistic are included.

Резюме: Ета статя занимает ся критерием отношения правдоподобия, критерием Ваљда и критерием Рао для проверки несколька параметров в конечномерныч моделяч с мешаюсчими параметрами. Показываеця доказатељство ич предељного χ^2 распределения. Применение накопленној статистики Рао иллюстрировано тремя примерами.

1. Úvod

Uvažujme pozorování $X_1, \dots, X_n$, kde X_i jsou měřitelná zobrazení $(\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Pro jednoduchost zde budeme předpokládat, že pozorování jsou nezávislá a stejně rozdělená, ale tento předpoklad není obecně nutný. Nechť je dána množina pravděpodobnostních měr $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \Theta\}$ na $(\Omega, \mathcal{A})$ a nechť rozdělení každého X_i jest $P_0 = P_{\boldsymbol\theta_0}$ pro nějaké $\boldsymbol\theta_0 \in \Theta$. Množinu $\mathcal{P}$ budeme nazývat *model* a budeme vyžadovat, aby pro libovolné parametry $\boldsymbol\theta, \boldsymbol\theta' \in \Theta$ takové, že $\boldsymbol\theta \neq \boldsymbol\theta'$, platilo $P_{\boldsymbol\theta} \neq P_{\boldsymbol\theta'}$. V tomto článku se omezíme na $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, takže $\boldsymbol\theta$ je vektor o d složkách.

Známe-li skutečný parametr $\boldsymbol\theta_0$ nebo umíme-li jej dobře odhadnout, víme vše o rozdělení každého X_i. V řadě praktických případů nás však nezajímá celé rozdělení každého pozorování, ale jen nějaký jeho aspekt. Představme si tedy, že každý parametr $\boldsymbol\theta \in \Theta$ můžeme rozdělit na dvě části, $\boldsymbol\theta_1$ o m složkách a $\boldsymbol\theta_2$ o $d-m$ složkách, takže $\boldsymbol\theta^{\mathsf T} = (\boldsymbol\theta_1^{\mathsf T}, \boldsymbol\theta_2^{\mathsf T})$. Parametr $\boldsymbol\theta_1$ nechť obsahuje vše, co nás zajímá o rozdělení $X_1, \dots, X_n$ (počet jeho složek m je obvykle malý), a parametr $\boldsymbol\theta_2$ nechť zahrnuje zbytek. Nazývejme $\boldsymbol\theta_1$ *cílový parametr* a $\boldsymbol\theta_2$ *rušivý parametr*. Stejným způsobem rozdělíme skutečný parametr $\boldsymbol\theta_0$ na $\boldsymbol\theta_{01}$ a $\boldsymbol\theta_{02}$. Chceme testovat hypotézu, že cílový parametr $\boldsymbol\theta_{01}$ je roven nějaké hypotetické hodnotě $\boldsymbol\theta_{\mathrm{H}1}$. Vzhledem k modelu, s nímž pracujeme, se vlastně jedná o test složené hypotézy

$$\mathrm{H}_0^*: \boldsymbol\theta_0 \in \Theta_{\mathrm{H}}^*, \quad \text{kde} \quad \Theta_{\mathrm{H}}^* = \{\boldsymbol\theta \in \Theta; \boldsymbol\theta_1 = \boldsymbol\theta_{\mathrm{H}1}\}$$

proti alternativě $\mathrm{H}_1^*: \boldsymbol\theta_0 \notin \Theta_{\mathrm{H}}^*$.

Tento přehledový článek pojednává o testech takovýchto složených hypotéz a podává souhrn teoretických výsledků, na nichž jsou založeny. V kapitole 2 krátce shrneme teorii maximálně věrohodných odhadů parametru $\boldsymbol\theta$ a zavedeme značení. V kapitole 3 definujeme testové statistiky pro testování hypotézy H_0^* a odvodíme jejich

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62F03.

Klíčová slova. Test Raovy, Waldovy a věrohodnostním poměrem, rušivé parametry.

Tento článek vznikl za podpory výzkumného záměru MSM 113200008 „Matematické metody ve stochastice“.

asymptotické rozdělení. Kapitola 4 bude věnována příkladům a kapitola 5 zobecní předchozí výklad na jiné než maximálně věrohodné odhady.

2. Odhady metodou maximální věrohodnosti

Vzhledem k formulaci problému, jak jsme ji popsali v předchozí kapitole, se jako vhodný nástroj k řešení jeví teorie maximálně věrohodných odhadů. Proto si zde zavedeme vhodné značení a krátce shrneme její základní výsledky, které budeme potřebovat. Budeme odhadovat celý parametr $\boldsymbol{\theta}$ na základě pozorování $X_1, \dots, X_n$ za předpokladu, že platí model $\mathcal{P}$.

Nechť $p(x;\boldsymbol{\theta})$ je hustota rozdělení $P_{\boldsymbol{\theta}}$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ. Definujme

$$L_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i;\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta,$$

$$\ell_n(\boldsymbol{\theta}) = \ln L_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln p(X_i;\boldsymbol{\theta}).$$

Funkci L_n nazýváme věrohodnostní funkce.

Definice. Vektor $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \in \Theta$ se nazývá maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ v modelu $\mathcal{P}$, právě když $L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) \geq L_n(\boldsymbol{\theta}) \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

Nyní předpokládejme, že $p(x;\boldsymbol{\theta})$ je dostatečně hladká funkce $\boldsymbol{\theta}$ v nějakém okolí $\boldsymbol{\theta}_0$, a definujme následující vektory a matice (odborné termíny pro tyto objekty, existují-li, jsou uvedeny v závorkách).

Značení.

$$\begin{aligned}
U(\boldsymbol{\theta} \mid X_i) &= \frac{\partial \ln p(X_i;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} && \text{(skórová funkce)},\\
U_n(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{n} U(\boldsymbol{\theta} \mid X_i) && \text{(skórová statistika)},\\
I(\boldsymbol{\theta} \mid X_i) &= -\frac{\partial^2 \ln p(X_i;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\mathsf{T}}}, &&\\
I_n(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{n} I(\boldsymbol{\theta} \mid X_i) && \text{(výběrová informační matice)},\\
\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}}\, I(\boldsymbol{\theta} \mid X_i) && \text{(Fisherova informační matice)}.
\end{aligned}$$

O Fisherově informační matici předpokládáme, že existuje a je positivně definitní v okolí $\boldsymbol{\theta}_0$. Původní definice maximálně věrohodného odhadu je z praktického hlediska poněkud nešikovná a proto budeme nadále pracovat s upravenou definicí.

Definice. Vektor $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \in \Theta$ se nazývá maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ v modelu $\mathcal{P}$, právě když řeší věrohodnostní rovnici $U_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}$.

Pro platnost asymptotických výsledků teorie maximální věrohodnosti potřebujeme mít splněny podmínky regularity, které zaručují dostatečnou hladkost a „rozumné“ chování věrohodnostní funkce v okolí $\boldsymbol{\theta}_0$. Možnou formulaci těchto podmínek lze nalézt například v knize Lehmann (1983, kap. 6.4). Ať už jsou však tyto podmínky formulovány jakkoli, vždy zaručují, že platí

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} U(\boldsymbol{\theta}_0 \mid X_i) = 0 \quad \text{a}$$

$$\mathrm{var}_{\boldsymbol{\theta}_0} U(\boldsymbol{\theta}_0 \mid X_i) = \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0) > 0.$$

Za platnosti podmínek regularity lze dokázat větu o existenci a konsistenci maximálně věrohodného odhadu (viz Lehmann, 1983, věta 6.4.1) a také následující tvrzení.

Tvrzení. Nechť jsou splněny podmínky regularity a nechť $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_0$. Pak

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} U_n(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbb{N}_d(\mathbf{0}, \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0))$,

(ii) $$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) U_n(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1) \xrightarrow{d} \mathbb{N}_d(\mathbf{0}, \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{1}$$

Uvažujme nyní jednoduchou hypotézu $\mathrm{H}_0 : \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_\mathrm{H}$ pro nějaké $\boldsymbol{\theta}_\mathrm{H} \in \Theta$. Zaveďme nejprve tři testové statistiky pro testování H_0 proti oboustranné alternativě.

Definice.

(i) Statistika
$$\lambda_n = \frac{L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{L_n(\boldsymbol{\theta}_\mathrm{H})}$$
se nazývá věrohodnostní poměr (Neyman a Pearson, 1928).

(ii) Statistika
$$W_n = n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_\mathrm{H})^\mathsf{T} \widehat{\mathbb{I}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_\mathrm{H})$$
se nazývá Waldova statistika (Wald, 1943).

(iii) Statistika
$$R_n = \frac{1}{n} U_n(\boldsymbol{\theta}_\mathrm{H})^\mathsf{T} \widehat{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\mathrm{H}) U_n(\boldsymbol{\theta}_\mathrm{H})$$
se nazývá Raova (skórová) statistika (Rao, 1947).

Matice $\widehat{\mathbb{I}}$, jež se vyskytuje v definici Raovy a Waldovy statistiky, představuje buď přímo Fisherovu informační matici $\mathbb{I}$ anebo její jakýkoliv konsistentní odhad, například $n^{-1} I_n$.

Přibližné kritické hodnoty pro všechny tři statistiky lze získat z kvantilů χ^2 rozdělení o d stupních volnosti, neboť za platnosti H_0 máme

$$\left.\begin{array}{r} 2 \ln \lambda_n \\ W_n \\ R_n \end{array}\right\} \xrightarrow{d} \chi^2_d.$$

U W_n a R_n tento výsledek plyne rovnou z předchozího tvrzení, u $2 \ln \lambda_n$ je třeba vhodným způsobem rozvinout logaritmus věrohodnosti v Taylorovu řadu.

3. Testy s rušivými parametry

Nyní se vraťme k problému testování složené hypotézy. Rozdělili jsme každý parametr na dvě části $\boldsymbol{\theta}^\mathsf{T} = (\boldsymbol{\theta}_1^\mathsf{T}, \boldsymbol{\theta}_2^\mathsf{T})$, kde první část má m složek. Podobně rozdělíme skutečný parametr $\boldsymbol{\theta}_0^\mathsf{T} = (\boldsymbol{\theta}_{01}^\mathsf{T}, \boldsymbol{\theta}_{02}^\mathsf{T})$, maximálně věrohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n^\mathsf{T} = (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n}^\mathsf{T}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}^\mathsf{T})$, skóre a informační matici

$$U_n(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_{1n}(\boldsymbol{\theta}) \\ U_{2n}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{11}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbb{I}_{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbb{I}_{21}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbb{I}_{22}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Zde $\mathbb{I}_{11}$ je matice typu $m \times m$, $\mathbb{I}_{12}$ je matice typu $m \times (d-m)$ atd.

Chceme testovat hypotézu $\mathrm{H}_0^* : \boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta_\mathrm{H}^*$, kde $\Theta_\mathrm{H}^* = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta; \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}\}$. Tato hypotéza se často nepřesně zapisuje jako $\mathrm{H}_0^* : \boldsymbol{\theta}_{01} = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}$, což svádí k následujícímu naivnímu přístupu, který ignoruje přítomnost rušivých parametrů. Jelikož neznáme $\boldsymbol{\theta}_{02}$, odhadneme jej maximálně věrohodným odhadem $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}$, jenž jest konsistentní. Motivováni tímto faktem nadále předstíráme, že $\boldsymbol{\theta}_{02}$ je přesně rovno $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}$ a fakticky přejdeme k m-rozměrnému submodelu $\mathcal{P}^* = \{P_{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \boldsymbol{\theta}_{02} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}\}$. Toto ovšem není korektní přístup, neboť $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}$ je náhodná veličina. Dále používáme teorii maximální věrohodnosti, jak byla popsána výše, aplikovanou na submodel $\mathcal{P}^*$, tj. se skórovou statistikou U_{1n} a informační maticí $\mathbb{I}_{11}$. Označíme-li hodnotu parametru za hypotézy v submodelu $\mathcal{P}^*$ jako

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n} \end{pmatrix},$$

dostaneme testové statistiky

(i)

$$\lambda_n = \frac{L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{L_n(\boldsymbol{\theta}^*_{\mathrm{H}})},$$

(ii)

$$W_n = n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1})^{\mathsf{T}} \widehat{\mathbb{I}}_{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}),$$

(iii)

$$R_n = \frac{1}{n} U_n(\boldsymbol{\theta}^*_{\mathrm{H}})^{\mathsf{T}} \widehat{\mathbb{I}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*_{\mathrm{H}}) U_n(\boldsymbol{\theta}^*_{\mathrm{H}}).$$

Bohužel, tyto statistiky za platnosti hypotézy obecně nemají očekávané χ^2_m rozdělení. Testy s požadovanou hladinou takto dostaneme jen v některých speciálních případech. Například je-li hustota pozorování normální, testovaný parametr je střední hodnota a rušivý parametr je rozptyl, pak limitní rozdělení testových statistik vskutku nezávisí na tom, zda rozptyl je znám či nikoli. Tento fakt je všeobecně znám již z úvodních statistických přednášek, což v praxi může svádět k slepému používání naivního přístupu i tam, kde není oprávněný.

Jak tedy dostaneme správné testové statistiky v přítomnosti rušivých parametrů? Předpokládejme, že hypotéza H_0^* platí a zkoumejme submodel $\mathcal{P}_{\mathrm{H}} = \{P_{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}\}$. Toto je na rozdíl od $\mathcal{P}^*$ opravdu submodel modelu $\mathcal{P}$, a to $(d-m)$-rozměrný. Označme $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_0$ v submodelu $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$. Platí

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1} \\ \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2n} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2n} \text{ řeší } U_{2n}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1} \\ \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2n} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Odtud $U_{2n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0$, ale $U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \neq 0$. Platí-li submodel $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$, tj. hypotéza H_0^*, dostaneme aplikací tvrzení z předchozí kapitoly

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U_{2n}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbb{N}_{d-m}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_{22}(\boldsymbol{\theta}_0)),$$

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{I}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) U_{2n}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{N}_{d-m}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Asymptotický rozptyl $\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2n} - \boldsymbol{\theta}_{02})$ v submodelu $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ je tedy $\mathbb{I}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Co je však asymptotický rozptyl $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n} - \boldsymbol{\theta}_{02})$ v modelu $\mathcal{P}$? Použijme následující lemma, které se snadno dokáže roznásobením matic.

Lemma. *Nechť* $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{11} & \mathbb{I}_{12} \\ \mathbb{I}_{21} & \mathbb{I}_{22} \end{pmatrix}$ *je regulární bloková matice a blok* $\mathbb{I}_{11}$ *je čtvercový. Potom*

$$\mathbb{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}^{11} & \mathbb{I}^{12} \\ \mathbb{I}^{21} & \mathbb{I}^{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbb{I}^{11} = \mathbb{I}_{11.2}^{-1}, \qquad \mathbb{I}^{12} = -\mathbb{I}_{11.2}^{-1}\mathbb{I}_{12}\mathbb{I}_{22}^{-1}, \qquad \mathbb{I}_{11.2} = \mathbb{I}_{11} - \mathbb{I}_{12}\mathbb{I}_{22}^{-1}\mathbb{I}_{21},$$
$$\mathbb{I}^{22} = \mathbb{I}_{22.1}^{-1}, \qquad \mathbb{I}^{21} = -\mathbb{I}_{22.1}^{-1}\mathbb{I}_{21}\mathbb{I}_{11}^{-1}, \qquad \mathbb{I}_{22.1} = \mathbb{I}_{22} - \mathbb{I}_{21}\mathbb{I}_{11}^{-1}\mathbb{I}_{12}.$$

Takže asymptotický rozptyl $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2n} - \boldsymbol{\theta}_{02})$ je $(\mathbb{I}_{22} - \mathbb{I}_{21}\mathbb{I}_{11}^{-1}\mathbb{I}_{12})^{-1} \geq \mathbb{I}_{22}^{-1}$. Odečtený součin tří matic je daň za neznalost parametru $\boldsymbol{\theta}_{01}$ v modelu $\mathcal{P}$. Tuto úvahu můžeme obrátit a vidíme, že asymptotický rozptyl $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} - \boldsymbol{\theta}_{01})$ za neznalosti rušivého parametru $\boldsymbol{\theta}_{02}$ je $(\mathbb{I}_{11} - \mathbb{I}_{12}\mathbb{I}_{22}^{-1}\mathbb{I}_{21})^{-1}$, zatímco kdybychom rušivý parametr znali přesně, rozptyl by byl $\mathbb{I}_{11}^{-1}$. Pokud matice $\mathbb{I}_{12}$ není nulová, tyto rozptyly nejsou stejné a naivní přístup proto selhává.

Nyní můžeme definovat testové statistiky pro testování hypotézy H_0^*:

(i) Věrohodnostní poměr

$$\lambda_n^* = \frac{L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)},$$

(ii) Waldova statistika

$$W_n^* = n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1})^\mathsf{T}\widehat{\mathbb{I}}_{11.2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}),$$

(iii) Raova (skórová) statistika

$$R_n^* = \frac{1}{n}U_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^\mathsf{T}\widehat{\mathbb{I}}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)U_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{n}U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^\mathsf{T}\widehat{\mathbb{I}}_{11.2}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n).$$

Waldova statistika pro test $\mathrm{H}_0^* : \theta_{01} = 0$ při $m = 1$ je vlastně druhou mocninou podílu odhadu parametru a jeho odhadnuté směrodatné odchylky. Vzhledem k tomu, že tyto podíly tisknou takřka všechny statistické programy, je Waldova statistika v praxi nejpoužívanější.

Nyní definované statistiky již mají očekávané limitní rozdělení:

Věta. *Jsou-li splněny podmínky regularity, pak za platnosti H_0^**

$$\left.\begin{array}{rr} (i) & 2\ln\lambda_n^* \\ (ii) & W_n^* \\ (iii) & R_n^* \end{array}\right\} \xrightarrow{d} \chi_m^2.$$

Tvrzení (ii) je triviální, ale důkaz (i) a (iii) není jednoduché ve statistické literatuře najít. Tvrzení (i) je dokázáno například v knihách Rao (1978, oddíl 6e.3) a Serfling (1980, oddíl 4.4.4). Serflingův důkaz však obsahuje chybu. Proto zde tvrzení (i) a (iii) dokážeme.

Důkaz. Dokažme nejprve (i). Rozvojem $\ell_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ v Taylorovu řadu kolem bodu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ dostaneme

$$\ell_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \ell_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) + U_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)^\mathsf{T}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) + \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)^\mathsf{T}\left[-I_n(\boldsymbol{\theta}_n^*)\right](\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n),$$

kde $\boldsymbol{\theta}_n^*$ leží na přímce mezi $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$. Za platnosti H_0^* tedy $n^{-1}I_n(\boldsymbol{\theta}_n^*) \xrightarrow{p} \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Jelikož $U_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0$, platí

$$2\ln\lambda_n^* = 2[\ell_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \ell_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)] = \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^\mathsf{T}\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0)\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) + o_P(1).$$

Z aproximací pro $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$ a $\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$ uvedených v (1) a (2) ihned plyne, že

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \left[\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}_0)\right]\frac{1}{\sqrt{n}}U_n(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1),$$

kde

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{pmatrix}$$

je matice $d \times d$. Limitní rozdělení $2 \ln \lambda_n^*$ je tudíž totožné s rozdělením náhodné veličiny $\boldsymbol{Z}^\mathsf{T} \mathbb{A} \boldsymbol{Z}$, kde $\boldsymbol{Z} \sim \mathbb{N}_d(\mathbf{0}, \mathbb{I})$ a

$$\mathbb{A} \equiv (\mathbb{I}^{-1} - \mathbb{B})\mathbb{I}(\mathbb{I}^{-1} - \mathbb{B}) = \mathbb{I}^{-1} - \mathbb{B}.$$

Argument $\boldsymbol{\theta}_0$ jsme u matic $\mathbb{B}$ a $\mathbb{I}$ pro zjednodušení přestali psát. Ježto $\mathbb{A}\,\mathbb{I}$ je idempotentní matice, $\boldsymbol{Z}^\mathsf{T} \mathbb{A} \boldsymbol{Z} \sim \chi^2_{\mathrm{tr}(\mathbb{A}\,\mathbb{I})}$. Zbývá určit $\mathrm{tr}(\mathbb{A}\,\mathbb{I}) = \mathrm{r}(\mathbb{A}\,\mathbb{I}) = \mathrm{r}(\mathbb{I}\mathbb{A}\,\mathbb{I})$. Ale snadno se ověří, že

$$\mathbb{I}\mathbb{A}\,\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{11.2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže hledaný počet stupňů volnosti je $\mathrm{r}(\mathbb{I}\mathbb{A}\,\mathbb{I}) = m$.

Nyní přistupme k důkazu (iii). Za platnosti H_0^* máme $\widehat{\mathbb{I}}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{p} \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Víme, že $U_{2n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0$ a Taylorovým rozvojem dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} U_{1n}(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{n} \frac{\partial U_{1n}(\boldsymbol{\theta}_n^*)}{\partial \boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}} \sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0),$$

kde $\boldsymbol{\theta}_n^* \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_0$ a $n^{-1} \frac{\partial U_{1n}(\boldsymbol{\theta}_n^*)}{\partial \boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}} \xrightarrow{p} -(\mathbb{I}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0), \mathbb{I}_{12}(\boldsymbol{\theta}_0))$. Z aproximace (2) pro $\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$ plyne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} U_{1n}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbb{I}_{12}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbb{I}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \frac{1}{\sqrt{n}} U_{2n}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1).$$

Jelikož $n^{-1/2} U_n(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbb{N}_d(\mathbf{0}, \mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}_0))$, limitní rozdělení $\frac{1}{\sqrt{n}} U_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ je m-rozměrné normální s nulovou střední hodnotou. Snadno se spočte, že asymptotický rozptyl je roven $\mathbb{I}_{11.2}(\boldsymbol{\theta}_0)$.

Označíme-li $\boldsymbol{Z}$ libovolný náhodný vektor s rozdělením $\mathbb{N}_m(\mathbf{0}, \mathbb{I}_{11.2}(\boldsymbol{\theta}_0))$, hned vidíme, že limitní rozdělení R_n^* je totožné s rozdělením náhodné veličiny

$$\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)^\mathsf{T} \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{Z}^\mathsf{T} \mathbb{I}^{11}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^\mathsf{T} \mathbb{I}_{11.2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{Z}$$

a $\boldsymbol{Z}^\mathsf{T} \mathbb{I}_{11.2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{Z} \sim \chi^2_m$. □

Všechny tři testové statistiky tedy mají za hypotézy stejné limitní rozdělení. Jsou však mezi nimi jiné rozdíly. Za prvé, k výpočtu Raovy skórové statistiky stačí odhadnout parametr jen za platnosti hypotézy, tedy v často mnohem jednodušším submodelu $\mathcal{P}_\mathrm{H}$. Pro Waldovu statistiku potřebujeme odhad v obecném modelu $\mathcal{P}$ a pro věrohodnostní poměr odhady oba. Tyto dvě statistiky jsou tedy výpočetně náročnější. Za druhé, je rozšířen názor, že Waldova statistika konverguje ke svému limitnímu rozdělení mnohem pomaleji než skórová statistika nebo poměr věrohodností a proto při běžných rozsazích výběru testy založené na Waldově statistice často nedodržují požadovanou hladinu. Toto tvrzení vychází z praktických zkušeností odborníků, kteří tyto testy používají, je však obtížné najít pro ně teoretické zdůvodnění ve statistické literatuře.

4. Příklady

V této kapitole uvedeme několik příkladů testových statistik, které lze odvodit jako Raovy skórové statistiky v modelech s rušivými parametry.

Příklad 1. Znaménkový test. Anděl (1999) ukazuje odvození testové statistiky pro znaménkový test doplněný testem na pořadí, kterou publikovali Rayner a Best (1997). Máme dvě ošetření A a B. První skupina $n_{1\cdot}$ osob vyzkouší nejprve A a pak B a zaznamená, kterému ošetření dává přednost. Druhá skupina složená z jiných $n_{2\cdot}$ osob testuje ošetření v opačném pořadí a také zaznamená své preference. Chceme rozhodnout, zda je mezi oběma ošetřeními nějaký rozdíl. Anděl (1999) předpokládal, že $n_{1\cdot} = n_{2\cdot}$, ale my tuto podmínku klást nebudeme.

Označme N_{k1} počet lidí z k-té skupiny, kteří preferovali ošetření A a N_{k2} počet lidí z k-té skupiny, kteří preferovali B. Nechť dále $N_{1j} + N_{2j} = N_{\cdot j}$, $j = 1, 2$ a $n_{1\cdot} + n_{2\cdot} = n$. Situaci můžeme popsat následujícím modelem: Máme dva nezávislé binomické výběry, $N_{11} \sim \mathrm{Bi}(n_{1\cdot}, p_1)$ a $N_{21} \sim \mathrm{Bi}(n_{2\cdot}, p_2)$. Parametr p_k vyjadřuje pravděpodobnost, že člověk z k-té skupiny preferuje ošetření A. Chceme testovat hypotézy $\mathrm{H}_0 : (p_1 + p_2)/2 = 1/2$ a $\mathrm{H}_0' : p_1 = p_2$. Hypotéza H_0 znamená, že není rozdíl mezi ošetřeními a hypotéza H_0' znamená, že nezáleží na pořadí, v jakém byla ošetření testována. Vzhledem k těmto hypotézám zavedeme nové parametry ϕ a ξ tak, že $p_1 = 1/2 + \xi + \phi$ a $p_2 = 1/2 + \xi - \phi$. Hypotézy teď můžeme psát $\mathrm{H}_0 : \xi = 0$ a $\mathrm{H}_0' : \phi = 0$.

Sestavme nyní skórový test hypotézy $\mathrm{H}_0 : \xi = 0$. Máme parametr $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \phi)^\mathsf{T}$ a parametrický prostor $\Theta = \{(\xi, \phi)^\mathsf{T} \in (-1/2, 1/2)^2 : |\xi + \phi| < 1/2, |\xi - \phi| < 1/2\}$. Cílový parametr je ξ, jeho dimense je $m = 1$ a rušivý parametr je ϕ.

Logaritmus věrohodnosti je, až na konstantu,

$$\ell_n(\boldsymbol{\theta}) =$$
$$N_{11} \ln(\frac{1}{2} + \xi + \phi) + N_{12} \ln(\frac{1}{2} - \xi - \phi) + N_{21} \ln(\frac{1}{2} + \xi - \phi) + N_{22} \ln(\frac{1}{2} - \xi + \phi).$$

Derivováním podle ξ a podle ϕ spočítáme skóre

$$U_{1n}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_{11}}{\frac{1}{2} + \xi + \phi} - \frac{N_{12}}{\frac{1}{2} - \xi - \phi} + \frac{N_{21}}{\frac{1}{2} + \xi - \phi} - \frac{N_{22}}{\frac{1}{2} - \xi + \phi},$$
$$U_{2n}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_{11}}{\frac{1}{2} + \xi + \phi} - \frac{N_{12}}{\frac{1}{2} - \xi - \phi} - \frac{N_{21}}{\frac{1}{2} + \xi - \phi} + \frac{N_{22}}{\frac{1}{2} - \xi + \phi}.$$

Odhadem Fisherovy informační matice je výběrová informace dělená n:

$$\widehat{I}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{I}_{22}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4n_{1\cdot}/n}{1 - 4(\xi + \phi)^2} + \frac{4n_{2\cdot}/n}{1 - 4(\xi - \phi)^2},$$
$$\widehat{I}_{12}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{I}_{21}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4n_{1\cdot}/n}{1 - 4(\xi + \phi)^2} - \frac{4n_{2\cdot}/n}{1 - 4(\xi - \phi)^2}.$$

Nyní potřebujeme odhad $\widetilde{\phi}$ rušivého parametru ϕ za platnosti $\mathrm{H}_0 : \xi = 0$. Víme, že $\widetilde{\phi}$ řeší $U_{2n}(0, \widetilde{\phi}) = 0$, což dává $\widetilde{\phi} = (N_{11} + N_{22} - N_{12} - N_{21})/(2n)$. Zbývá spočítat $U_{1n}(0, \widetilde{\phi})$ a $\widehat{I}_{11.2}(0, \widetilde{\phi})$. Po úpravě dostaneme

$$U_{1n}(0, \widetilde{\phi}) = n \left(\frac{N_{11} - N_{22}}{N_{11} + N_{22}} + \frac{N_{21} - N_{12}}{N_{21} + N_{12}} \right)$$

a

$$\widehat{I}_{11.2}(0, \widetilde{\phi}) = \frac{4n_{1\cdot}n_{2\cdot}/n}{(N_{11} + N_{22})(N_{12} + N_{21})}.$$

Všimněme si, že je-li $n_{1\cdot} = n_{2\cdot}$, pak za platnosti hypotézy $I_{12} = I_{21} = 0$. V takovém případě $I_{11.2}(0, \widetilde{\phi}) = I_{11}(0, \widetilde{\phi})$ a tudíž zde nezáleží na tom, zda rušivý parametr ϕ je znám či nikoli.

Raova skórová statistika po úpravě vyjde

$$R_n^* = \frac{U_{1n}^2(0,\widetilde{\phi})}{n\widehat{I}_{11.2}(0,\widetilde{\phi})} = \left(\frac{1}{n_{1.}} + \frac{1}{n_{2.}}\right)\frac{(N_{11}N_{21} - N_{12}N_{22})^2}{(N_{11}+N_{22})(N_{12}+N_{21})}.$$

Její limitní rozdělení je χ_1^2 a v případě $n_{1.} = n_{2.}$ je totožná se statistikou, kterou uvádí Anděl (1999). Stejným způsobem se odvodí statistika pro test hypotézy $\mathrm{H}_0' : \phi = 0$.

Příklad 2. Test exponenciality proti weibullovské alternativě. Nechť jsou dána nezávislá a stejně rozdělená pozorování $X_1, \ldots, X_n$. Chtěli bychom vědět, zda mají exponenciální rozdělení, a jako alternativu budeme uvažovat rozdělení Weibullovo. Každé X_i tedy má hustotu

$$p(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], \quad x > 0, \quad \alpha,\beta > 0.$$

Parametr je $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta)^{\mathsf{T}}$ a parametrický prostor $\Theta = (\mathbb{R}^+)^2$.

Chceme testovat hypotézu $\mathrm{H}_0 : \beta = 1$, neboť za její platnosti mají X_i rozdělení $\mathrm{Exp}(1/\alpha)$ se střední hodnotou α. To je rušivý parametr. Skórový vektor má složky

$$U_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^{\beta} - 1\right],$$

$$U_2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta}\left[1 + \ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^{\beta} - \left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right].$$

Fisherova informační matice má po úpravě tvar

$$\mathbb{I}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha^2} & \frac{\gamma-1}{\alpha} \\ \frac{\gamma-1}{\alpha} & \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\pi^2}{6} + (1-\gamma)^2\right] \end{pmatrix},$$

kde $\gamma \doteq 0.5772$ je Eulerova konstanta.

Za platnosti $\mathrm{H}_0 : \beta = 1$ snadno odhadneme α jako $\widetilde{\alpha} = \bar{X}_n = n^{-1}\sum X_i$. Dále spočítáme

$$U_2(\widetilde{\alpha}, 1) = n + \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{\bar{X}_n}\sum_{i=1}^n X_i \ln X_i$$

a

$$I_{22.1}(\widetilde{\alpha}, 1) = \left[\frac{\pi^2}{6} + (1-\gamma)^2\right] - \frac{(\gamma-1)^2/\widetilde{\alpha}^2}{1/\widetilde{\alpha}^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Takže skórová statistika má tvar

$$R_n^* = \frac{U_{2n}^2(\widetilde{\alpha},1)}{nI_{22.1}(\widetilde{\alpha},1)} = \frac{6n}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{n\bar{X}_n}\sum_{i=1}^n X_i \ln X_i\right]^2$$

a její limitní rozdělení je χ_1^2. V tomto příkladě můžeme jen ocenit, že jsme nemuseli počítat odhady parametrů obecného Weibullova rozdělení.

TABULKA 1. Délky telefonních hovorů prof. X (min:sec)

0:18	3:42	0:48	0:48	0:54	0:18	1:48	3:24	1:42
0:12	0:36	1:12	2:00	0:42	4:06	3:42	2:00	0:30
2:54	3:42	12:06	0:36	2:12	3:36	1:06	2:30	
2:12	2:54	2:18	0:06	1:54	1:24	1:12	3:24	

V tabulce 1 jsou uvedeny délky výchozích telefonních hovorů nejmenovaného zaměstnance KPMS za jeden měsíc ($n = 34$). Přesvědčme se s pomocí naší skórové statistiky, zda tato data neodporují obecnému přesvědčení o exponenciálním rozdělení doby telefonního hovoru. Snadno spočítáme, že v tomto případě $R_n^* = 1,158$, což je mnohem menší než $3,842$, 95% kvantil χ_1^2 rozdělení. Nemůžeme tedy zamítnout exponencialitu ve prospěch Weibullova rozdělení.

Příklad 3. Test exponenciality proti gama alternativě. Opět máme nezávislá a stejně rozdělená pozorování $X_1, \ldots, X_n$ a chceme testovat, zda mají exponenciální rozdělení. Za alternativu tentokrát vezmeme gama rozdělení. Hustota X_i má tedy tvar

$$f(x; a, p) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-ax}, \quad x > 0, \quad a, p > 0.$$

Parametr je $\boldsymbol{\theta} = (a, p)^\mathsf{T}$ a parametrický prostor $\Theta = (\mathbb{R}^+)^2$.

Chceme testovat hypotézu $\mathrm{H}_0 : p = 1$. Za platnosti H_0 mají X_i rozdělení $\mathrm{Exp}(a)$ se střední hodnotou $1/a$. Rušivý parametr je a. Skórový vektor má složky

$$U_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{np}{a} - \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$U_2(\boldsymbol{\theta}) = n \ln a - n \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

a Fisherova informační matice jest

$$\mathbb{I}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{p}{a^2} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \psi''(p) \end{pmatrix},$$

kde $\psi''(p) = \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} = \frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p)} - \left[\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}\right]^2$.

Za platnosti $\mathrm{H}_0 : p = 1$ odhadneme a jako $\widetilde{a} = 1/\bar{X}_n$. Jelikož $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$ a $\Gamma''(1) = \pi^2/6 + \gamma^2$, snadno zjistíme, že

$$U_2(\widetilde{a}, 1) = n \left(\gamma + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{X_i}{\bar{X}_n} \right)$$

a $I_{22.1}(\widetilde{a}, 1) = \frac{\pi^2}{6} - 1$. Raova skórová statistika má tvar

$$R_n^* = \frac{U_{2n}^2(\widetilde{a}, 1)}{n I_{22.1}(\widetilde{a}, 1)} = \frac{6n}{\pi^2 - 6} \left(\gamma + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln \bar{X}_n \right)^2$$

a její limitní rozdělení je opět χ_1^2.

Spočítáme-li tuto statistiku z dat uvedených v tabulce 1, dostaneme 1,509. I to je hluboko pod kritickou hodnotou a exponencialitu tedy nemůžeme zamítnout ani ve prospěch gama rozdělení.

5. Zobecnění

Maximálně věrohodný odhad samozřejmě není jediná možnost, jak odhadnout parametry modelu $\mathcal{P}$. Často se používají i jiné odhady, založené na kvazivěrohodnosti nebo obecněji na nějaké rovnici odhadu $U(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}$, kde $U(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \psi(\boldsymbol{\theta} \mid X_i)$ již není skóre odvozené z nějaké věrohodnostní funkce, ale obecná funkce parametrů a pozorování. Budeme ji nazývat pseudoskóre. Do této třídy odhadů spadají například mnohé M-odhady, parciálně věrohodný odhad zavedený Coxem (1972) pro model proporcionálního risika, Wedderburnův (1974) kvazivěrohodnostní odhad pro zobecněné lineární modely, zobecněné rovnice odhadu (GEE) Lianga a Zegera (1986) pro korelovaná data, pseudověrohodnostní odhad Breslowa a Claytona (1993) pro zobecněné lineární modely s náhodnými efekty a řada dalších důležitých odhadů.

Aby řešení $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ rovnice $U(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}$ mělo naději být konsistentním odhadem, musí platit $\mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\, \psi(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}$. Na rozdíl od maximálně věrohodného odhadu však nyní obecně

$$\mathrm{var}_{\boldsymbol{\theta}_0}\, \psi(\boldsymbol{\theta}_0) \neq -\,\mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\, \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathsf{T}}}.$$

Označme tedy levou stranu této nerovnosti (rozptyl pseudoskóre) Σ a pravou stranu (minus derivace pseudoskóre) $\mathbb{D}$. Obě matice typu $d \times d$ rozdělíme na čtyři bloky odpovídající cílovým a rušivým parametrům. Budeme předpokládat, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je slabě konsistentní a že $n^{-1/2}U(\boldsymbol{\theta}_0)$ je asymptoticky normální s nulovou střední hodnotou a rozptylovou maticí Σ. Z toho již plyne, že $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathbb{N}_d(\mathbf{0}, \mathbb{D}^{-1}\Sigma\mathbb{D}^{-1\mathsf{T}})$.

Jak je to s testováním složené hypotézy $\mathrm{H}_0^* : \boldsymbol{\theta}_{01} = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{H}1}$ v tomto případě? Je zřejmé, že test poměrem věrohodností není možné zavést zcela obecně. Waldův test je zato díky asymptotické normalitě $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ snadno aplikovatelný. Raovu skórovou statistiku je nutné upravit:

$$R_n = \frac{1}{n} U_1(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^{\mathsf{T}} \mathbb{V}^{-1} U_1(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n),$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ je odhad parametru za hypotézy,

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} I_m & -\mathbb{D}_{12}\mathbb{D}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} I_m \\ -\mathbb{D}_{22}^{-1}\mathbb{D}_{12}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$$

a I_m zde představuje jednotkovou matici typu $m \times m$. Stejný postup, jakým jsme odvodili limitní rozdělení Raovy statistiky v předchozí kapitole, nám ukáže, že i tato statistika má asymptoticky rozdělení χ^2_m.

Literatura

Anděl, J. (1999) Asymptotické testy. *Informační Bulletin ČSS*, roč. **10**, č. 3, 10–21.

Breslow, N. E. a Clayton, D. G. (1993) Approximate inference in generalized linear mixed models. *JASA*, **88**, 9–25.

Cox, D. R. (1972) Regression models and life-tables (with Discussion). *JRSS* B, **34**, 187–220.

Lehmann, E. L. (1983) *Theory of Point Estimation.* New York: Wiley.

Liang, K.-Y. a Zeger, S. L. (1986) Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, **73**, 13–22.

Neyman, J. a Pearson, E. S. (1928) On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. *Biometrika*, **20A**, 175–240 a 263–294.

Rao, C. R. (1947) Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proc. Comb. Phil. Soc.*, **44**, 50–57.

Rao, C. R. (1978) *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace.* Praha: Academia.

Rayner, J. C. W. a Best, D. J. (1997) How order affects the sign test. *Biometrics*, **53**, 1416–1421.

Serfling, R. J. (1980) *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* New York: Wiley.

Wald, A. (1943) Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, 426–482.

Wedderburn, R. W. M. (1974) Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss-Newton method. *Biometrika*, **61**, 439–447.

UK MFF, KPMS, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

E-mail: kulich@karlin.mff.cuni.cz