ROBUST'98, 51 – 54 © JČMF 1998

DIMENZE PROSTORU POLYNOMŮ PŘI EXPONENCIÁLNÍ REGRESI

Josef BUKAČ

LF UK, Hradec Králové

Abstract. Polynomials associated with exponencial regression may be thought of as a vector space. If there are t distinct values of independent variable and t corresponding values of the dependent variable, the dimension of the vector space of associated polynomials is equal $t-1$.

Резюме: Полиноми при експоненциаьной регрессии ето линейное пространство. Когда имеем t отличных наблюдений независимой переменной и t наблюдений зависимой переменной, тогда димензия линейного пространства полиномов ровна $t-1$.

1. Stanovení problému

Jsou dána celá čísla X_i a reálná čísla Y_i pro $i = 1, \dots, t$. X_i a Y_i nejsou náhodné veličiny, bude se jednat jen o numerickou úlohu. Před použitím modelu $a + b\exp(cx)$ dáváme přednost modelu $a + bR^x$ a hledáme a, b a R, kde $R > 0$, která minimalizují $\sum(a + bR^{X_i} - Y_i)^2$. Jestliže takové minimum existuje, pak parciální derivace vzhledem k a, b, R jsou rovny nule v bodě, ve kterém se minimum nalézá. V případě, že $b = 0$, není co řešit[1], je-li $b \neq 0$, dostáváme rovnice

$$at + b\sum R^{X_i} - \sum Y_i = 0$$

$$a\sum R^{X_i} + b\sum R^{2X_i} - \sum Y_i R^{X_i} = 0$$

$$a\sum X_i R^{X_i} + b\sum X_i R^{2X_i} - \sum Y_i X_i R^{X_i} = 0.$$

Jestliže existuje řešení této soustavy rovnic pro nějaké R, pak a, b, -1 jsou koeficienty lineární kombinace dávající nulový vektor ze sloupců matice

$$\begin{bmatrix} t & \sum R^{X_i} & \sum Y_i \\ \sum R^{X_i} & \sum R^{2X_i} & \sum Y_i R^{X_i} \\ \sum X_i R^{X_i} & \sum X_i R^{2X_i} & \sum Y_i X_i R^{X_i} \end{bmatrix}.$$

To se může stát tehdy a jen tehdy, když sloupcové vektory matice jsou lineárně závislé, pro což je nutná a postačující podmínka to, že determinant matice je nulový pro dané R.

[1]Pozn. Editor se po diskusi s recenzentem spíše kloní k názoru, že i zde co řešit je. Podrobná analýza nicméně ukazuje, že pro $b = 0$ ztrátova funkce (tj. součet čtverců reziduí) nenabývá minima s výjímkou degenerovaných dat $\overline{Y}_1 = \dots \overline{Y}_n = const$, kde $\overline{Y}_i$ je aritmetický průměr Y_j přes množinu indexů $\{j; X_j = X_i\}$.

Definice. Nechť složky vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_t)'$, $t \geq 3$, jsou nezáporné a celočíselné. Pro libovolné $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_t)'$ je možné zapsat determinant $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ matice

$$\begin{bmatrix} t & \sum R^{X_i} & \sum Y_i \\ \sum R^{X_i} & \sum R^{2X_i} & \sum Y_i R^{X_i} \\ \sum X_i R^{X_i} & \sum X_i R^{2X_i} & \sum Y_i X_i R^{X_i} \end{bmatrix}$$

jako polynomiální funkci proměnné R. Funkci $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ budeme nazývat polynom přiřazený $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$.

Kladné kořeny takového polynomu dávají body, ve kterých může být součet čtverců odchylek minimální.

Vše potřebné pro tento příspěvek je uvedeno zde. Tuto metodu také popisuje Gregg (1964) nebo Kozák (1970).

2. Polynomy tvoří vektorový prostor

Když pro výpočet determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo, vidíme, že je možné jej přepsat jako $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{t} Y_i P_i(R)$, kde polynomy $P_i(R)$ závisí jen na $X_1, X_2, \ldots, X_t$ a nezávisí na $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$.

Tohoto faktu užívá Gregg (1964). Je možné předem sestrojit tabulky hodnot těchto polynomů pro pevné t a pevná $X_i = i$ a pomocí nich pak vyhledat $P_i(R)$ a vypočítat $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum Y_i P_i(R)$, aniž by se počítaly koeficienty $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Toto je zastaralý přístup, počítače jsou snadno dostupné.

Všimněme si toho, že každý polynom $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum Y_i P_i(R)$ je lineární kombinací polynomů $P_1(R), P_2(R), \ldots, P_t(R)$. Z lineární algebry víme, že množina takových polynomů tvoří vektorový prostor, a ihned vidíme, že dimenze tohoto vektorového prostoru nepřesahuje t.

3. t polynomů netvoří lineárně nezávislé vektory

Nechť je $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_t)'$ pevné a $X_1 < X_2 < \cdots < X_t$. Zvolíme-li $Y_i = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, t$, pak $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum Y_i P_i(R) = \sum P_i(R)$ je rovno determinantu matice

$$\begin{bmatrix} t & \sum R^{X_i} & t \\ \sum R^{X_i} & \sum R^{2X_i} & \sum R^{X_i} \\ \sum X_i R^{X_i} & \sum X_i R^{2X_i} & \sum X_i R^{X_i} \end{bmatrix}.$$

Protože první a poslední sloupec matice jsou si rovny, je determinant roven nule pro každé R. Získali jsme tím lineární kombinaci s nenulovými koeficienty, která je rovna nulovému vektoru.

Z lineární algebry nyní víme, že dimenze vektorového prostoru polynomů $\sum Y_i P_i(R)$ je rovna nejvýše $t - 1$.

4. Dimenze je $t-1$

Věta. Jsou dána celá nezáporná čísla $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_t)'$, $X_1 < X_2 < \cdots < X_t$, kde $t \geq 3$. Množina všech polynomů $\mathcal{D}(R, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ přiřazených pevnému $\mathbf{X}$ a libovolným $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)$ tvoří vektorový prostor dimenze $t-1$.

Důkaz. Ukázali jsme již, že dimenze je nejvýše $t-1$. Zvolme $t-1$ vhodných polynomů a ukažme, že jsou lineárně nezávislé jako vektory. K tomu použijeme polynomy $P_2(R), \ldots, P_t(R)$. Polynom $P_j(R), j = 2, \ldots, t$ získáme také tak, že položíme $Y_j = 1$ a $Y_i = 0$ pro $i \neq j$, takže $P_j(R)$ je rovno determinantu matice

$$\begin{bmatrix} t & \sum R^{X_i} & 1 \\ \sum R^{X_i} & \sum R^{2X_i} & R^{X_j} \\ \sum X_i R^{X_i} & \sum X_i R^{2X_i} & X_j R^{X_j} \end{bmatrix},$$

což je

$$tX_j R^{X_j} \sum R^{2X_i} + \sum R^{X_i} \sum X_i R^{2X_i} + R^{X_j} \sum R^{X_i} \sum X_i R^{X_i}$$
$$- \sum R^{2X_i} \sum X_i R^{X_i} - tR^{X_j} \sum X_i R^{2X_i} - X_j R^{X_j} \sum R^{X_i} \sum R^{X_i}.$$

Nyní se zajímáme o to, pro který nejmenší exponent je koeficient nenulový. Proto z každé sumy vybereme sčítanec s nejmenším exponentem. Dostaneme pak výraz $tX_j R^{X_j} R^{2X_1} + X_1 R^{3X_1} + X_1 R^{X_j} R^{2X_1} - X_1 R^{3X_1} - tX_1 R^{X_j} R^{2X_1} - X_j R^{X_j} R^{2X_1}$, který zjednodušíme na $(X_j - X_1)(t-1)R^{X_j + 2X_1}$.

Předpokládejme, že $P_2(R), \ldots, P_t(R)$ jsou lineárně závislé. Pak existují $a_2, \ldots, a_t$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a $\sum_{i=2}^t a_i P_i(R) = 0$.

Zvolíme nejmenší index k, pro který $a_k \neq 0$. To je zároveň index, pro který $P_k(R)$ obsahuje člen s nenulovým koeficientem s nejnižším exponentem vzhledem ke všem členům všech polynomů $P_j(R), j \geq k$. Tento člen je $a_k(X_k - X_1)(t-1)R^{X_k + 2X_1}$. Všimněme si, že ostatní členy mají vyšší exponent. To znamená, že $R^{X_k + 2X_1}$ je možné napsat jako lineární kombinaci členů s vyšším exponentem, což je spor.

Takovou větu lze formulovat a dokáže se stejným způsobem, i když se vyskytnou opakovaná pozorování.

5. Závěr

Jediná věta tohoto druhu neumožní říci něco konkrétního o kořenech polynomů. Je třeba usilovat o další nápady, aby se znalost o kořenech polynomů přiřazených X a Y prohloubila. Výpočet kořenů polynomů vysokých stupňů je obtížný a každé zlepšení je vítáno.

Literatura

[1] Gregg J. V., Hossell C. H. a Richardson J. T. (1964), *Mathematical Trend Curves: an Aid to Forcasting*. Oliver and Boyd, Edinburg.

[2] Kozák J. (1970), *Statistické zkoumání vývoje ekonomických pozorování, díl 1*. SPN, Praha.