ROBUST'98, 129 – 138

O JEDNOM MNOHOROZMĚRNÉM LINEÁRNÍM MODELU S RUŠIVÝMI PARAMETRY

Pavla KUNDEROVÁ[1]

PřF UP, KMA

Abstract. The characterization for class of functions of useful parameters which are estimable under the model with nuisance parameters and under the model, where the nuisance parameters are neglected and estimators of which have the same variance in both mentioned models, is given in the paper.
Резюме: В статье установленно такое семейство функций полезных параметров, оценки которых несмещенны как в модели с мешающими параметрами, так и в модели, в которой не предполагаются мешающие параметры и оценки которых в обоих моделях имеют одинаковые дисперсии.

1. Úvod

Nechť R^n označuje prostor všech n-rozměrných reálných vektorů, u_p a $\mathrm{A}_{m,n}$ označuje reálný sloupcový p-rozměrný vektor a reálnou matici rozměru $m \times n$. Symboly A', $\mathrm{A}^{(j)}$, $\mathcal{R}(\mathrm{A})$, $\mathcal{N}(\mathrm{A})$, $r(\mathrm{A})$ označují transpozici, j-tý sloupec, prostor vytvořený nad sloupci matice A, nulový prostor a hodnost matice A. Symbol I označuje jednotkovou matici.

Dále $vec(\mathrm{A})$ označuje sloupcový vektor $((\mathrm{A}^{(1)})', \dots, (\mathrm{A}^{(n)})')'$ vytvořený ze sloupců matice A. Symbol $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ označuje Kroneckerův (tenzorový) součin matic A,B. Symbol A^- označuje libovolnou pseudoinverzní (g-inverzní) matici k matici A (splňující $\mathrm{AA^-A} = \mathrm{A}$), A^+ označuje Moore–Penroseovu g-inverzní matici k matici A (splňující $\mathrm{AA^+A} = \mathrm{A}$, $\mathrm{A^+AA^+} = \mathrm{A}^+$, $(\mathrm{AA}^+)' = \mathrm{AA}^+$, $(\mathrm{A^+A})' = \mathrm{A^+A}$).

P_A resp. Q_A označuje ortogonální projektor na $\mathcal{R}(\mathrm{A})$ resp. na $\mathcal{R}^\perp(\mathrm{A}) = \mathcal{N}(\mathrm{A}')$, $\mathrm{A}^\perp$ označuje libovolnou matici, pro kterou $\mathcal{R}^\perp(\mathrm{A}) = \mathcal{R}(\mathrm{A}^\perp)$.

Je-li $\mathcal{R}(\mathrm{A}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{S})$, S pozitivně semidefinitní, označuje $\mathrm{P}_A^{S^-}$ projektor, který projektuje vektory z prostoru $\mathcal{R}(\mathrm{S})$ do prostoru $\mathcal{R}(\mathrm{A})$ podél $\mathcal{R}(\mathrm{SA}^\perp)$. Všechny projektory $\mathrm{P}_A^{S^-}$ dostaneme podle vzorce $\mathrm{A(A'S^-A)^-A'S^-} + \mathrm{F(I - SS^-)}$, kde F je libovolná matice. $\mathrm{Q}_A^{S^-} = \mathrm{I} - \mathrm{P}_A^{S^-}$. Symbol $\vee$ ve vztahu $\mathcal{R}(\mathrm{A}) \vee \mathcal{R}(\mathrm{B})$ se definuje následovně: $\mathcal{R}(\mathrm{A}) \vee \mathcal{R}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{u} + \mathrm{v} : \mathrm{u} \in \mathcal{R}(\mathrm{A}), \mathrm{v} \in \mathcal{R}(\mathrm{B})\}$.

Uvažujme následující mnohorozměrný lineární model

$$\mathrm{Y}_{n,m} = \mathrm{X}_{n,k}\mathrm{B}_{k,m} + \varepsilon_{n,m}. \tag{1}$$

[1]Tato práce vznikla s podporou grantu GA ČR 201/96/0665.

Y označuje matici pozorování, X je známá matice (matice plánu) a B je matice neznámých parametrů,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \end{pmatrix},$$

kde B_2 je $s \times m$ matice rušivých parametrů. Prvky $r \times m$ matice B_1 jsou užitečné parametry, které (nebo jejich funkce) máme odhadnout z matice pozorování Y.

K problému rušivých parametrů v lineárních modelech existuje dvojí přístup. První respektuje strukturu modelu a hledá třídy takových funkcí užitečných parametrů, jejichž odhad určený při zanedbání rušivých parametrů zůstává nestranný i v úplném modelu. Obdobně se požaduje, aby rozptyl odhadu funkce z této třídy byl stejný jak v modelu s rušivými parametry, tak v modelu, kde rušivé parametry neuvažujeme. Druhý přístup řeší problém rušivých parametrů jejich eliminací pomocí takové transformace observačního vektoru, při které se neztrácí informace o užitečných parametrech. Cílem článku je aplikovat první přístup, vyjdeme-li z poznatků práce [4].

Řekneme, že parametrická funkce $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1)$ je nevychýleně odhadnutelná v modelu (1), existuje-li odhad $\mathrm{L}'vec(\mathrm{Y}), \mathrm{L} \in R^{mn}$, takový, že $E[\mathrm{L}'vec(\mathrm{Y})] = \mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1), \forall vec(\mathrm{B}_1), \forall vec(\mathrm{B}_2)$.

2. Poznámky a pomocná tvrzení

Lemma 1. *Model (1) lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru*

$$vec(Y) = (I \otimes W, I \otimes Z) \begin{pmatrix} vec(B_1) \\ vec(B_2) \end{pmatrix} + vec(\varepsilon), \tag{2}$$

kde $X_{n,k} = (W_{n,r}, Z_{n,s})$*;* W*,* Z *jsou známé nenulové matice libovolné hodnosti.*

Důkaz: tvrzení je důsledkem vztahu

$$vec(\mathrm{AB}) = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})vec(\mathrm{B}), \tag{3}$$

který platí pro všechny matice odpovídajícího typu. □

Předpokládejme, že

$$E[vec(\mathrm{Y})] = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}, \mathrm{I} \otimes \mathrm{Z}) \begin{pmatrix} vec(\mathrm{B}_1) \\ vec(\mathrm{B}_2) \end{pmatrix},$$

$$Var[vec(\mathrm{Y})] = \mathrm{I}_{m,m} \otimes \Sigma_{n,n}.$$

Varianční matice $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{n}$ libovolného sloupce matice pozorování Y je zřejmě minimálně pozitivně semidefinitní (p.s.d.).

V tomto článku budeme uvažovat lineární model

$$\mathcal{M}_a(\mathrm{I}\otimes\Sigma) = \left[vec(\mathrm{Y}), (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}, \mathrm{I}\otimes\mathrm{Z}) \begin{pmatrix} vec(\mathrm{B}_1) \\ vec(\mathrm{B}_2) \end{pmatrix}, \mathrm{I}\otimes\Sigma \right], \tag{4}$$

s rušivými parametry a lineární model

$$\mathcal{M}(\mathrm{I}\otimes\Sigma) = [vec(\mathrm{Y}), (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W})vec(\mathrm{B}_1), \mathrm{I}\otimes\Sigma], \tag{5}$$

(kde jsou rušivé parametry zanedbány),
za předpokladu, že matice Σ je taková, že platí

$$\mathcal{R}(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}, \mathrm{I}\otimes\mathrm{Z}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{I}\otimes\Sigma). \tag{6}$$

To je ekvivalentní s předpoklady

$$\mathcal{R}(\mathrm{W}) \subset \mathcal{R}(\Sigma) \quad \& \quad \mathcal{R}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{R}(\Sigma). \tag{7}$$

Předpoklad (6) zaručuje, že

$$vec(\mathrm{Y}) \in \mathcal{R}(\mathrm{I}\otimes\Sigma) \quad (s.j.).$$

Označení. Nechť (ve shodě s článkem [4]), $\mathcal{E}_a$ resp. $\mathcal{E}$ označuje množinu všech lineárních funkcí užitečných parametrů $vec(\mathrm{B}_1)$, které jsou nevychýleně odhadnutelné za platnosti modelu (4) resp. modelu (5).

Index a bude označovat, že odhad je uvažován v úplném modelu, tj. v modelu s rušivými parametry.

Zřejmě

$$\mathcal{E} = \{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) : \ \mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}')\}. \tag{8}$$

Poznámka 1. Uvažovanou lineární funkci $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1)$ je možno vyjádřit v jiném tvaru. Máme $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1', \dots, \mathrm{p}_m')'$, kde $\mathrm{p}_j, j = 1, \dots, m$, jsou r-rozměrné vektory. Nechť $\mathrm{P}' = (\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_m)$. Užijeme-li rovnost

$$(vec(\mathrm{A}'))'vec(\mathrm{B}) = Tr(\mathrm{AB}),$$

můžeme $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1)$ přepsat takto

$$\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) = [vec(\mathrm{P}')]'vec(\mathrm{B}_1) = Tr(\mathrm{PB}_1).$$

Podle (3)

$$\mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}') \Leftrightarrow \exists \mathrm{A}_{m,n}, \mathrm{p} = (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}')vec(\mathrm{A}') \Leftrightarrow \exists \mathrm{A}_{m,n}, \mathrm{P} = \mathrm{AW}.$$

Tedy $Tr(\mathrm{PB}_1) \in \mathcal{E}$ právě tehdy, existuje-li $m \times n$ matice A taková, že $\mathrm{P} = \mathrm{AW}$.

Uvažujme nyní třídu $\mathcal{E}_a$.

$$\mathcal{E}_a = \{\mathrm{p}' vec(\mathrm{B}_1) : \mathrm{p} \in R^{mr}, \exists \mathrm{L} \in R^{nm}, \forall vec(\mathrm{B}_1) \in R^{mr},$$
$$\forall vec(\mathrm{B}_2) \in R^{ms}, \quad E\left[\mathrm{L}' vec(\mathrm{Y})\right] = \mathrm{p}' vec(\mathrm{B}_1)\}.$$

Cílem bude vyjádřit $\mathcal{E}_a$ explicitně.

Rovnost

$$\mathrm{L}' E vec(\mathrm{Y}) = \mathrm{L}'(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}) vec(\mathrm{B}_1) + \mathrm{L}'(\mathrm{I} \otimes \mathrm{Z}) vec(\mathrm{B}_2) = \mathrm{p}' vec(\mathrm{B}_1),$$
$$\forall vec(\mathrm{B}_1), \forall vec(\mathrm{B}_2),$$

je splněna právě tehdy, když

$$\mathrm{p} = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}')\mathrm{L} \quad \& \quad (\mathrm{I} \otimes \mathrm{Z}')\mathrm{L} = 0,$$

tj. právě tehdy, když

$$\mathrm{p} = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}')\mathrm{Q}_{I \otimes Z}\mathrm{u}, \quad \mathrm{u} \in R^{mn}.$$

Tedy

$$\mathcal{E}_a = \{\mathrm{p}' vec(\mathrm{B}_1) : \mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)\}. \tag{9}$$

Lema 2.
Nechť P je matice z Poznámky 1.

$$\mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z) \Leftrightarrow \exists \mathrm{A}_{m,n} \text{ taková, že } \mathrm{P} = \mathrm{A}\mathrm{Q}_Z\mathrm{W}.$$

Důkaz:

$$\mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z) \Leftrightarrow \exists \mathrm{a} \in R^{mn},\ \mathrm{p} = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)\mathrm{a}.$$

Označme $\mathrm{a} = vec(\mathrm{A}')$, potom $vec(\mathrm{P}') = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z) vec(\mathrm{A}')$.
Tedy podle (3) $\mathrm{P}' = \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z\mathrm{A}'$. □

Porovnáme-li (8) a (9) je zřejmé, že $\mathcal{E}_a \subset \mathcal{E}$. Navíc platí

Lema 3.

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}(\mathrm{W}) \cap \mathcal{R}(\mathrm{Z}) = \{0\}.$$

Důkaz: protože $\mathcal{E}_a \subset \mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E} \Leftrightarrow 0 = r(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}') - r(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z) \Leftrightarrow 0 = r(\mathrm{W}') - r(\mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)$$
$$\Leftrightarrow 0 = dim[\mathcal{R}(\mathrm{W}) \cap \mathcal{R}^{\perp}(\mathrm{Q}_Z)] = dim[\mathcal{R}(\mathrm{W}) \cap \mathcal{R}(\mathrm{Z})],$$

protože platí $r(\mathrm{A}) - r(\mathrm{AB}) = dim[\mathcal{R}(\mathrm{A}') \cap \mathcal{R}^{\perp}(\mathrm{B})]$, (viz [4],(2.4)) a protože $r(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = r(\mathrm{A})r(\mathrm{B})$. □

V dalším textu budeme předpokládat, že

$$\mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{W}) \not\subset \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{Z})$$

takže $\mathcal{E}_a \neq \{0\}$.

Označení. Symbol $\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a$ resp. $\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}$ bude označovat $(\mathrm{I}\otimes\Sigma^-)$-LS odhad parametru $vec(\mathrm{B}_1)$ určený v lineárním modelu $\mathcal{M}_a(\mathrm{I}\otimes\Sigma)$ resp. v modelu $\mathcal{M}(\mathrm{I}\otimes\Sigma)$, (viz [1], s.161).

Podle předpokladu (6) je $\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a$ resp. $\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}$ BLUE funkce $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1)\in\mathcal{E}_a$ resp. funkce $p'vec(\mathrm{B}_1)\in\mathcal{E}$ (viz [1], věta 5.3.2, s.162).

Lema 4.

(10) $p'\widehat{vec(B_1)} = p'[I\otimes(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^-]vec(Y),$ *je-li* $p'vec(B_1)\in\mathcal{E}$,

(11) $$p'\widehat{vec(B_1)})_a = p'\left[I\otimes(W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-}\right] vec(Y),$$

je-li $p'vec(B_1)\in\mathcal{E}_a$. *Rozptyly těchto odhadů jsou*

(12) $$Var(p'\widehat{vec(B_1)}) = p'\left[I\otimes(W'\Sigma^- W)^-\right]p, \quad \textit{je-li } p'vec(B_1)\in\mathcal{E},$$

(13) $$Var(p'\widehat{vec(B_1)}_a) = p'\left[I\otimes(W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-\right]p, \quad \textit{je-li } p'vec(B_1)\in\mathcal{E}_a.$$

Tyto výrazy nazávisí na volbě pseudoinverzních matic.

Důkaz: Za platnosti modelu $\mathcal{M}_a$ máme

$$\begin{pmatrix} \widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a \\ \widehat{vec(\mathrm{B}_2)}_a \end{pmatrix}$$

$$= \left[(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W},\mathrm{I}\otimes\mathrm{Z})'(\mathrm{I}\otimes\Sigma)^-(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W},\mathrm{I}\otimes\mathrm{Z})\right]^- (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W},\mathrm{I}\otimes\mathrm{Z})'(\mathrm{I}\otimes\Sigma)^- vec(\mathrm{Y})$$

(14) $$= \begin{pmatrix} \mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{W}, & \mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Z} \\ \mathrm{I}\otimes\mathrm{Z}'\Sigma^-\mathrm{W}, & \mathrm{I}\otimes\mathrm{Z}'\Sigma^-\mathrm{Z} \end{pmatrix}^- \begin{pmatrix} \mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\Sigma^- \\ \mathrm{I}\otimes\mathrm{Z}'\Sigma^- \end{pmatrix} vec(\mathrm{Y}).$$

Odhady získané dosazením těchto výrazů do nevychýleně odhadnutelné funkce jsou určeny jednoznačně.

Užijeme-li následující Rohdeho vzorec pro určení pseudoinverzní matice k matici rozdělené na bloky (viz [2], Lemma 13, s.68):
nechť $\begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}', & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ je pozitivně semidefinitní a nechť A a C jsou čtvercové matice, potom

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}', & \mathrm{C} \end{pmatrix}^-$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{A}^- + \mathrm{A}^-\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-, & -\mathrm{A}^-\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^- \\ -(\mathrm{C}-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-, & (\mathrm{C}-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^- \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (\mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{C}^-\mathrm{B}')^-, & -(\mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{C}^-\mathrm{B}')^-\mathrm{B}\mathrm{C}^- \\ -\mathrm{C}^-\mathrm{B}'(\mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{C}^-\mathrm{B}')^-, & \mathrm{C}^- + \mathrm{C}^-\mathrm{B}'(\mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{C}^-\mathrm{B}')^-\mathrm{B}\mathrm{C}^- \end{pmatrix},$$

dostaneme první řádek $\mathrm{A}_{11},\mathrm{A}_{12}$ g-inversní matice ve vztahu (14):

$$A_{11} = \left[(I \otimes W'\Sigma^- W) - (I \otimes W'\Sigma^- Z)(I \otimes Z'\Sigma^- Z)^-(I \otimes Z'\Sigma^- W)\right]^-$$

$$= \left[(I \otimes W'\Sigma^- W) - (I \otimes W'\Sigma^- Z(Z'\Sigma^- Z)^- Z'\Sigma^- W)\right]^-$$

$$= [I \otimes W'\Sigma^-(I - P_Z^{\Sigma^-})W]^- = (I \otimes W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-.$$

(Z předpokladu (7) plyne, že všechny výrazy jsou nezávislé na volbě Σ^-. Zvolíme-li Σ^- p.d., platí $P_Z^{\Sigma^-} = Z(Z'\Sigma^- Z)^- Z'\Sigma^-$, $Q_Z^{\Sigma^-} = I - P_Z^{\Sigma^-}$).

$$A_{12} = -\left[(I \otimes W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-(I \otimes W'\Sigma^- Z)(I \otimes Z'\Sigma^- Z)^-\right]$$

$$= -\left[I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^- Z(Z'\Sigma^- Z)^-\right].$$

Tedy

$$\widehat{vec(B_1)}_a$$

$$= \left\{[I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^-] - [I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^- P_Z^{\Sigma^-}]\right\} vec(Y)$$

$$= \left[I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-}\right] vec(Y).$$

Tím jsme dokázali (11).
Nechť $p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a$. Potom

$$Var(p'\widehat{vec(B_1)}_a) = p'[I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-}]$$
$$\cdot(I \otimes \Sigma)[I \otimes (Q_Z^{\Sigma^-})'\Sigma^- W(W'(Q_Z^{\Sigma^-})'\Sigma^- W)^-]p$$

$$= p'\left\{I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-(W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)(W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-\right\} p$$

$$= p'[I \otimes (W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^-]p.$$

Při úpravách bylo užito tvrzení

$$p \in \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A) \;\Rightarrow\; p'A^- AA^- p = p'A^- p.$$

Z předpokladu (7) plyne, že $\mathcal{R}(W') = \mathcal{R}(W'\Sigma^- W)$. Je-li $p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a$ znamená to, že $p \in \mathcal{R}(I \otimes W'Q_Z) = \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)$.

Dále jsme užili tvrzení (viz [2], Lemma 7, s.65)

$$\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A) \quad \Leftrightarrow \quad AA^- B = B,$$

a tvrzení (viz [2], Lemma 8, s.65)

$$AB^- C \text{ nezávisí na volbě g-inverse } B^-$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(A') \subset \mathcal{R}(B') \quad \& \quad \mathcal{R}(C) \subset \mathcal{R}(B). \tag{15}$$

Poznámka 2.
Nechť P je matice z Poznámky 1. Tvrzení Lematu 4 je možno ekvivalentně zapsat takto

$$\widehat{Tr(\mathrm{PB}_1)} = Tr\left[\mathrm{P}(\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{W})^-\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Y}\right], \text{ je-li } Tr(\mathrm{PB}_1) \in \mathcal{E},$$

$$\widehat{Tr(\mathrm{PB}_1)}_a = Tr\left[\mathrm{P}(\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Q}_Z^{\Sigma^-}\mathrm{W})^-\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Q}_Z^{\Sigma^-}\mathrm{Y}\right], \text{ je-li } Tr(\mathrm{PB}_1) \in \mathcal{E}_a,$$

$$var(\widehat{Tr(\mathrm{PB}_1)}) = Tr\left[\mathrm{P}(\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{W})^-\mathrm{P}'\right], \text{ je-li } Tr(\mathrm{PB}_1) \in \mathcal{E},$$

$$var(\widehat{Tr(\mathrm{PB}_1)}_a) = Tr\left[\mathrm{P}(\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Q}_Z^{\Sigma^-}\mathrm{W})^-\mathrm{P}'\right], \text{ je-li } Tr(\mathrm{PB}_1) \in \mathcal{E}_a.$$

3. Eficientně odhadnutelné funkce

Označme (ve shodě s prací [4]) symbolem $\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma)$ takovou podmnožinu třídy $\mathcal{E}_a$ která obsahuje všechny takové funkce $vec(\mathrm{B}_1)$ užitečných parametrů, jejichž BLUE určované za platnosti modelu (4) mají stejný rozptyl jako BLUE určované za platnosti modelu (5), tj.

$$\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma) = \{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a : Var[\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a] = Var[\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}]\}.$$

Věta 1. *Jestliže $p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a$, tj. jestliže existuje matice U_0 taková, že $P = U_0 Q_Z W$, potom*

$$\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{U}_0\mathrm{Q}_Z\mathrm{P}_W^{\Sigma^-}\mathrm{Z} = \mathrm{O}.$$

Důkaz: nechť $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a$, to znamená nechť $\mathrm{p} = (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)\mathrm{u}_0$ pro nějaký vektor $\mathrm{u}_0 \in R^{mn}$. Porovnání (12) a (13) ukazuje, že

$$Var(\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a) = Var(\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}), \text{ kde } \mathrm{p} = (\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)\mathrm{u}_0 \quad \Leftrightarrow$$

(16)

$$\mathrm{u}_0'(\mathrm{I}\otimes\mathrm{Q}_Z\mathrm{W})\left\{\mathrm{I}\otimes\left[(\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Q}_Z^{\Sigma^-}\mathrm{W})^- - (\mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{W})^-\right]\right\}(\mathrm{I}\otimes\mathrm{W}'\mathrm{Q}_Z)\mathrm{u}_0 = 0.$$

Užijeme-li následující implikaci

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A},\mathrm{B} \\ \mathrm{B}',\mathrm{C} \end{pmatrix} \text{p.s.d.,} \quad \text{A a C čtvercové matice}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{A}-\mathrm{BC}^-\mathrm{B}')^- = \mathrm{A}^- + \mathrm{A}^-\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-,$$

(viz Rohdeho vzorec) na matici

$$\begin{pmatrix} \mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{W}, & \mathrm{W}'\Sigma^-\mathrm{Z} \\ \mathrm{Z}'\Sigma^-\mathrm{W}, & \mathrm{Z}'\Sigma^-\mathrm{Z} \end{pmatrix},$$

dostaneme

$$(W'\Sigma^- Q_Z^{\Sigma^-} W)^- = (W'\Sigma^- W)^-$$
$$+(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z[Z'\Sigma^- Q_W^{\Sigma^-} Z]^- Z'\Sigma^- W(W'\Sigma^- W)^-.$$

Tedy (16) je ekvivalentní s

$$u_0' \Big[I \otimes Q_Z W(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z(Z'\Sigma^- Q_W^{\Sigma^-} Z)^-$$
$$\times Z'\Sigma^- W(W'\Sigma^- W)^- W' Q_Z \Big] u_0 = 0.$$

Podle předpokladu (7) a následujícího tvrzení (viz [2], Lemma 16, str.69)

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(S),\ S \text{ p.s.d.} \ \Rightarrow\ (Q_A S Q_A)^+ = S^+ - S^+ A(A'S^+A)^- A'S^+,$$

je $Z'\Sigma^- Q_W^{\Sigma^-} Z = Z'(Q_W \Sigma Q_W)^+ Z$.

Je vidět, že $Z'\Sigma^- Q_W^{\Sigma^-} Z$ je matice pozitivně semidefinitní a proto lze matici k ní g-inverzní zvolit pozitivně definitní. Tedy $(Z'\Sigma^- Q_W^{\Sigma^-} Z)^- = JJ'$, kde J je regulární. Proto poslední rovnost platí právě tehdy, jestliže

$$u_0'(I \otimes Q_Z W(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z) = 0.$$

Označíme-li $u_0 = vec(U_0')$, je tento požadavek ekvivalentní s tím, že

$$U_0 Q_Z P_W^{\Sigma^-} Z = O.$$

□

Věta 2. *Pro třídu* $\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma)$ *platí*

$$\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) = \{p' vec(B_1) : p \in \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^- W Q_{W'\Sigma^- Z}),$$

nebo ekvivalentně

$$p' vec(B_1) \in \mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) \Leftrightarrow$$
$$P = A Q_{W'\Sigma^- Z} W'\Sigma^- W \quad \textit{pro nějakou matici } A.$$

Důkaz: Podle Věty 1

$$p' vec(B_1) \in \mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) \Leftrightarrow$$

$P = U_0 Q_Z W$ pro nějakou matici U_0 & $U_0 Q_Z W(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z = O$.

Tedy

$$P(W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z = O,$$

to znamená

$$(vec(P'))'(I_{m,m} \otimes (W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z) = 0$$
$$\Leftrightarrow p = vec(P') \perp \mathcal{R}\,[I \otimes (W'\Sigma^- W)^- W'\Sigma^- Z].$$

To je ekvivalentní s tím, že

$$\text{(17)} \qquad p \perp \mathcal{R}\left((I \otimes W'\Sigma^- W)^+ (I \otimes W'\Sigma^- Z) \right),$$

(oprávněnost volby $(I \otimes W'\Sigma^- W)^+$ plyne z předpokladu (7) a ze vztahu (15)).

V další úvaze užijeme tvrzení:
Nechť je výraz $g'C^{-}A$ nezávislý na volbě g-inversní matice k matici C, tj. nechť $g \in \mathcal{R}(C')$ a současně nechť $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(C)$; potom

$$g \perp \mathcal{R}(C^{+}A) \;\Leftrightarrow\; g \in \mathcal{R}(CQ_A) \vee \mathcal{N}\,(C),$$

(viz [3], důkaz Věty 2.4).

V našem případě jsou předpoklady požadované v pomocném tvrzení, tj. $p \in \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}W)$, $\mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}Z) \subset \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}W)$, splněny. Z předpokladu (7) totiž plyne, že $\mathcal{R}(W') = \mathcal{R}(W'\Sigma^{-}W)$.

Tedy (17) je ekvivalentní s tím, že

(18) $$p \in \mathcal{R}\left[(I \otimes W'\Sigma^{-}W)Q_{I\otimes W'\Sigma^{-}Z}\right] \vee \mathcal{N}\,(I \otimes W'\Sigma^{-}W).$$

Protože platí

$$\mathcal{R}[(I \otimes W'\Sigma^{-}W)Q_{I\otimes W'\Sigma^{-}Z}] = \mathcal{R}[I \otimes W'\Sigma^{-}WQ_{W'\Sigma^{-}Z}] \subset \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}W),$$

a protože $p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a$, je (18) ekvivalentní s požadavkem

(19) $$p \in \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}WQ_{W'\Sigma^{-}Z}).$$

Užitím matice P z Poznámky 1

$$\begin{aligned} & p \in \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}WQ_{W'\Sigma^{-}Z}) \\ \Leftrightarrow\; & \exists A_{m,n} \text{ taková, že } P = AQ_{W'\Sigma^{-}Z}W'\Sigma^{-}W. \end{aligned}$$

□

Věta 3.

$$dim\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) = r(I \otimes W) - r(I \otimes W'\Sigma^{-}Z) = m[r(W) - r(W'\Sigma^{-}Z)].$$

Důkaz: podle (19) je $dim\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) = r(I \otimes W'\Sigma^{-}WQ_{W'\Sigma^{-}Z})$. Užijeme-li vztah $r(A) - r(AB) = dim[\mathcal{R}(A') \cap \mathcal{R}^{\perp}(B)]$, (viz [4], (2.4)), je

$$\begin{aligned} dim\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) &= r(I \otimes W'\Sigma^{-}W) - dim[\mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}W) \cap \mathcal{R}^{\perp}(Q_{W'\Sigma^{-}Z})] \\ &= r(I \otimes W'\Sigma^{-}W) - dim[\mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}W) \cap \mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}Z)]. \end{aligned}$$

Víme, že z předpokladu (7) máme $\mathcal{R}(W') = \mathcal{R}(W'\Sigma^{-}W)$ a tedy

$$dim\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) = r(I \otimes W') - dim[\mathcal{R}(I \otimes W'\Sigma^{-}Z)] = r(I)[r(W') - r(W'\Sigma^{-}Z)].$$

Při úpravách jsme užili tvrzení

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B) \;\&\; \mathcal{R}(C) \subset \mathcal{R}(D) \;\Rightarrow\; \mathcal{R}(A \otimes C) \subset \mathcal{R}(B \otimes D).$$

□

Literatura

[1] *Kubáček L.*, Foundations of Estimation Theory. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1988.

[2] *Kubáčková L. a Kubáček L.*, Elimination Transformation of an Observation Vector preserving Information on the First and Second Order Parameters. Technical Report, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, **11**, (1990), 1 – 71.

[3] *Kubáček L.*, Statistical models of an a priori and an a posteriori uncertainty in measured data. In: Proceedings of the MME'95 Symposion, Selected Papers of the International Symposium, September 18 – 20, 1995, Ostrava, Czech Republic, (Eds. J. Hančlová, J. Dupačová, J. Močkoř, J. Ramík), VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Economics, Ostrava 1995, 79 – 87.

[4] *Nordstrőm K. a Fellman J.*, Characterizations and Dispersion – Matrix Robustness of Efficiently Estimable Parametric Functionals in Linear Models with Nuisance Parameters. Linear Algebra and its Applications **127** (1990), 341 – 361.