SKORO JISTÉ JEVY V OBECNÉM SMYSLU

Petr VESELÝ [1]

KAM PřF MU

Abstract: We study σ-complete filters of almost sure events of random experiments and we show that some basic notions can be described by means of almost sure events. We also investigate the possibility of the uniform distribution on countably infinite sets.

Резюме: Мы изучаем σ-комплетные фильтры почти наверных явлений и показываем что некоторые основные понятия можно описать средством почти наверных явлений. Мы также изучаем возможность ровномерного распределения на счётных множествах.

1. Úvod

Obsahem tohoto příspěvku je studium některých vlastností σ-úplných filtrů skoro jistých jevů. Skoro jisté jevy jsou přitom uvažovány v poněkud obecnějším smyslu nad rámec obvyklé definice skoro jistého jevu jako měřitelné množiny míry jedna.

Nejprve budeme formalizovat některé jejich intuitivně zřejmé vlastnosti a ukážeme, že standardní součinové pravděpodobnostní prostory tyto vlastnosti mají a ověříme, že s nimi není v rozporu ani model studovaný v teorii intervalové pravděpodobnosti, v kterém neplatí silný zákon velkých čísel. Potom uvedeme jednoduchou souvislost mezi σ-úplnými filtry skoro jistých jevů a pravděpodobností. Na závěr ukážeme možnost využití popsaných σ-úplných filtrů k modelování rovnoměrného rozdělení na některých množinách. Všechna uváděná tvrzení jsou vybrána z [4].

2. Základní úvahy

Uvažujme náhodný experiment $\mathcal{E}$ s neprázdnou množinou možných výsledků Ω. Nechť $\mathbf{F}$ je neprázdný systém skoro jistých jevů spojených s tímto náhodným experimentem, tj. neprázdný systém množin $A \subseteq \Omega$ takových, že výsledek daného náhodného experimentu je skoro jistě prvkem A (nepožadujeme přitom, aby systém $\mathbf{F}$ obsahoval všechny skoro jisté jevy, pouze požadujeme, aby byl neprázdný). Výraz 'skoro jistý jev' zde nechápeme ve smyslu standardní teorie pravděpodobnosti, ale v nějakém intuitivním

[1] Výzkum byl finančně podporován Grantovou agenturou České republiky, č. grantu 201/96/0665.

smyslu, který může záviset na konkrétních vlastnostech uvažovaného náhodného experimentu. Poznamenejme, že vždy má smysl takový systém $\mathbf{F}$ uvažovat, neboť vždy můžeme položit alespoň $\mathbf{F} = \{\Omega\}$.

Co můžeme o systému $\mathbf{F}$ předpokládat? Zřejmě $\emptyset \notin \mathbf{F}$. Dále, jestliže $A \subseteq B \subseteq \Omega$ a $A \in \mathbf{F}$, pak B je zřejmě také skoro jistý jev. Konečně, jsou-li $A, B \in \mathbf{F}$ dva libovolné skoro jisté jevy, pak $A \cap B$ musí být nutně také skoro jistý jev. Bez újmy na obecnosti proto můžeme předpokládat, že systém $\mathbf{F}$ je filtr.

Výraz 'skoro jistě' může být chápán ve dvou krajních významech. Pokud ho budeme chápat v jeho nejslabším možném smyslu, pak budeme požadovat uzavřenost skoro jistých jevů pouze na konečné průniky. Pokud ho naopak budeme chápat v jeho nejsilnějším možném smyslu, tj. ve smyslu 'jistě', pak musíme požadovat uzavřenost na libovolné průniky. Zde zvolíme kompromisní řešení a budeme požadovat uzavřenost na spočetné průniky. Dále tedy budeme předpokládat, že $\mathbf{F}$ je σ-úplný filtr na Ω, tj. $\mathbf{F}$ je neprázdný systém podmnožin Ω takový, že

(1) $\emptyset \notin \mathbf{F}$;

(2) jestliže $A \subseteq B \subseteq \Omega$ a $A \in \mathbf{F}$, pak také $B \in \mathbf{F}$;

(3) jestliže $A_n \in \mathbf{F}$, $n \in \mathbb{N}$, pak také $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}$.

Uvažujme nyní náhodný experiment $\mathcal{E}'$ s množinou možných výsledků Ω', který je dán nějakou transformací $\vartheta : \Omega \to \Omega'$ výsledků daného náhodného experimentu $\mathcal{E}$. Označme $\vartheta(\mathbf{F})$ nejmenší σ-úplný filtr na Ω' obsahující všechny množiny $\vartheta(A)$, kde $A \in \mathbf{F}$. Je-li $A \in \mathbf{F}$ skoro jistý jev náhodného experimetu $\mathcal{E}$, pak $\vartheta(A)$ je skoro jistý jev transformovaného náhodného experimentu $\mathcal{E}'$. To znamená, že $\vartheta(\mathbf{F})$ je systém (ne nutně všech) skoro jistých jevů náhodného experimentu $\mathcal{E}'$ generovaný systémem $\mathbf{F}$. Snadno se lze přesvědčit, že filtr $\vartheta(\mathbf{F})$ vždy existuje, takže můžeme spolu s daným náhodným experimentem vyšetřovat i jeho libovolné transformace.

Nechť T je neprázdná množina. Předpokládejme, že pro každé $t \in T$ provedeme jednu nezávislou realizaci $\mathcal{E}_t$ náhodného experimentu $\mathcal{E}$. Označme $\mathbf{G}$ σ-úplný filtr skoro jistých jevů sdruženého náhodného experimentu $\mathcal{E}_T = (\mathcal{E}_t; t \in T)$ a ptejme se, jaké vlastnosti musí systém $\mathbf{G}$ mít. Množinou možných výsledků sdruženého experimetu $\mathcal{E}_T$ je množina Ω^T, tedy $\mathbf{G}$ je systém podmnožin Ω^T. Protože všechny experimenty $\mathcal{E}_t$, $t \in T$, jsou "shodné" s experimentem $\mathcal{E}$, musí se shodovat i jejich systémy skoro jistých jevů. To znamená, že můžeme požadovat, aby se projekce systému $\mathbf{G}$ do libovolné souřadnice $t \in T$ rovnala $\mathbf{F}$. Dále, protože všechny experimenty $\mathcal{E}_t$, $t \in T$, jsou nezávislé, je speciálně systém $\mathbf{G}$ nezávislý na struktuře množiny T. Volně řečeno, bude-li sdružený experiment $\mathcal{E}_T$ sledovat nějaký další pozorovatel, který k rozlišení jednotlivých dílčích experimentů užije jinou indexovou množinu o stejné mohutnosti, pak musí pozorovat stejné stochastické zákonitosti. Formálně můžeme tyto úvahy vyjádřit takto:

(i) $\mathrm{p}_t(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$ pro každé $t \in T$, kde p_t je kanonická projekce $\Omega^T \to \Omega$;

(ii) $\pi_\alpha(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ pro každé prosté zobrazení $\alpha : T \to T$, kde π_α je zobrazení $\Omega^T \to \Omega^T$ definované jako $\pi_\alpha(x) = (x_{\alpha(t)}, t \in T)$ pro všechna $x = (x_t, t \in T) \in \Omega^T$.

Množinu všech σ-úplných filtrů $\mathbf{G}$ na Ω^T splňujících podmínky (i) a (ii) označme $[\,\mathbf{F}\,]_T$.

Není obtížné se přesvědčit, že pro libovolný σ-úplný filtr $\mathbf{F}$ a libovolnou neprázdnou množinu T je $[\,\mathbf{F}\,]_T \neq \emptyset$. Dvě následující tvrzení ukazují, které systémy jevů mohou σ-úplné filtry s vlastnostmi (i) a (ii) obsahovat.

Tvrzení 1. *Nechť Ω, T jsou neprázdné množiny a nechť $\mathbf{Z} \subseteq \exp \Omega^T$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(a) existuje σ-úplný filtr $\mathbf{F}$ na Ω a σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_T$ tak, že $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{G}$;

(b) $\bigcap_{i=1}^\infty \pi_{\alpha_i}^{-1}(Z_i) \neq \emptyset$ pro všechna prostá zobrazení $\alpha_i : T \to T$ a všechny množiny $Z_i \in \mathbf{Z}$, $i \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 2. *Nechť Ω, T jsou neprázdné množiny, nechť $\mathbf{Z} \subseteq \exp \Omega^T$ a nechť $\mathbf{F}$ je σ-úplný filtr na Ω. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(a) existuje σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_T$ tak, že $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{G}$;

(b) $\mathrm{p}_t\left(\bigcap_{i=1}^\infty \pi_{\alpha_i}^{-1}(Z_i) \cap \bigcap_{i=1}^\infty \mathrm{p}_{t_i}^{-1}(A_i)\right) \in \mathbf{F}$ pro všechna $t \in T$, pro všechna prostá zobrazení $\alpha_i : T \to T$, pro všechna $t_i \in T$ a všechny množiny $Z_i \in \mathbf{Z}$ a $A_i \in \mathbf{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

3. Standardní a intervalová teorie pravděpodobnosti

Nejprve se zaměříme na systémy skoro jistých jevů generovaných součinovou pravděpodobnostní mírou. Zaveďme toto značení: pro každý pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ označme $\mathbf{S}_P$ systém všech skoro jistých jevů generovaných mírou P, tj. $\mathbf{S}_P$ je systém všech jevů $A \in \mathcal{A}$ takových, že $P(A) = 1$, a jejich nadmnožin.

Tvrzení 3. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť T je neprázdná množina a nechť $Q = \bigotimes_T Q_t$ je součinová pravěpodobnostní míra na $(\Omega^T, \bigotimes_T \mathcal{A})$. Pak $\mathbf{S}_Q \in [\,\mathbf{S}_P\,]_T$ tehdy a jen tehdy, když pro každé $t \in T$ jsou míry P a Q_t ekvivalentní a pro každé prosté zobrazení $\alpha : T \to T$ jsou míry $\bigotimes_{t \in T} Q_{\alpha(t)}$ a Q ekvivalentní.*

Důsledek. *Pro každou neprázdnou množinu T platí* $\mathbf{S}_{\bigotimes_T P} \in [\,\mathbf{S}_P\,]_T$.

Jinými slovy, systémy skoro jistých jevů v součinovém pravděpodobnostním prostoru mají vlastnosti (i) a (ii).

Tvrzení 4. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť T je nekonečná množina a nechť $Q = \bigotimes_T Q_t$ je součinová pravděpodobnostní míra na $(\Omega^T, \bigotimes_T \mathcal{A})$ taková, že $\mathbf{S}_Q \in [\,\mathbf{S}_P\,]_T$. Potom existuje jednoznačně určená pravděpodobnostní míra $\widetilde{P}$ na $(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že*

$$\mathbf{S}_Q \subseteq \mathbf{S}_{\bigotimes_T \widetilde{P}}\,.$$

Rovnosti $\mathbf{S}_P = \mathbf{S}_{\widetilde{P}}$ a $\mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_{\bigotimes_T \widetilde{P}}$ platí tehdy a jen tehdy, když pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ buď $\inf_{t\in T} Q_t(A) > 0$ nebo $Q_t(A) = 0$ pro všechna $t \in T$.

Navíc lze ukázat, že bez ohledu na to, jsou-li rovnosti $\mathbf{S}_P = \mathbf{S}_{\widetilde{P}}$ a $\mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_{\bigotimes_T \widetilde{P}}$ splněny, pro každý jev $A \in \mathbf{S}_{\widetilde{P}}$ platí

$$\Big(\bigotimes_{t\in T} Q_t\Big)(\{\, x \in \Omega^T \mid x_t \in A \text{ pro nekonečně mnoho } t\,\}) = 1\,.$$

Nyní přejdeme k intervalové teorie pravděpodobnosti. Připomeňme, že základním objektem této teorie je uspořádaná čtveřice $(\Omega, \mathcal{A}, \underline{P}, \overline{P})$, kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, $\mathcal{A}$ je vhodná množinová struktura na Ω (nejčastěji algebra nebo σ-algebra) a $\underline{P}$ a $\overline{P}$ jsou tzv. dolní a horní pravděpodobnost na $\mathcal{A}$, tj. zobrazení $\mathcal{A} \to [0,1]$ taková, že (1) $\underline{P}(A) + \overline{P}(A^c) = 1$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$, (2) $\underline{P}(\Omega) = 1$, (3) $\underline{P}$ je superaditivní a $\overline{P}$ je subaditivní zobrazení (viz např. [3]). Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra a $\mathcal{P}$ neprázdná množina pravděpodobnostních měr na $\mathcal{A}$, pak zobrazení

$$\underline{P} = \inf_{P\in\mathcal{P}} P\,, \quad \overline{P} = \sup_{P\in\mathcal{P}} P\,,$$

jsou dolní a horní pravděpodobnost (nicméně ne každou dolní a horní pravděpodobnost lze generovat tímto způsobem).

Intervalová teorie pravděpodobnosti je jedním z alternativních přístupů k modelování náhodných dějů, jehož některé výsledky jsou v přímém rozporu se standardní teorií pravděpodobnosti, zejména s silným zákonem velkých čísel, viz [3]. Autoři takových článků se přitom odvolávají mimo jiné i na některé fyzikální stochastické procesy, zejména tzv. $1/f$ šum, jejichž chování v jistých směrech odporuje ustáleným představám, viz např. [1]. Protože silný zákon velkých čísel je určitou výpovědí o skoro jistých jevech v součinovém pravděpodobnostním prostoru, ověříme, zda model bez silného zákona velkých čísel není v rozporu s našimi úvahami.

Tvrzení 5. *Nechť $\mathcal{P}$ je neprázdná množina pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ a nechť $\underline{P}$ a $\overline{P}$ jsou dolní a horní pravděpodobnost generovaná množinou $\mathcal{P}$. Položme $\mathbf{F} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{S}_P$. Pak existuje σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}$ takový, že pro každou měřitelnou množinu $A \subseteq \Omega$ platí*

$$\{\, x \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(x_i) = \underline{P}(A)\,,\ \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(x_i) = \overline{P}(A) \,\} \in \mathbf{G}\,,$$

kde I_A je indikátor množiny A.

Poznamenejme, že

$$(\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} P)(\{\, x \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(x_i) = \underline{P}(A)\,,\ \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(x_i) =$$
$$= \overline{P}(A) \,\}) = 0$$

pro každou pravděpodobnostní míru P na $(\Omega, \mathcal{A})$. Prvky σ-úplného filtru $\mathbf{G}$, jehož existenci tvrzení zaručuje, tedy nemohou být skoro jisté jevy ve smyslu teorie pravděpodobnosti. Z hlediska intervalové pravděpodobnosti je ovšem lze jako skoro jisté jevy chápat.

4. Pravděpodobnost a střední hodnota

Nechť je dán náhodný experiment $\mathcal{E}$, σ-úplný filtr $\mathbf{F}$ jeho skoro jistých jevů a σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}$. Pro každou množinu $A \subseteq \Omega$ označme $\mathcal{I}_A$ zobrazení $\Omega^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definované předpisem $\mathcal{I}_A(x) = (I_A(x_n), n \in \mathbb{N})$, kde I_A je indikátor množiny A, a položme $P_{\mathbf{G}}(A) = \mathcal{I}_A(\mathbf{G})$. Systém $P_{\mathbf{G}}(A)$ je σ-úplný filtr skoro jistých jevů transformovaného náhodného experimentu, který při každé realizaci nabývá jen hodnoty 1 nebo 0 podle toho, zda jev A nastal či nenastal.

Na σ-úplný filtr $P_{\mathbf{G}}(A) \subseteq \exp\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ můžeme pohlížet jako na určité vyjádření pravděpodobnosti jevu A. Pokud je daný náhodný experiment $\mathcal{E}$ modelován nějakým pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pak $\mathbf{F} = \mathbf{S}_P$, $\mathbf{G} = \mathbf{S}_{\bigotimes_{\mathbb{N}} P}$ a podle silného zákona velkých čísel pro každý jev $A \in \mathcal{A}$ existuje právě jedno číslo $p \in [0,1]$ takové, že

$$\{\, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = p \,\} \in P_{\mathbf{G}}(A)\,,$$

přičemž platí $p = P(A)$. Filtry $P_G(A)$, $A \in \mathcal{A}$, tedy korespondují s pravděpodobnostmi jevů $A \in \mathcal{A}$. Analogická korespondence platí v případě intervalové pravděpodobnosti.

Podobným způsobem lze snadno najít korespondenci σ-úplných filtrů se středními hodnotami náhodných veličin. Uvažujme zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a označme symbolem $E_{\mathbf{G}}X$ to reálné číslo (pokud existuje), pro které platí

$$\{ x \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(x_i) = E_{\mathbf{G}}X \} \in \mathbf{G}\,.$$

Z definice filtru plyne, že pokud takové číslo existuje, pak je určeno jednoznačně. Pokud budeme opět uvažovat σ-úplné filtry skoro jistých jevů generovaných pravděpodobnostní mírou, pak z silného zákona velkých čísel snadno plyne, že je-li X náhodná veličina s konečnou střední hodnotou EX, pak číslo $E_{\mathbf{G}}X$ existuje a je rovno EX.

5. Rovnoměrné rozdělení

Na závěr ukážeme možnost modelování rovnoměrného rozdělení na spočetných množinách pomocí σ-úplných filtrů jevů, místo pomocí konečně aditivních měr, jak je to provedeno např. v [2].

Nejprve zavedeme na obecné množině Ω rozdělení, které je "absolutně" rovnoměrné v tom smyslu, že není ovlivněno strukturou množiny Ω (standardní rovnoměrné rovnoměrné rozdělení na měřitelné podmnožině $\mathbb{R}^n$ je rovnoměrné vzhledem k topologii $\mathbb{R}^n$). Uvažujme náhodný experiment $\mathcal{E}$ s množinou možných výsledků Ω a σ-úplným filtrem skoro jistých jevů $\mathbf{F}$ a předpokládejme, že každý elementární jev $\omega \in \Omega$ má "stejnou šanci" být výsledkem experimentu $\mathcal{E}$. Nechť T je neprázdná množina a pro každé $t \in T$ proveďme jednu nezávislou realizaci $\mathcal{E}_t$ náhodného experimentu $\mathcal{E}$. Nechť $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}$ je σ-úplný filtr skoro jistých jevů sdruženého náhodného experimentu $\mathcal{E}_T = (\mathcal{E}_t; t \in T)$. Bude-li experiment $\mathcal{E}_T$ sledovat další pozorovatel, který změní označení elementárních jevů, pak musí přesto pozorovat stejné stochastické zákonitosti, neboť všechny výsledky jsou stejně možné. Formálně: $\pi^b(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ pro každou bijekci $b : \Omega \to \Omega$, kde π^b je zobrazení $\Omega^T \to \Omega^T$ definované jako $\pi^b(x) = (b(x_t), t \in T)$ pro všechna $x = (x_t, t \in T) \in \Omega^T$. Množinu všech σ-úplných filtrů $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}$ s touto vlastností označme $[\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}^{U}$.

Zformulujeme zde pouze jedno tvrzení o rovnoměrném rozdělení v tomto smyslu, a to pro množiny přirozených a celých čísel.

Tvrzení 6. *Nechť $\Omega = \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) a nechť $\mathbf{F} = \{\Omega\}$. Pak existuje σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\,\mathbf{F}\,]_{\mathbb{N}}^{U}$ takový, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\{ x \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I[x_{ki+1} < x_{ki+2} < \cdots < x_{ki+k}] = \frac{1}{k!} \} \in \mathbf{G}\,.$$

Volně řečeno: budeme-li náhodně a nezávisle na sobě vybírat např. dvojice přirozených (resp. celých) čísel x_1, x_2, pak v "polovině" případů bude $x_1 < x_2$. Naproti tomu lze např. snadno ukázat, že nelze očekávat, že v polovině případů bude x_1 sudé číslo, neboť neexistuje filtr $\mathbf{G} \in [\mathbf{F}]_{\mathbb{N}}^{U}$ s touto vlastností.

Dále se zmíníme o existenci σ-úplných filtrů souvisejících s rozdělením rovnoměrným vzhledem k struktuře dané množiny Ω. Konkrétně budeme uvažovat množinu $(0,1)_{\mathbb{Q}} = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ racionálních čísel na intervalu $(0,1)$.

Tvrzení 7. *Existuje σ-úplný filtr $\mathbf{F}$ na $(0,1)_{\mathbb{Q}}$ a σ-úplný filtr $\mathbf{G} \in [\mathbf{F}]_{\mathbb{N}}$ tak, že pro každý interval $(a,b) \subseteq (0,1)_{\mathbb{Q}}$ platí $E_{\mathbf{G}} I_{(a,b)} = b - a$.*

Pro zobrazení $X : [0,1]_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ nejsou čísla $E_{\mathbf{G}} X$ rovna jejich střední hodnotě, neboť filtr $\mathbf{G}$ není generován pravděpodobnostní mírou. Pro zajímavost uveďme jejich hodnoty pro některá zobrazení. Uvažujme zobrazení φ, ψ : $(0,1)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{N}$, která každému racionálnímu číslu přiřadí jeho čitatel a jmenovatel (v základním tvaru bez společných dělitelů), tj. $q = \varphi(q)/\psi(q)$ pro každé $q \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$. Potom lze ukázat, že

$$
\begin{aligned}
&E_{\mathbf{G}}\varphi = E_{\mathbf{G}}\psi = \infty\,, \quad E_{\mathbf{G}}\frac{\varphi}{\psi} = \frac{1}{2}\,, \quad E_{\mathbf{G}}\frac{\psi}{\varphi} = \infty\,, \\
&E_{\mathbf{G}}\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{1/\psi} = E_{\mathbf{G}}\left(\frac{1}{\psi}\right)^{1/\varphi} = 1\,, \\
&E_{\mathbf{G}}\left(1+\frac{1}{\psi}\right)^{\varphi} = e - 1\,, \quad E_{\mathbf{G}}\left(1+\frac{1}{\varphi}\right)^{\psi} = \infty\,.
\end{aligned}
$$

Literatura:

[1] Fine, T. L. (1988), *Lower probability models for uncertainty and nondeterministic processes*, J. Stat. Plann. Inference **20**, No. 3, 389–411.

[2] Kadane, J. B., O'Hagan, A. (1995), *Using Finitely Additive Probability: Uniform Distribution on the Natural Numbers*, J. Am. Stat. Assoc. **90**, No. 430, 626–631.

[3] Sadrolhefazi, A., Fine, T. L. (1994), *Finite-Dimensional Distributions and Tail Behavior in Stationary Interval-Valued Probability Models*, The Annals of Statistics **22**, No. 4, 1840–1870.

[4] Veselý, P., *Filters of Almost Sure Events* (připravuje se k publikaci).

Petr Veselý, Katedra aplikované matematiky, PřF MU, Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno; E–mail: pvesely@math.muni.cz