METODY ODHADU PARAMETRŮ V NEZÁPORNÝCH ČASOVÝCH ŘADÁCH A JEJICH POUŽITÍ PŘI ANALÝZE REÁLNÝCH DAT

Jitka ZICHOVÁ

MFF UK, KPMS

Abstract: The aim of this contribution is a comparison of two methods of estimating parameters in nonnegative time series by analyzing some real data. Nonnegative or even positive time series appear very often in solving some problems in medicine, environmetrics, economics and other areas.

A traditional approach in practical time series analysis is using a packet of statistical programs. The statistical software SOLO was chosen for identification and estimation of the model and for forecasting.

A new approach is represented by a method proposed especially for nonnegative time series. It could be called method of dividing because the estimates of parameters are constructed in the form of minima of certain fractions. The first estimate of this type was derived by Bell and Smith in 1986. Some generalizations were proposed by Anděl (1989, 1994) and Zichová (1996). The estimates obtained by the method of dividing are strongly consistent. They can be easily calculated even if no statistical software is available. The results of both approaches are presented in a graphical form.

Резюме: Эта статья представляет собой сравнение двух возможностей оценивания параметров в неотрицательных временных рядах при посредстве анализа конкретных данных. Неотрицательные и положительные временные ряды имеют приложение в многих проблемах экологии, медицины, экономии и других областей.

На практике мы очень часто пользуемся какой - то статистическойпрограммой для конструкции математической модели и оценивания параметров этой модели. Мы пользовались статистической программой SOLO, которая вычислила оценки в наших моделях.

Для вычисления других оценок параметров в определённой модели временного ряда мы использовали новый метод оценивания параметров в неотрицательных рядах, который называеця метод частных. Белл и Смис предложили этот метод в 1986 году. Обобщения предложили Андел (1989, 1994) и Зихова (1996).

Модели с оценками параметров из программы SOLO и модели с оценками методом частных сопоставлены в конце статьи в многих графиках.

1. ÚVOD

Cílem příspěvku je porovnat na konkrétních datech dva přístupy k odhadování parametrů v nezáporných časových řadách. Časové řady s nezápornými či dokonce pouze kladnými hodnotami se v praxi vyskytují velmi často, například při řešení problémů z oblasti ekologie, medicíny či ekonomie.

Tradiční přístup ke zpracování dat ve formě časové řady představuje použití balíku statistických programů. V našem případě byl pro identifikaci modelu, odhad parametrů a konstrukci předpovědí v časové řadě zvolen statistický software SOLO.

Nový přístup představuje metoda navržená speciálně pro nezáporné časové řady. Lze ji nazvat metodou podílů, neboť odhady parametrů modelu jsou konstruovány pomocí minim podílů jistých hodnot časové řady. První podílový odhad odvodili Bell a Smith v roce 1986 (viz [3]), zobecnění navrhli Anděl a Zichová v pracích [1], [2] a [6]. Podílové odhady jsou silně konzistentní. Jejich výhodou je jednoduchý výpočet, který lze snadno provést, i když nemáme k dispozici statistický software.

2. BOXOVA-JENKINSOVA METODOLOGIE

V poslední době se velmi často používá analýza časových řad založená na vyšetřování jejich korelační struktury. Časové řady jsou modelovány pomocí tzv. ARMA procesů.

ARMA proces řádu p, q je definován rovnicí

$$\begin{aligned} X_t &= b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \cdots + b_p X_{t-p} \\ &\quad + e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \cdots + a_q e_{t-q}, \quad t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \end{aligned}$$

kde X_t jsou hodnoty ARMA procesu, e_t je bílý šum, to jest posloupnost nekorelovaných náhodných veličin, a $a_1, \ldots, a_q$, $b_1, \ldots, b_p$ jsou parametry ARMA procesu. Většinou se předpokládá, že veličiny e_t jsou normálně rozdělené s nulovou střední hodnotou. Speciálními případy jsou při $q = 0$ autoregresní procesy AR(p) a při $p = 0$ procesy klouzavých součtů MA(q).

Modelováním časových řad pomocí ARMA procesů se zabývá Boxova-Jenkinsova metodologie. Ta spočívá ve třech fázích výstavby modelu. První fází je identifikace, která je založena na zkoumání průběhu odhadnuté autokorelační a parciální autokorelační funkce v analyzované řadě. Výsledkem je rozhodnutí, zda pro modelování dat použijeme AR, MA nebo smíšený ARMA proces, a určení řádu procesu. Druhou fází je odhad parametrů, zpravidla pomocí nelineárních metod. Třetí fází je ověřování modelu neboli kontrola, zda rezidua v navrženém modelu tvoří bílý šum. Podrobný popis metod používaných v jednotlivých fázích nalezneme například v knize [4]. Jelikož se jedná o metody technicky náročné, používá se pro praktické modelování statistický software. Analýza časových řad je součástí všech běžných balíků statistických programů.

3. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD V PROGRAMU SOLO

Jak jsme již zmínili v úvodu, byl v našem případě pro zpracování dat použit statistický software SOLO. V něm najdeme klasické metody analýzy časových řad (prokládání lineárního trendu, exponenciální vyrovnávání, sezónní dekompozice), analýzu ve spektrální doméně a samozřejmě i Boxovu-Jenkinsovu metodologii. Pro navrhování a odhadování ARMA modelů nabízí SOLO dvě procedury. První z nich nazvaná "ARIMA Box-Jenkins" provádí odhad parametrů v ARMA modelu zadaného řádu. To znamená, že musíme nejdříve sami model identifikovat. Správná identifikace zejména smíšených modelů však často bývá obtížná a vyžaduje velkou zkušenost experimentátora. Proto nám SOLO nabízí druhou proceduru nazvanou "ARMA Search". Ta sama navrhe optimální model a v něm odhadne parametry. Popis obou procedur lze nalézt například ve skriptech [5].

Než aplikujeme některou z uvedených procedur v SOLU, musíme často data vhodným způsobem transformovat, abychom zajistili nulovou střední hodnotu a stacionaritu procesu, na nichž je Boxova-Jenkinsova metodologie založena. SOLO nabízí provedení následujících transformací v řadě $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$Y_t = X_t - \bar{X}_n, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

...odečtení průměru od dat,

$$Z_t = X_t - A - Bt, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

...odečtení lineárního trendu,

$$\delta_{(1),t} = X_t - X_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

...přechod k procesu prvních diferencí.

Přechodem k procesu prvních diferencí lze odstranit nestacionaritu procesu X_t ve střední hodnotě. Modelujeme-li proces $\delta_{(1),t}$ ARMA modelem, hovoříme o tzv. ARIMA$(p, 1, q)$ procesu. Existují i ARIMA procesy řádů vyšších než 1 (viz např. [4]).

4. METODA PODÍLŮ

Nyní obrátíme pozornost k nezáporným časovým řadám a k odhadové metodě podílů. V roce 1986 použili Bell a Smith pro modelování úrovně znečištění vody autoregresní proces prvního řádu daný předpisem

$$X_t = bX_{t-1} + e_t, \tag{4.1}$$

kde $0 < b < 1$ a $e_t \geq 0$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F. V uvedeném modelu navrhli jednoduchý odhad parametru b ve tvaru

$$b^* = \min_{1 \leq t \leq n-1} \frac{X_{t+1}}{X_t}$$

počítaný z realizace $X_1, X_2, \ldots, X_n$ procesu (4.1). Dokázali, že odhad b^* je silně konzistentní právě tehdy, když $F(d) - F(c) < 1$ pro libovolná $0 < c < d < \infty$.

Anděl sestrojil podobné podílové odhady parametrů v procesu AR(2) v práci [1] a v procesech MA(1), MA(2) v práci [2]. Zichová provedla další zobecnění na smíšený ARMA(p,q) proces v práci [6]. Při analýze dat v našem případě byl použit pouze smíšený proces ARMA(1,1). Ten je definován vztahem

$$X_t = bX_{t-1} + e_t + ae_{t-1}.$$

Předpokládejme, že $0 < a, b < 1$ a $e_t > 0$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F. Za uvedených předpokladů lze dokázat, že

$$\hat{b} = \min_{1 \leq t \leq n-1} \frac{X_{t+1}}{X_t},$$
$$\hat{a} = \min_{2 \leq t \leq n-1} \frac{X_{t+1} + 2X_{t-1}}{X_t} - \hat{b}$$

jsou silně konzistentní odhady parametrů a, b.

5. ANALYZOVANÁ DATA

Pro účely porovnání odhadů metodou podílů a odhadů z programu SOLO byla provedena analýza čtyř souborů dat.

První soubor nazvaný MORAVA obsahuje 912 pozorování představujících měsíční průměrné průtoky v řece Moravě v metrech krychlových za sekundu v letech 1916-1991.

Druhý soubor, PRAHA, obsahuje 220 hodnot průměrné roční teploty v desetinách stupně Celsia naměřené v pražském Klementinu v letech 1771-1990.

Třetí soubor, HURBANOV, obsahuje 90 průměrných podzimních teplot ve stupních Celsia naměřených v Hurbanově v letech 1903-1992.

Konečně čtvrtý soubor, ENERGETIKA, obsahuje 241 denních hodnot burzovního indexu energetiky sledovaného v obchodních dnech od září 1994 do září 1995.

Nechť rozsah zpracovávaného souboru je n. Ve všech čtyřech případech byl identifikován model a odhadnuty parametry na základě $n-20$ pozorování. Odhadnutý model byl použit pro konstrukci vyrovnané řady délky $n - 20$.

Pro zbývajících 20 hodnot byly sestrojeny předpovědi. Jejich porovnání se skutečnými pozorováními poskytne představu o kvalitě obou metod z hlediska předpovědí. SOLO automaticky počítá hodnoty vyrovnané řady i zadaný počet předpovědí budoucích hodnot, pro konstrukci vyrovnané řady a předpovědí u podílové metody byly použity postupy uvedené v knize [4]. Za první vyrovnanou hodnotu byl u podílové metody vzat průměr $\bar{X}_{n-20}$. Pro každý odhadnutý model v řadě délky $n-20$ byla odhadnuta směrodatná odchylka chyb podle vztahu

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n-20-k} \sum_{t=1}^{n-20} (X_t - \hat{X}_t)^2}\,,$$

kde k je počet parametrů (řád modelu), X_t jsou data a $\hat{X}_t$ jsou hodnoty vyrovnané řady.

6. VÝSLEDKY ANALÝZY DAT

V této kapitole ukážeme výsledky analýzy čtyř zmíněných časových řad. Grafické výstupy jsou uvedeny v příloze.

I. Soubor MORAVA

Graf časové řady $X_1, \ldots, X_{912}$ je na obrázku 1. Vidíme z něj, že řadu můžeme považovat za stacionární s kladnou střední hodnotou.

ZPRACOVÁNÍ V SOLU

Byla provedena transformace $Y_t = X_t - \bar{X}_{892}$, to jest od prvních 892 pozorování byl odečten průměr $\bar{X}_{892} = 51.87$. V řadě Y_t byl procedurou "ARMA Search" identifikován model AR(1). Odhad parametru b je $\hat{b}_p = 0.40$. Směrodatná odchylka chyb je $RMS = 36.67$.

PODÍLOVÁ METODA

Podílová metoda v modelu AR(1) dala pro data X_t, $t = 1, 2, \ldots, 892$ odhad $\hat{b}_{pod} = 0.13$ parametru b, $RMS = 38.17$.

Zdůrazněme na tomto místě, že odhady $\hat{b}_p$, $\hat{b}_{pod}$ jsou konstruovány v odlišných autoregresních modelech prvního řádu. SOLO používá pro transformovaná data Y_t model s normálně rozděleným bílým šumem s nulovou střední hodnotou, zatímco podílová metoda předpokládá pro data X_t model s kladným bílým šumem s obecným rozdělením.

Podílová metoda byla aplikována rovněž v modelu ARMA(1,1). Zde jsme dostali v řadě X_t odhady parametrů $\hat{a}_{pod} = 0.36$, $\hat{b}_{pod} = 0.13$, $RMS = 37.07$.

Grafy řad odpovídajících jednotlivým modelům jsou na obrázcích 2, 3 a 4. V každém grafu je zobrazena řada délky 912. Posledních dvacet hodnot představuje předpovědi v modelech navržených a odhadnutých na základě 892 původních dat. Samotné předpovědi jsou spolu s daty $X_{893}, \ldots, X_{912}$ shrnuty v obrázku 5. Předpovědi v modelech AR(1) a ARMA(1,1) odhadnutých podílovou metodou jsou téměř identické, proto jsou v obrázku 5 s původními daty porovnány pouze předpovědi ze SOLA a předpovědi v modelu AR(1) odhadnutém podílovou metodou.

Kvalita předpovídání v obou modelech je podobná. V případě odhadu ze SOLA se předpověď ustálí na průměru $\bar{X}_{892} = 51.87$, v případě podílové metody na hodnotě 51.26.

II. Soubor PRAHA

Graf časové řady $X_1, \ldots, X_{220}$ je na obrázku 6. Data nejsou stacionární, v průběhu času dochází ke změnám v úrovni.

ZPRACOVÁNÍ V SOLU

1. Odečtení průměru od dat

Jako první transformace bylo provedeno odečtení průměru $\bar{X}_{200} = 94.53$ v řadě o 200 pozorováních. Procedura "ARMA Search" navrhla pro řadu $Y_t = X_t - \bar{X}_{200}$, $t = 1, 2, \ldots, 200$ model AR(1) s odhadnutým parametrem $\hat{b}_p = 0.19$, $RMS = 8.87$.

2. Přechod k prvním diferencím

Jako druhá možná transformace dat bylo provedeno diferencování, to jest přechod k řadě $\delta_{(1),t} = X_t - X_{t-1}$, $t = 2, \ldots, 200$. V řadě $\delta_{(1),t}$ byl na základě zkoumání průběhu autokorelačních funkcí identifikován model MA(1), což znamená model ARIMA(0,1,1) pro data X_t. Odhad parametru a získaný aplikací procedury "ARIMA Box-Jenkins" je $\hat{a}_d = -0.92$, směrodatná odchylka chyb je $RMS = 8.72$.

PODÍLOVÁ METODA

Odhad parametru b podílovou metodou v modelu AR(1) pro data X_t, $t = 1, 2, \ldots, 200$ je $\hat{b}_{pod} = 0.71$, $RMS = 10.02$.

Grafy řad délky 220 v jednotlivých modelech jsou na obrázcích 7, 8, a 9. Posledních dvacet hodnot v grafech jsou předpovědi v modelech konstruovaných na základě 200 původních dat. Porovnání předpovědí s původními daty $X_{201}, \ldots, X_{220}$ je možné provést v obrázku 10. Průběh předpovědí v modelu s odečtením průměru a v podílové metodě je velmi podobný, předpověď se ustálí na průměru $\bar{X}_{200} = 94.53$ respektive na hodnotě 94.31. Použití prvních diferencí dává poněkud větší předpovědi v hodnotě 96.80.

Doposud analyzované časové řady nevykazovaly trend, proto předpovědi byly zhruba konstantní. V dalších souborech dat se setkáme s lineárním trendem.

III. Soubor HURBANOV

Graf dat $X_1, \ldots, X_{70}$ je na obrázku 11. Řada vykazuje zřetelný lineární trend $Tr_t = A + Bt$, $t = 1, 2, \ldots, 90$. Parametry trendu byly odhadnuty jako $\hat{A} = 8.80$, $\hat{B} = 0.05$. Trendová přímka je proložena grafem dat.

ZPRACOVÁNÍ V SOLU

1. Odečtení průměru od dat

Průměr $\bar{X}_{70} = 10.42$ byl odečten od prvních 70 pozorování. Procedura "ARMA Search" navrhla pro řadu $Y_t = X_t - \bar{X}_{70}$, $t = 1, 2, \ldots, 70$ model ARMA(2,1). Odhady parametů jsou $\hat{a}_p = -0.08$, $\hat{b}_{1p} = 0.21$, $\hat{b}_{2p} = 0.42$, směrodatná odchylka chyb je $RMS = 1.40$.

2. Odečtení trendu

Další možnou transformací dat je odečtení trendu, to jest přechod k řadě $Z_t = X_t - 8.80 - 0.05t$, $t = 1, 2, \ldots, 70$. Procedura "ARMA Search" navrhla v tomto případě pro řadu Z_t model ARMA(2,1) s odhady parametrů $\hat{a}_t = -0.02$, $\hat{b}_{1t} = 0.02$, $\hat{b}_{2t} = 0.25$, $RMS = 1.32$.

3. Přechod k prvním diferencím

Jelikož řada vykazující trend je nestacionární, je možné použít i transformaci spočívající v konstrukci prvních diferencí. V řadě $\delta_{(1),t} = X_t - X_{t-1}$, $t = 2, \ldots, 70$ byl na základě analýzy autokorelačních funkcí identifikován model MA(1). Původní řadu X_t lze tedy modelovat procesem ARIMA(0,1,1). Procedura "ARIMA Box-Jenkins" odhadla parametr a hodnotou $\hat{a}_d = -0.79$ a směrodatnou odchylku chyb hodnotou $RMS = 1.40$.

PODÍLOVÁ METODA

Nakonec byl spočítán odhad parametru b podílovou metodou v modelu AR(1) v řadě $X_1, \ldots, X_{70}$, který vyšel $\hat{b}_{pod} = 0.60$. Hodnota směrodatné odchylky chyb je $RMS = 1.60$.

Obrázky 12, 13, 14, 15 ukazují grafy vyrovnaných řad a dvaceti předpovědí konstruovaných ve čtyřech uvedených modelech. Obrázek 16 nabízí možnost porovnat předpovědi s původními daty $X_{71}, \ldots, X_{90}$. Okamžitě v něm vidíme, že nejhůře předpovídá model s odečteným průměrem. Nejkvalitnější předpovědi dává model s odečteným trendem.

IV. Soubor ENERGETIKA

Zatímco dosud zpracované soubory obsahovaly klimatologická data, tvoří poslední soubor data z oblasti financí. Graf 241 hodnot indexu energetiky je na obrázku 17. Řada opět vykazuje zřetelný , v tomto případě sestupný lineární trend. Odhadnuté parametry trendu jsou $\hat{A} = 996.57$, $\hat{B} = -2.12$. Trendová přímka je proložena grafem dat.

ZPRACOVÁNÍ V SOLU

S použitím SOLA byly provedeny stejné typy transformací jako v řadě HURBANOV.

1. Odečtení průměru od dat

Průměr $\bar{X}_{221} = 760.92$ z řady $X_1, \ldots, X_{221}$ byl odečten od všech 221 pozorování. Pro řadu $Y_t = X_t - \bar{X}_{221}$, $t = 1, 2, \ldots, 221$ byl procedurou "ARMA Search" navržen model ARMA(2,1) s odhadnutými parametry $\hat{a}_p = 0.01$, $\hat{b}_{1p} = 1.44$, $\hat{b}_{2p} = -0.45$, $RMS = 10.17$.

2. Odečtení trendu

V řadě $Z_t = X_t - 996.57 + 2.12t$, $t = 1, 2, \ldots, 221$ byl při aplikaci "ARMA Search" navržen model ARMA(2,1) s odhady parametrů $\hat{a}_t = 0.02$, $\hat{b}_{1t} = 1.41$, $\hat{b}_{2t} = -0.45$, $RMS = 10.09$.

3. Přechod k prvním diferencím

V řadě $\delta_{(1),t} = X_t - X_{t-1}$, $t = 2, \ldots, 221$ jsme podle průběhu autokorelačních funkcí identifikovali model AR(1), což znamená model ARIMA(1,1, 0) pro data X_t. Procedurou "ARIMA Box-Jenkins" byl odhadnut parametr b hodnotou $\hat{b}_d = 0.45$. Směrodatná odchylka chyb je $RMS = 10.19$.

PODÍLOVÁ METODA

Odhad parametru b podílovou metodou v modelu AR(1) v řadě $X_1, \ldots$ $\ldots, X_{221}$ je roven $\hat{b}_{pod} = 0.96$, $RMS = 20.43$.

Průběh vyrovnaných řad o délce 221 se téměř neliší, jak lze vidět v obrázcích 18, 19, 20, 21. Rovněž kvalita předpovídání budoucích hodnot u transformací odečtení průměru, diferencování a u podílové metody v AR(1) je srovnatelná, což ukazuje posledních dvacet hodnot v grafech 18, 20, 21 a podrobněji obrázek 22. Naproti tomu model s odečteným trendem dává výrazně horší předpovědi. To bezprostředně souvisí s přechodem od sestupného trendu k vzestupnému v řadě dat X_t.

7. ZÁVĚR

Provedená analýza dat si kladla za cíl studovat chování metody podílů na konkrétních datech a porovnat výsledky dosažené metodou podílů s výsledky dosaženými pomocí tradičních metod nabízených statistickým programem SOLO.

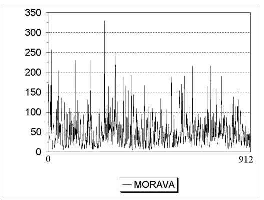
Kvalitu modelu časové řady lze posuzovat ze dvou hledisek. Prvním z nich je kvalita vyrovnání řady neboli větší či menší shoda modelu se skutečnými daty. Vyrovnané řady při použití jednotlivých metod můžeme porovnat v grafech nebo pomocí odhadnuté směrodatné odchylky chyb RMS. Hodnoty statistiky RMS v modelech PRAHA, HURBANOV a ENERGETIKA odhadnutých podílovou metodou zdánlivě nejsou ve shodě s grafy vyrovnaných řad. Řady vyrovnané podílovou metodou na první pohled dobře "kopírují data", ale při zobrazení grafů ve větším měřítku bychom zjistili, že vyrovnané řady mají oproti původním datům mírně posunuté vrcholy. Posun vrcholů způsobí, že některé hodnoty reziduí $X_t - \hat{X}_t$ jsou značně vysoké a následně je vysoká hodnota RMS. Příčinou je rozdíl mezi první vyrovnanou hodnotou, která je rovna průměru $\bar{X}_{n-20}$, a první hodnotou dat.

Druhým hlediskem je kvalita předpovídání budoucích hodnot. Modely u všech souborů dat byly navrženy a odhadnuty na základě $n-20$ pozorování a bylo sestrojeno 20 předpovědí. Tyto předpovědi je možné porovnat s daty $X_{n-19}, \ldots, X_n$ v detailních grafech (obrázky 5, 10, 16 a 22). Z grafů je patrné, že kvalita předpovědí v modelu AR(1) odhadnutém podílovou metodou je srovnatelná s kvalitou předpovědí v modelech navržených s pomocí SOLA při odečtení průměru od dat, což je nejjednodušší a nejčastěji prováděná transformace.

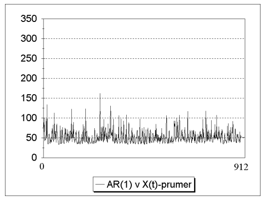
Na základě provedené analýzy dat nelze jednoznačně říci, zda metody nabízené SOLEM nebo podílová metoda jsou lepší pro zpracování nezáporných dat. Grafy pouze ukazují, že v uvedených čtyřech souborech nedává podílová metoda výrazně horší výsledky než metody tradiční.

Závěrem bych ráda poděkovala doc. RNDr. V. Veselému, CSc. z katedry aplikované matematiky přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně a RNDr. J. Antochovi, CSc. a RNDr. M. Laušmanové, CSc. z katedry pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK v Praze za laskavé poskytnutí dat. Bez jejich ochoty by tento příspěvek nevznikl.

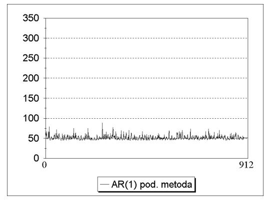
OBRÁZKOVÁ PŘÍLOHA



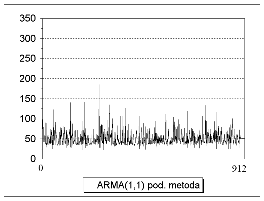
Obrázek 1.



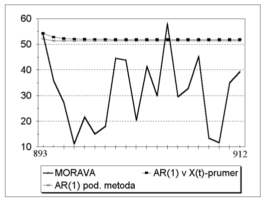
Obrázek 2.



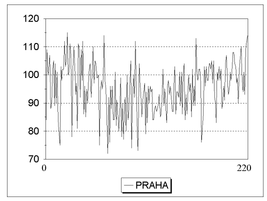
Obrázek 3.



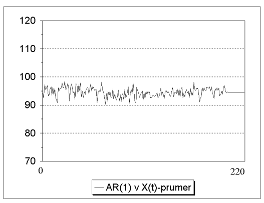
Obrázek 4.



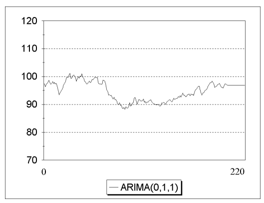
Obrázek 5.



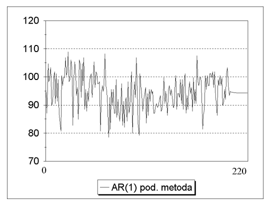
Obrázek 6.



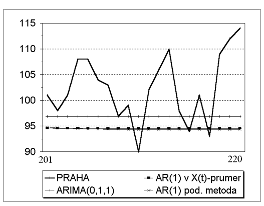
Obrázek 7.



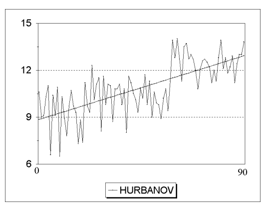
Obrázek 8.



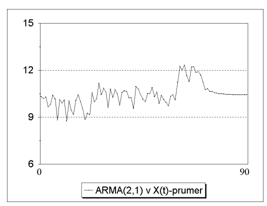
Obrázek 9.



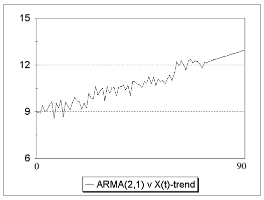
Obrázek 10.



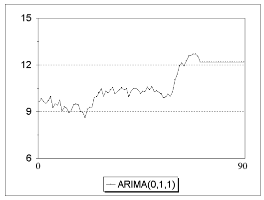
Obrázek 11.



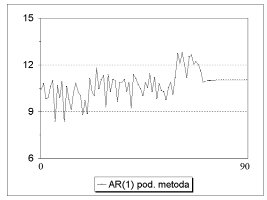
Obrázek 12.



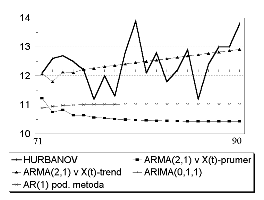
Obrázek 13.



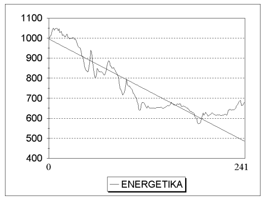
Obrázek 14.



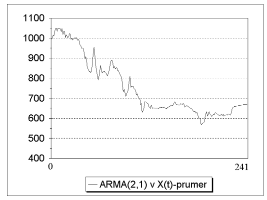
Obrázek 15.



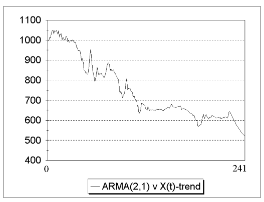
Obrázek 16.



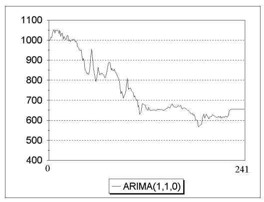
Obrázek 17.



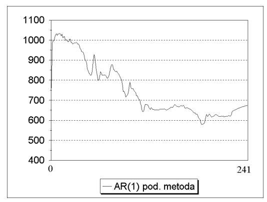
Obrázek 18.



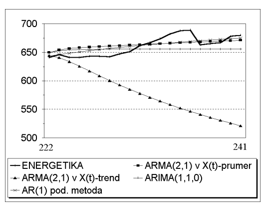
Obrázek 19.



Obrázek 20.



Obrázek 21.



Obrázek 22.

LITERATURA

[1] Anděl, J.: Non-negative autoregressive processes. J. Time Ser. Anal. 10(1989), 1-11.
[2] Anděl, J.: Non-negative moving-average models. Asymptotic Statistics. Proceedings of the Fifth Prague Symposium. Contributions to Statistics, Physica Verlag, Heidelberg 1994, 163-171.
[3] Bell, C.B.; Smith, E.P.: Inference for non-negative autoregressive schemes. Communications in Statistics-Theory Methods 15(1986), 2267-93.
[4] Cipra, T.: Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii. SNTL, Praha, 1986.
[5] Charamza, P. a kol.: Návod k používání programového produktu SOLO. Interní materiál Univerzity Karlovy, 1992.
[6] Zichová, J.: On a method of estimating parameters in non-negative ARMA models. Kybernetika 32(1996), 409-424.
[7] Zichová, J.: A comparison of two methods of estimating parameters in non-negative ARMA models. ESES - proceedings and abstracts. Masaryk University, Brno, 1996.

Tato práce vznikla za podpory grantu GAUK 188/96.