ODHADY PARAMETROV V MODELI S AUTOREGRESNÝMI CHYBAMI

Viktor WITKOVSKÝ
ÚM SAV

Abstrakt. V príspevku sú uvedené explicitné tvary algoritmov na výpočet odhadov LMINQE, Linearized Minimum Norm Quadratic Estimator, variančných komponentov — autoregresného parametra ϱ a parametra rozptylu chýb σ^2 — v lineárnom regresnom modeli s chybami typu AR(1). Študované sú dva prípady: (a) autoregresný proces spĺňa podmienky stacionarity; (b) autoregresný proces je nestacionárny.

Abstract: In the paper there are given the algorithms for computing LMINQE's, Linearized Minimum Norm Quadratic Estimators of variance components, the autoregressive parameter ϱ and the variance σ^2, in the linear regression model with disturbances following the AR(1) process. There are two different cases: The disturbances consist (a) stationary AR(1) process, and (b) nonstationary AR(1) process.

Резюме: Рассматривается проблема оценивания компонентов вариянции – параметра авторегрессии и параметра дисперсии – в модели линейной регрессии с отклонениями типа AR(1). Показаны алгоритмы для вычисления оценок LMINQUE в двух ситуациях: 1) случайный процесс авторегрессии можно считать стационарным; 2) случайный процесс авторегрессии можно считать не-стационарным.

1 Úvod

Budeme uvažovať časový rad $\{y_t\}$, ktorý je stochastickým procesom generovaným lineárnym modelom

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \qquad t = 0, 1, ..., \\ \varepsilon_t &= \varrho\varepsilon_{t-1} + u_t, \qquad t = 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\{\varepsilon_t\}$ je autoregresný proces prvého rádu — AR(1). Budeme predpokladať, že u_t sú nezávislé rovnako rozdelené (i.i.d.) realizácie náhodnej premennej s nulovou strednou hodnotou a konečnou varianciou σ^2. Špeciálne, $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Ďalej budeme prepokladať, že parametre modelu ($\beta = (\beta_0, \beta_1)'$, ϱ a σ^2) sú neznáme.

V tomto príspevku študujeme odhady parametrov ϱ a σ^2, ktoré sú založené na zovšeobecnenej metódeMINQE — Minimum Norm Quadratic (Invariant) Estimation, pozri napr. C.R. Rao (1971), C.R. Rao a J. Kleffe (1988), J. Volaufová a V. Witkovský (1992). Zovšeobecnenie tejto metódy v článku Aza
v ıs *et al.* (1993) umožňuje jej aplikovanie aj na nelineárnu štruktúru kovariančnej matice.

2 Model

Budeme uvažovať model (1) s konečným počtom pozorovaní T. Ďalej budeme rozlišovať dva prípady: (a) proces $\{\varepsilon_t\}$ spĺňa predpoklady stacionarity; (b) proces $\{\varepsilon_t\}$ nespĺňa predpoklady stacionarity, avšak predpokladáme, že realizácia ε_0 je taká, že $y_0 = a_0 + \varepsilon_0$, pričom y_0 je známa, pevne daná počiatočná hodnota pozorovaného časového radu.

2.1 Stacionárny model

Za predpokladu, že platí $|\varrho| < 1$, a za predpokladu, že proces $\{\varepsilon_t\}$ sa správa podľa (1) už od času $t = -\infty$, pričom pozorujeme len jeho časť v čase $t = 1, \ldots, T$, dostávame

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_1/\sqrt{1-\varrho^2}, \\ \varepsilon_t &= \varrho\varepsilon_{t-1} + u_t, \qquad t = 2, \ldots, T, \end{aligned} \tag{2}$$

pričom $|\varrho| < 1$ a $u_t \sim (0, \sigma^2)$, $t = 1, \ldots, T$, sú nezávislé, rovnako rozdelené chyby. Tento model spĺňa predpoklady stacionarity v slabom zmysle.

Vektor pozorovaní $y = (y_1, \ldots, y_T)'$ sa za predpokladov (2) správa podľa lineárneho modelu

$$E(y) = X\beta, \qquad Var(y) = V(\varrho, \sigma^2), \tag{3}$$

kde $X = [\mathbf{1} : \mathbf{t}]$, pričom $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)'$ a $\mathbf{t} = (1, \ldots, T)'$, a

$$V(\varrho, \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{1-\varrho^2} \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \cdots & \varrho^{T-1} \\ \varrho & 1 & \varrho & \cdots & \varrho^{T-2} \\ \varrho^2 & \varrho & 1 & \cdots & \varrho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho^{T-1} & \varrho^{T-2} & \varrho^{T-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Kovariančná matica $V(\varrho, \sigma^2)$ je nelineárnou funkciou parametra ϱ. Za platnosti ohraničení $|\varrho| < 1$ a $\sigma^2 > 0$ je matica $V(\varrho, \sigma^2)$ vždy pozitívne definitná. Ako funkcia svojich parametrov patrí matica $V(\varrho, \sigma^2)$ do triedy (aspoň) dvakrát diferencovateľných funkcií.

2.2 Nestacionárny model

V prípade nestacionárneho modelu budeme predpokladať, že $y_0 = a_0 + \varepsilon_0$, pričom y_0 je známa, napozorovaná hodnota v čase $t = 0$. Teda, y_0 je počiatočnou podmienkou pre generovanie procesu $\{y_t\}$, $t = 1, \ldots, T$.

Ľahko možno ukázať, že pri pevne danom y_0 je model (1) ekvivalentný s modelom

$$y_t = \gamma + \delta t + \varrho y_{t-1} + u_t, \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{5}$$

kde $\gamma = \beta_0(1-\varrho) + \beta_1\varrho$ a $\delta = \beta_1(1-\varrho)$. Model (5) je tzv. redukovanou formou modelu (1).

Podobne, postupným dosadzovaním, počínajúc od hodnoty y_0, dostávame pre $t = 1, \ldots, T$ ekvivalentný zápis modelu (1):

$$y_t = \beta_0(1-\varrho)\sum_{i=0}^{t-1}\varrho^i + \beta_1\left(\varrho\sum_{i=0}^{t-1}\varrho^i + (1-\varrho)\sum_{i=0}^{t-1}(t-i)\varrho^i\right) + \varrho^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\varrho^i u_{t-i}.$$

Po zjednodušení:

$$y_t = \beta_0(1-\varrho^t) + \beta_1 t + \varrho^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\varrho^i u_{t-i}, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Označme $Y_t = y_t - \varrho^t y_0$, $t = 1, \ldots, T$, a ďalej $Y(\varrho) = (Y_1, \ldots, Y_T)'$. Potom platí:

$$E(Y(\varrho)) = Z(\varrho)\beta, \qquad Var(Y(\varrho)) = W(\varrho, \sigma^2), \tag{6}$$

kde $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, a

$$Z(\varrho) = \begin{pmatrix} 1-\varrho & 1 \\ 1-\varrho^2 & 2 \\ 1-\varrho^3 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1-\varrho^T & T \end{pmatrix},$$

$$W(\varrho, \sigma^2) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \cdots & \varrho^{T-1} \\ \varrho & \varrho^2+1 & \cdots & \varrho^T + \varrho^{T-2} \\ \varrho^2 & \varrho^3+\varrho & \cdots & \varrho^{T+1} + \varrho^{T-1} + \varrho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho^{T-1} & \varrho^T + \varrho^{T-2} & \cdots & \sum_{i=1}^T \varrho^{2(T-i)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Pre $|\varrho| \le 1$ a $\sigma^2 > 0$ je kovariančná matica $W(\varrho, \sigma^2)$ pozitívne definitná a ako funkcia svojich parametrov patrí matica $W(\varrho, \sigma^2)$ do triedy (aspoň) dvakrát diferencovateľných funkcií.

2.3 Linearizovaný model

V oboch modeloch, v stacionárnom modeli (3) aj nestacionárnom modeli (6), je kovariančná matica nelineárnou funkciou autoregresného koeficienta ϱ. Aby sme na odhadovanie variančných komponentov ϱ a σ^2 mohli využiť zovšeobecnenú metódu MINQE, navrhnutú v práci Aza
v ıs *et al.* (1993), budeme linearizovať kovariančnú maticu lokálne v okolí pevne zvoleného bodu (ϱ_0, σ_0^2) príslušného parametrického priestoru.

Postup linearizácie budeme ilustrovať v prípade nestacionárneho modelu (6). Prípad linearizácie kovariančnej matice stacionárneho modelu je podobný a možno ho nájsť v práci V. Witkovský (1996).

Aby sme dosiahli model s lineárnou štruktúrou kovariančnej matice, ktorý je v okolí pevne zvoleného bodu (ϱ_0, σ_0^2) blízky modelu (6), budeme uvažovať Taylorov rozvoj prvého rádu matice $W(\varrho, \sigma^2)$ v okolí bodu (ϱ_0, σ_0^2):

$$W(\varrho, \sigma^2) \approx W_0 + (\varrho - \varrho_0)W_1 + (\sigma^2 - \sigma_0^2)W_2,$$

kde $W_0 = W(\varrho_0, \sigma_0^2)$, a

$$W_1 = \left.\frac{\partial W(\varrho, \sigma^2)}{\partial \varrho}\right|_{\varrho_0, \sigma_0^2} \quad \text{a} \quad W_2 = \left.\frac{\partial W(\varrho, \sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right|_{\varrho_0, \sigma_0^2}.$$

Keďže vzhľadom na (7) platí $W_0 = \sigma_0^2 W_2$, potom teda platí aj

$$W(\varrho, \sigma^2) \approx (\varrho - \varrho_0)W_1 + \sigma^2 W_2.$$

Ak označíme $\Sigma(\varrho, \sigma^2) = (\varrho - \varrho_0)W_1 + \sigma^2 W_2$, potom model

$$\big(Y(\varrho_0), Z(\varrho_0)\beta, \Sigma(\varrho, \sigma^2)\big) \tag{8}$$

je lineárny model s variančnými a kovariančnými komponentami $(\varrho - \varrho_0)$ a σ^2, ktorý v okolí bodu (ϱ_0, σ_0^2) dobre aproximuje model (6).

Podľa článku Azaïs *et al.* (1993), MINQE odhady $(\widehat{\varrho - \varrho_0})$ a $\hat{\sigma}^2$, variančných komponentov $(\varrho - \varrho_0)$ a σ^2 linearizovaného modelu (8), počítané pre apriórne hodnoty 0 a σ_0^2, vedú priamo k tzv. LMINQE (Linearized MINQE) odhadom komponentov ϱ a σ^2 v pôvodnom modeli, ktoré sú definované vzťahom:

$$\tilde{\varrho} = \varrho_0 + (\widehat{\varrho - \varrho_0}) \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2. \tag{9}$$

3 Odhady parametrov modelu

V nasledujúcich dvoch tvrdeniach sú uvedené explicitné tvary algoritmov na výpočet invariantných odhadov LMINQE(I), (teda odhadov LMINQE definovaných pomocou invariantných, vzhľadom na posun v strednej hodnote, odhadov MINQE(I) v linearizovanom modeli), variančných komponentov ϱ a σ^2 stacionárneho modelu (3) a nestacionárneho modelu (6).

Veta 1 *Uvažujme model (3). Nech* $|\varrho_0| < 1$ *a* $\sigma_0^2 > 0$ *označujú vopred zvolené hodnoty parametrov* ϱ *a* σ^2. *Ďalej nech* $e = (e_1, \ldots, e_T)'$ *označuje vektor rezíduí* $e = y - X(X'V_0^{-1}X)^{-}X'V_0^{-1}y$, *kde* $V_0 = V(\varrho_0, \sigma_0^2)$.

Potom invariantné odhady LMINQE(I), $\tilde{\varrho}$ *and* $\tilde{\sigma}^2$, *parametrov* ϱ *and* σ^2, *vypočítané pre apriórne hodnoty parametrov* (ϱ_0, σ_0), *sú dané vzťahmi:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varrho} &= \varrho_0 + \frac{\delta}{\sigma_0^2(T-1)} \left\{ -\varrho_0 \sum_{t=1}^{T} e_t^2 + \kappa \sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} - \varrho_0(\kappa - \varrho_0^2) \sum_{t=3}^{T} e_{t-1}^2 \right\}, \\
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{(T-1)} \left\{ (1-\delta) \sum_{t=1}^{T} e_t^2 - 2\varrho_0 \sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} + (1+\delta)\, \varrho_0^2 \sum_{t=3}^{T} e_{t-1}^2 \right\},
\end{aligned}
$$

kde $\kappa = T - (T-2)\varrho_0^2$ *a* $\delta = (1-\varrho_0^2)/\kappa$.

D ŏ k a z. Pozri V. Witkovský (1996). □

Veta 2 *Uvažujme model (6). Nech* $|\varrho_0| \leq 1$ *a* $\sigma_0^2 > 0$ *označujú vopred zvolené hodnoty parametrov* ϱ *a* σ^2. *Ďalej nech* $e = (e_1, \ldots, e_T)'$ *označuje vektor rezíduí* $e = Y - Z(Z'W_0^{-1}Z)^{-}Z'W_0^{-1}Y$, *kde* $Y = Y(\varrho_0)$, $Z = Z(\varrho_0)$ *a* $W_0 = W(\varrho_0, \sigma_0^2)$.

Potom invariantné odhady LMINQE(I), $\tilde{\varrho}$ *and* $\tilde{\sigma}^2$, *parametrov* ϱ *and* σ^2, *vypočítané pre apriórne hodnoty parametrov* (ϱ_0, σ_0), *sú dané vzťahmi:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varrho} &= \varrho_0 + \frac{1}{\sigma_0^2 \left(\sum_{t=0}^{T-1} (T-1-t)\varrho_0^{2t} \right)} \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} e_t e_{t+1} - \varrho_0 \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2 \right\} \\
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{T} \left\{ (1+\varrho_0^2) \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2 - 2\varrho_0 \sum_{t=1}^{T-2} e_t e_{t+1} + e_T^2 - \varrho_0 e_{T-1} e_T \right\}.
\end{aligned}
$$

D ô k a z. Podľa (9) stačí určiť MINQE(I) odhady parametrov $(\varrho - \varrho_0)$ a σ^2 (počítané pre apriórnu hodnotu parametrov 0 a σ_0^2) v linearizovanom modeli (8). Pritom MINQE(I) je dané ako riešenie lineárneho systému

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varrho - \varrho_0} \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = K_{(I)}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

kde $K_{(I)}$ je kriteriálna matica pre MINQE(I) a q_1, q_2 sú MINQE(I) kvadratické formy.

Tu platí:

$$K_{(I)} = \begin{pmatrix} 2\sum_{t=0}^{T-1}(T-1-t)\varrho_0^{2t} & 0 \\ 0 & T/(\sigma_0^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{\sigma_0^2}\left\{-\varrho_0 \sum_{t=1}^{T-1} e_t^2 + \sum_{t=1}^{T-1} e_t e_{t+1}\right\}, \\ q_2 &= \frac{1}{(\sigma_0^2)^2}\left\{(1+\varrho_0^2)\sum_{t=1}^{T-1} e_t^2 - 2\varrho_0 \sum_{t=1}^{T-2} e_t e_{t+1} + e_T^2 - \varrho_0 e_{T-1} e_T\right\}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 1 *LMINQE odhady spĺňajú určité kritéria optimality: Tieto odhady sú lokálne optimálne v triede QCE(I) — v triede invariantných odhadov, ktoré sú kvadratickou funkciou pozorovaní plus konštantný člen, pozri Azais* et al. *(1993), v prípade odhadov v stacionárnom modeli pozri V. Witkovský (1996).*

Poznámka 2 *Základné štatistické vlastnosti LMINQE odhadov parametrov ϱ a σ^2 poznáme len lokálne za predpokladu zhody apriórnej voľby parametra so skutočnou hodnotou parametra. Štatistické vlastnosti odhadu lineárnej funkcie $p'\beta$ parametrov prvého rádu typu $\widehat{p'\beta} = p'(X'\tilde{V}^{-1}X)^{-}X'\tilde{V}^{-1}y$, kde $\tilde{V}$ je odhad kovariančnej matice, sú vo všeobecnosti neznáme. Jeden prístup na ohraničenie hornej hranice pre rozdiel v rozptyloch medzi tzv. dvojkrokovým (two-stage, plug-in) odhadom a najlepším nevychýleným lineárnym odhadom možno nájsť v práci J. Volaufová, (1993).*

Poznámka 3 *Pre praktické výpočty navrhujeme tzv. dvojkrokovú metódu výpočtu LMINQE(I) odhadov parametrov ϱ a σ^2:*

1. *Určiť $\tilde{\sigma}^2$ pre apriórne zvolenú hodnotu ϱ_0.*
2. *Vypočítať $\tilde{\varrho}$ pre apriórnu hodnotu parametra $(\varrho_0, \tilde{\sigma}^2)$.*

4 Diskusia

Efektívnosť navrhovaných algoritmov bola overovaná na simulovaných údajoch. Algoritmy boli testované na modeloch so 100 pozorovaniami, pričom dôraz sa kládol na situácie, keď skutočný parameter autoregresie je kladný a blízky (poprípade rovný) hodnote 1. Všetky simulácie boli vykonané pomocou systému MATLAB, ver. 4.2c. Podrobnejšia analýza bude publikovaná inde. Na tomto mieste zhrnieme základné výsledky:

1. Obidve metódy sú citlivé na voľbu apriórnych hodnôt parametrov ϱ a σ^2. Ako omnoho robustnejšia (vzhľadom na voľbu počiatočných hodnôt) sa ukázala navrhovaná dvojkroková metóda.

2. V prípade konvergencie, obidve metódy konvergujú veľmi rýchlo. Odhady s presnosťou 10^{-4} sa dosahovali už po 3-7 krokoch iteračného procesu.

3. Pre veľké (skutočné) hodnoty parametra ϱ obidve metódy mali tendenciu k značne podhodnoteným odhadom parametra autokorelácie ϱ. Pri daných rozsahoch pozorovaní nebolo možné dokázať lepšie vlastnosti algoritmu založenom na nestacionárnom modeli pred algoritmom, ktorý vychádza zo stacionárneho modelu.

Zoznam literatúry

[1] J.M. Aza
v ıs, A. Bardin, and T. Dhorne. MINQE, maximum likelihood estimation and Fisher scoring algorithm for non linear variance models. *Statistics*, 24(3):205–213, 1993.

[2] C.R. Rao Estimation of variance and covariance components — MINQUE theory. *Journal of Multivariate Analysis* **1**, 257–275, 1971.

[3] C.R. Rao and J. Kleffe. *Estimation of Variance Components and Applications*, volume 3 of *Statistics and probability.* North-Holland, Amsterdam New York Oxford Tokyo, 1988.

[4] J. Volaufová. On variance of the two-stage estimator in variance-covariance components model. *Applications of Mathematics*, 38(1):1–9, 1993.

[5] J. Volaufová and V. Witkovský. Estimation of variance components in mixed linear model. *Applications of Mathematics*, 37(2):139–148, 1992.

[6] V. Witkovský. On variance-covariance components estimation in linear models with AR(1) disturbances. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXV(1):129–139, 1996.