ROBUST'2000, 59 – 64

ADAPTIVNÍ PŘÍSTUP V KALMANOVĚ FILTRU

PETR FRANĚK

Abstrakt. V práci je navržena adaptivní modifikace Kalmanova filtru pro gaussovský stavový model invariantní v čase s jednorozměrnou posloupností pozorování obsahující odlehlá pozorování. Modifikovaný filtr je využit k detekci a zpracování odlehlých pozorování.
An adaptive modification of the Kalman filter is proposed for gaussian time-invariant state-space model with univariate observations and additive outliers. This modified filter is used for detection and processing of additive outliers.
Резюме. В єтой работе предложена адаптивная модификация филтера Калмана для модели с одномерным наблюдением. Модификобанный филтер исползован для детекции и обработки отдалённых наблюдений.

1. Úvod

Kalmanův filtr (KF) byl navržen Kalmanem (viz [4]) jako rekurentní odhad neznámého stavového vektoru $\boldsymbol{x}_t$ ve *stavovém modelu*. Poté byl poměrně úspěšně využíván při řešení úloh z oblasti navigace a zpracování signálu. Pro jeho příznivé vlastnosti (jednoduchost, rychlost, flexibilita) byl později používán také v ekonometrických úlohách. Z této doby se také datují první články, jejichž autoři poukazují na nedostatečnou robustnost Kalmanova filtru vůči vlivu odlehlých pozorování.

V souvislosti se stavovými modely se rozlišují dva typy odlehlých pozorování: aditivní odlehlá pozorování (AO), která jsou generována při transformaci stavu do pozorování a ovlivňují tedy pouze jediné pozorování, a inovační odlehlá pozorování (IO), která jsou generována ve stavové rovnici a ovlivňují všechna následující pozorování. Detekce a zpracování druhého typu odlehlých pozorování je poměrně nesnadná a v literatuře není téměř zastoupena.

V této práci je studována možnost konstrukce adaptivní modifikace KF tak, aby výsledný filtr umožnil on-line identifikaci a zpracování aditivních odlehlých pozorování. Tato práce vznikla v rámci přípravy disertační práce. Nepodává prozatím úplné řešení problému robustnosti KF, ale otevírá, doufejme, slibný směr pro další výzkum.

2. Kalmanův filtr a jeho vlastnosti

2.1. **Definice stavového modelu.** V této práci je uvažován stavový model v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} y_t &= \boldsymbol{h} x_t + v_t \\ \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t. \end{aligned} \tag{1}$$

Zde $\boldsymbol{x}_t$ je n-rozměrný stavový vektor a y_t je jednorozměrné pozorování, $\boldsymbol{F}$ je známá matice typu $(n\times n)$, $\boldsymbol{h}$ je známý vektor typu $(1\times n)$ a v_t a $\boldsymbol{w}_t$ jsou nezávislé centrované

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62M10; Secondary 62F35.
Klíčová slova. Kalmánův filtr, ARMA procesy.
Tato práce vznikla za podpory grantů GAČR 201/00/0770 a MSM 113200008.

náhodné složky s neznámým rozptylem $\operatorname{var} v_t = \sigma_t^2$ a známou kovarianční maticí $\operatorname{var} \boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{R}_t$. O počátečním stavu $\boldsymbol{x}_0$ se předpokládá $\mathrm{E}\,\boldsymbol{x}_0 = \tilde{\boldsymbol{x}}_0$ a $\operatorname{var} \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{P}_0$.

Stavový systém v tomto tvaru zahrnuje celou řadu jednorozměrných modelů časových řad, například strukturální časové řady nebo modely ARMA a umožňuje jejich unifikaci a rozšíření (viz např. [3]).

2.2. **Kalmanův filtr.** Označíme-li $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ historii pozorování do času t, je nejlepší nestranný lineární odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ neznámého stavu $\boldsymbol{x}_t$ založený na historii Y_t a jeho kovarianční matice $\boldsymbol{P}_{t|t} = \mathrm{E}\,(\boldsymbol{x}_t - \hat{\boldsymbol{x}}_{t|t})(\boldsymbol{x}_t - \hat{\boldsymbol{x}}_{t|t})'$ dán rekurentními vztahy Kalmanova filtru jako

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1} + \boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}' d_t^{-2}(y_t - \boldsymbol{h}\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1}) \\
\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1} &= \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{t-1|t-1} \\
\boldsymbol{P}_{t|t} &= \boldsymbol{P}_{t|t-1} - \boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}' d_t^{-2}\boldsymbol{h}\boldsymbol{P}'_{t|t-1} \\
\boldsymbol{P}_{t|t-1} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{t-1|t-1}\boldsymbol{F}' + \boldsymbol{R}_t \\
d_t^2 &= \boldsymbol{h}\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}' + \sigma_t^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Hodnoty $I_t = (y_t - \boldsymbol{h}\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1})$ se nazývají *inovace*. Z vlastností Kalmanova filtru (viz [1]) vyplývá, že inovace jsou centrované, vzájemně nekorelované a proměnné d_t^2 jsou jejich rozptyly.

Mezi stavovými modely se rozeznávají dva speciální případy. Pokud jsou náhodné složky v_t a $\boldsymbol{w}_t$ gaussovské, nazývá se model (1) *gaussovský*, pokud se rozdělení náhodných chyb nemění v čase (v případě modelu (1) tedy $\sigma_t^2 = \sigma^2$ a $\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{R}\ \forall t$), nazývá se model *invariantní v čase*. V gaussovském modelu je Kalmanův filtr dokonce nejlepším odhadem x_t získaným pomocí historie Y_t a výstupy filtru ($\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ a $\boldsymbol{P}_{t|t}$) jsou střední hodnotou a rozptylem normálního rozdělení $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_t \mid Y_t)$. Inovace I_t mají v tomto případě také normální rozdělení. V modelu invariantním v čase, který vyhovuje podmínce stability $|\lambda_i(\boldsymbol{F})| < 1$, kde $\lambda_i(\boldsymbol{F})$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{F}$ (viz [1], str. 77), konverguje filtr exponenciálně rychle do tzv. *vyrovnaného stavu* (steady-state), v němž jsou rozptyly inovací d_t^2 a kovarianční matice $\boldsymbol{P}_{t|t}$ také invariantní v čase.

Dále v této práci bude předpokládáno, že model (1) je stabilní, gaussovský a invariantní v čase.

2.3. **Odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ v případě odlehlého pozorování.** I v případech, kdy připustíme znalost systémových matic $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{h}$, většinou nelze předpokládat znalost rozptylu σ_t^2. V případě, že při výpočtu je použita nesprávná hodnota tohoto rozptylu, je výsledný odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ odchýlen oproti odhadu získanému se správnou hodnotou rozptylu směrem k pozorování y_t a podobně diagonální prvky matice $\boldsymbol{P}_{t|t}$ podhodnocují skutečný rozptyl jednotlivých složek vektoru $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$. Například v případě, že y_t je aditivní odlehlé pozorování, je skutečná hodnota rozptylu σ_t^2 mnohem větší než použitá hodnota a filtrovaný stav $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ je výrazně odchýlen směrem k odlehlému pozorování (viz obrázek 2).

3. Adaptivní Kalmanův filtr

3.1. **Odhad rozptylu σ^2.** Je zřejmé, že klíčovým faktorem, který v uvažovaném modelu určuje kvalitu odhadu, je rozdíl mezi skutečným a použitým rozptylem náhodných složek v_t. V prvé řadě je proto třeba hledat adaptivní (a konzistentní) odhad tohoto rozptylu. Vzhledem k tomu, že dále v této práci se pracuje s inovacemi, je zřejmě účelné odhadovat d^2 místo σ^2. Při hledání vhodného on-line odhadu lze využít předpokladu, že model (1) je gaussovský a invariantní v čase a inovace jsou tedy nezávislé a stejně rozdělené s rozdělením $N(0, d^2)$. Tato vlastnost ovšem platí až po časovém okamžiku t_0, kdy se filtr dostane do rovnovážného stavu. Prvních t_0 pozorování je proto použito ke spuštění adaptivního filtru: nejprve se (pro rozumný počáteční odhad σ^2) určí časový okamžik t_0 jako první doba, kdy pro nějakou míru vzdálenosti mezi maticemi platí $\|\boldsymbol{P}_{t+1|t} - \boldsymbol{P}_{t|t-1}\|^2 < \varepsilon$. Z prvních t_0 pozorování se poté pomocí EM-algoritmu odhadne počáteční odhad $\hat{\sigma}^2_{t_0}$ (EM-algoritmus je podrobně popsán například v [3].) Počáteční odhad rozptylu inovací d^2 v čase t_0 je pak dán jako $\hat{d}^2_{t_0} = \boldsymbol{h}\boldsymbol{P}_{t_0|t_0-1}\boldsymbol{h}' + \hat{\sigma}^2_{t_0}$. Po čase t_0 lze odhad $\hat{d}^2_t$ rekurentně inovovat pomocí vztahu:

$$\hat{d}^2_{t+1} = \frac{1}{t-t_0} I^2_{t+1} + \frac{t-t_0-1}{t-t_0} \hat{d}^2_t, \; t \geq t_0 + 1. \tag{3}$$

Díky vlastnostem Kalmanova filtru v uvažovaném modelu platí pro $t \geq t_0 + 1$ vztah $(t - t_0 - 1)\hat{d}^2_t / d^2 \sim \chi^2_{t-t_0-1}$.

3.2. **Model odlehlých pozorování.** Vznik odlehlých pozorování typu AO lze modelovat nahrazením náhodné složky v_t následujícím členem:

$$(1 - Z^\gamma_t)v_t + Z^\gamma_t q_t. \tag{4}$$

Zde $v_t \sim N(0, \sigma^2)$ odpovídá náhodnému členu z modelu (1), $q_t \sim H$ (H je centrované symetrické rozdělení) je náhodná složka generující odlehlá pozorování a $Z^\gamma_t \sim Alt(\gamma)$ jsou nezávislé náhodné indikátory odlehlých pozorování. V modelu (4) se tedy předpokládá, že v případě $\gamma\,100\%$ pozorování je běžná náhodná složka v_t nahrazena náhodnou složkou pocházející z rozdělení s těžkými konci a zbytek pozorování pochází z běžného modelu.

Tento model vede k následující úvaze: klasický KF představuje pro většinu pozorování stále nejlepší odhad (zejména z hlediska rychlosti výpočtu), předpokládaný stavový model neplatí pouze pro zlomek pozorování. Pouze tato pozorování je tedy třeba zpracovat pomocí jiné metody, případně vhodné modifikace Kalmanova filtru.

Hledání modifikace KF se věnovala již řada autorů. V převážné většině navrhují odlehlá pozorování oříznout pomocí Huberovy funkce (např. [9], [11]) nebo zpracovávat pomocí bayesovského přechodu ([5], [7], [10]). V prvním případě je zachována jednoduchost rekurentní aktualizace odhadů, odstranění nebo seříznutí pozorování, které překročí určitou hranici, však znamená ztrátu informace. Ve druhém případě se pracuje s negaussovskými rozděleními a neexistuje obdoba Kalmanových rovnic (viz [7]). Používají se proto metody numerické integrace nebo metody Monte-Carlo, přičemž složitost takových řešení roste pro delší časové řady nad rozumné meze.

3.3. **Detekce a zpracování odlehlých pozorování.** Vzhledem k vlastnostem odhadu rozptylu inovací uvedeným výše lze psát $I_t / \sqrt{\sum_{j=t_0}^{t-1} I_j^2} \sim t_{t-t_0-2}$. Pozorování y_t, $t > t_0 + 2$, tedy bude detekováno jako odlehlé, pokud

$$\frac{|\, I_t \,|}{\sqrt{\sum_{j=t_0}^{t-1} I_j^2}} \geq t^{-1}_{t-t_0-2}(1 - \alpha/2), \tag{5}$$

kde α je úroveň nastavená před spuštěním filtru. Tato hodnota odráží přístup analytika k odlehlým pozorováním.

V případě, že je pozorování y_t identifikováno jako odlehlé, měl by být odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ zkonstruován pomocí rozdělení generujícího odlehlá pozorování. Samozřejmě by bylo možné zvolit rozdělení H s dostatečně těžkými konci tak, aby jím bylo možné modelovat i velmi odlehlá pozorování. Elegantnějším řešením je určení systému různě těžkých rozdělení, z něhož bude adaptivní filtr vybírat vhodné rozdělení s dostatečně (nikoli však zbytečně) těžkými konci.

Nejjednodušší takový systém lze definovat jako

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ h(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} \right], \rho \in (0,\infty) \right\}. \tag{6}$$

Jedná se o systém normálních rozdělení, v němž je směrodatná odchylka ρ použita k rozlišení jednotlivých rozdělení v systému. Práce s tímto systémem bude zřejmě velmi snadná, výsledný adaptivní filtr ale nebude zbaven nechtěných vlastností způsobených právě předpokladem normality náhodné složky v_t.

Následující systém byl navržen v knize [2]:

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ h(q) = \frac{k}{\varphi} \exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{q}{\varphi} \right|^{\frac{2}{1+\rho}} \right], \varphi > 0, \rho \in [0,1] \right\}, \tag{7}$$

kde $1/k = \Gamma((3+\rho)/2)\, 2^{(3+\rho)/2}$. Rozptyl náhodné veličiny X s rozdělením s hustotou $h(q)$ z tohoto systému je $\operatorname{var} X = 2^{1+\rho}\,\varphi^2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}(1+\rho)\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+\rho)\right)$. Jak je patrné, hodnota $\rho = 0$ odpovídá normálnímu rozdělení, hodnota $\rho = 1$ dvojitě exponenciálnímu rozdělení, které představuje nejtěžší alternativu daného systému. Při zpracování časové řady by měl být parametr φ^2 nastaven na hodnotu $\hat{\sigma}^2_{t_0}$, tedy tak, aby rozdělení s $\rho = 0$ odpovídalo rozdělení složky v_t.

Volba parametru ρ by v konkrétním případě měla souviset se vzdáleností pozorované hodnoty y_t od očekávané hodnoty $\hat{y}_{t|t-1}$. K tomuto účelu se přímo nabízí dosažená hladina testu (5), tedy $p_t = 2\,(1 - F_{t_{t-t_0-2}}(|I_t|))$, kde $F_{t_{t-t_0-2}}$ je distribuční funkce t-rozdělení s $t - t_0 - 2$ stupni volnosti. Je tedy $\hat{\rho} = R(p_t)$, kde funkci R lze volit libovolně tak, aby v systému $\mathcal{L}_1$ platilo: $R(p_t) \to \hat{\sigma}_{t_0}$ pro $p_t \to \alpha-$ a $R(p_t) \to \infty$ pro $p_t \to 0+$; a v systému $\mathcal{L}_2$ platilo: $R(p_t) \to 0$ pro $p_t \to \alpha-$ a $R(p_t) \to 1$ pro $p_t \to 0+$. Volba funkce R opět odráží požadavek analytika na stupeň zajištění modelu proti vlivu odlehlých pozorování.

Návrh adaptivního filtru má dvě úskalí: je třeba určit, jak má být proveden rekurentní výpočet odhadu $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ a $\boldsymbol{P}_{t|t}$ v případě, že pozorování y_t je identifikováno jako odlehlé a bylo vybráno vhodné rozdělení H, a dále je třeba určit, jakým způsobem se má v čase $t+1$ filtr vrátit zpět do gaussovského režimu.

Druhý ze sporných bodů lze vyřešit následujícím způsobem: odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ a jeho kovarianční matice $\boldsymbol{P}_{t|t}$ získané nějakou metodou negaussovské filtrace lze chápat jako apriorní rozdělení pro spuštění Kalmanových rekurzí v čase $t+1$. Rozdělení $\mathcal{L}(x_t|Y_t)$, které v tomto případě není gaussovské, je tedy nahrazeno normálním rozdělením se stejnou střední hodnotou a rozptylem. Tento přístup lze obhájit díky skutečnosti, že vliv počátečního rozdělení mizí v časově invariantním filtru exponenciálně rychle. Chyba způsobená nahrazením skutečného rozdělení normálním je tedy systémem vstřebána exponenciálně rychle. Podrobnější diskuzi této vlastnosti je možné vyhledat v praci [7].

První problém je složitější. Za předpokladu, že pozorování y_t je identifikováno jako odlehlé a na jeho základě je vybráno rozdělení $H_t(\hat{\rho})$, je třeba provést rekurentní přechod. V obecném stavovém modelu lze tento přechod popsat pomocí bayesovského kalkulu. Zajímáme-li se pouze o střední hodnotu a rozptyl rozdělení $\mathcal{L}(x_t|Y_t)$, je možné využít následující větu vyslovenou v práci [8]:

Platí-li $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_t|Y_{t-1}) \sim N(\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1}, \boldsymbol{P}_{t|t-1})$ a je-li podmíněné rozdělení $p(y_t|Y_{t-1})$ dvakrát diferencovatelné, pak

$$(8) \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{t|t} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1} + \boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}' g_t(y_t) \\ \boldsymbol{P}_{t|t} &= \boldsymbol{P}_{t|t-1} - \boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}' G_t(y_t)\boldsymbol{h}\boldsymbol{P}_{t|t-1} \end{aligned}$$

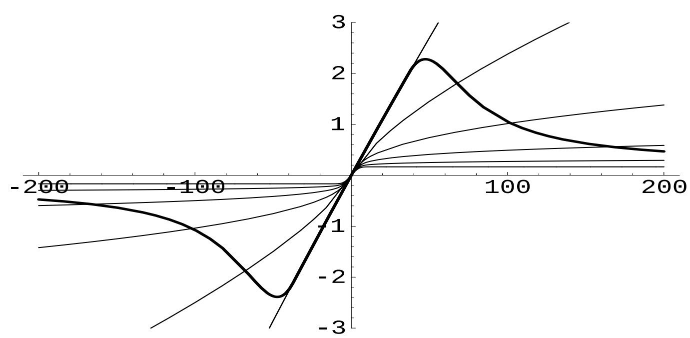
kde $g_t(y_t) = -\frac{1}{p(y_t|Y_{t-1})}\frac{\partial p(y_t|Y_{t-1})}{\partial y_t}$ je inovační funkce určující vliv nového pozorování na odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ a $G_t(y_t) = \frac{\partial g_t(y_t)}{\partial y_t}$ je inovační funkce určující vliv nového pozorování na kovarianční matici $\boldsymbol{P}_{t|t}$.

Pro provedení filtrace je třeba hustota $p(y_t \mid Y_{t-1})$ a její první a druhá derivace v bodě y_t. V podstatě jde o nalezení konvoluce $N(\boldsymbol{h}\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1}, \boldsymbol{h}\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}') * H$. V systému $\mathcal{L}_1$ je její nalezení snadné a Masreliezův filtr přejde na Kalmanův filtr. V obecném případě většinou nelze konvoluci explicitně vyjádřit.

Tak je tomu i v případě systému $\mathcal{L}_2$. Označíme-li $\hat{y}_{t|t-1} = \boldsymbol{h}\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t-1}$ a $\hat{\tau}^2 = \boldsymbol{h}\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{h}'$ je třeba vypočítat integrál

$$(9) \qquad p(y_t \mid Y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\tau}}\frac{k}{\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\hat{y}_{t|t-1})^2}{\hat{\tau}^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x-y_t}{\varphi}\right|^{\frac{2}{1+\rho}}}\mathrm{d}x.$$

Numerická aproximace funkce g_t pro různé hodnoty ρ je zobrazena na obrázku 1. Tučně je zobrazena celková inovační funkce použitá při zpracování odlehlých pozorování. Z jejího tvaru lze dospět k následujícímu závěru: vliv odlehlých pozorování na $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ je omezen podobně jako v případě Huberovy funkce. Na rozdíl od ní je však v adaptivním filtru dána větší váha mírně odlehlým pozorování - to odpovídá určité míře nejistoty, od které hodnoty je třeba pokládat pozorování za odlehlá. Matice $\boldsymbol{P}_{t|t}$ závisí na derivaci inovační funkce. V případě Huberovy funkce je tato derivace pro všechna oříznutá pozorování nulová, vliv odlehlého pozorování se na hodnotách matice neprojeví. Oproti tomu v případě adaptivního filtru má pro mírně odlehlá pozorování inovační funkce g_t zápornou derivaci, tzn. matice $\boldsymbol{P}_{t|t}$ se oproti matici $\boldsymbol{P}_{t|t-1}$ zvětší o pozitivně semidefinitní matici, což opět odpovídá zvýšené nejistotě v případě mírně odlehlých pozorování. Pro velmi odlehlá pozorování je derivace blízká nule, velmi odlehlá pozorování tedy nemají na odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_{t|t}$ téměř žádný vliv.

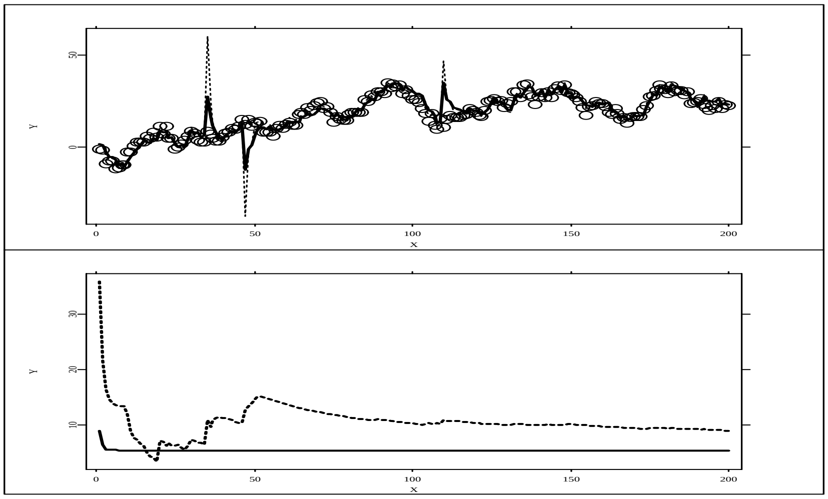


Obrázek 1. Inovační funkce pro systém $\mathcal{L}_2$

3.4. **Příklad.** Ze systému

$$(10) \qquad \begin{aligned} y_t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_t + v_t \\ \boldsymbol{x}_t &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t. \end{aligned}$$

bylo generováno 200 pozorování, přičemž náhodné složky v_t byly nahrazeny modelem (4) s $\sigma^2 = 4$, $\gamma = 0.01$ a $H \sim N(0, 10\,000)$. Adaptivní filtr identifikoval 3 odlehlá pozorování a zpracoval je pomocí systému $\mathcal{L}_1$. Výsledky jsou zobrazeny na obrázku 2.



Obrázek 2. Skutečná (kolečka), filtrovaná klasickým KF (přerušovaně) a adaptivním KF (plně) první složka stavového vektoru (horní panel) a odhadnutý rozptyl $P_{t|t,1}$ získaný klasickým KF se skutečnou hodnotou σ^2 (plně) a adaptivním KF (přerušovaně) (dolní panel)

Literatura

[1] Anderson, B.D.O., Moore, J.B.: *Optimal Filtering*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1979.

[2] Box, G.E.P., Tiao, G.C.: *Bayesian Inference In Statistical Analysis*, Addison-Wesley, London 1973.

[3] Franěk, P.: *Kalmanův filtr*, seminární práce KPMS MFF UK, Praha 1999.

[4] Kalman, R.E.: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J Basic Eng., no. 82, 35-45, 1960.

[5] Kitagawa, G.:*Non-Gaussian State-Space Modelling of Nonstationary Time Series*, Journal of the American Statistical Association, vol. 82, no. 400, 1987.

[6] Kitagawa, G.: *A Self-organising State-space Model*, J. Amer. Statist. Assoc., 93, 1203-1215, 1998.

[7] Künsch, H.R.: *State Space and Hidden Markov Models*, In: Complex Stochastic Systems, vyjde.

[8] Masreliez, C.J.: *Approximate Non-Gaussian Filtering with Linear State and Observation Relations*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-20, 1975.

[9] Masreliez, C.J., Martin, R.D.: *Robust Bayesian Estimation for the Linear Model and Robustifying the Kalman Filter*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-22, 1977.

[10] Meinhold, R.J., Singpurwalla, N.Z.: *Robustification of Kalman Filter*. Journal of the American Statistical Association, vol. 84, no. 406, 1989.

[11] Ruckdeschel, P.: *Robust Kalman Filter*, In: XploRe: Applications Guide, Springer-Verlag, Berlin 2000.

UK MFF, KPMS, Sokolovská 83, 186 75 Praha
E-mail: `franek@karlin.mff.cuni.cz`