SOUČTY ŘAD, ZÁKONY VELKÝCH ČÍSEL A CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTY PRO REÁLNÉ NÁHODNÉ VELIČINY - PŘEHLED

Petr LACHOUT

MFF UK, KPMS

Abstract. The methods of data processing are based on the probability theory, namely on the Strong Law of Large Numbers and on the Central Limit Theorem. These theorems are well known for the case of i.i.d. random variables. The goal of the paper is to give a survey of possible ways how to weaken the i.i.d. assumption. The overview cannot be exhaustive, of course. Nevertheless, the author is promising to continue his search to enlarge this collection in future.

Резюме: Методы изучения наблюдений используют результаты теории вероятностей. Прежде всего важен закон больших чисел и центральная предельная теорема. Эты теоремы известны для независимых одинако роспределенных случайных величин. Стать стремится зделать обзор возможностей, как удалось ослабить это предположение. Очевидно, что эту проблематику невазможно изчерпать. Все таки, автор обещает продолжать исследование, чтобы коллекция стала репрезентативной.

1 Úvodní definice a poznámky

Cílem tohoto přehledu je shrnout dostupné výsledky o sčítatelnosti řad, zákonech velkých čísel a centrálních limitních větách pro reálné náhodné veličiny. Pro zkrácení zápisu budeme místo termínu reálná náhodná veličina nebo reálné náhodné veličiny psát zkratku r.n.v.

Nejdříve uveďme některé důležité definice a poznámky.

1.1 Používané konvergence posloupnosti náhodných veličin

Pro posloupnost r.n.v. používáme nejčastěji následující čtyři typy konvergencí.

Definice 1 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$, *konverguje k r.n.v.* X *s.j. (skoro jistě), jestliže jsou všechny uvažované r.n.v. definovány na* *stejném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$ *a existuje-li náhodný jev* $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Prob}(A) = 1$ *tak, že* $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *pro všechna* $\omega \in A$.

Tuto konvergenci budeme označovat symbolem $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} X$.

Definice 2 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *konverguje k r.n.v.* X *v pravděpodobnosti, jestliže jsou všechny uvažované r.n.v. definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$, *a je-li splněno*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Prob}\Big(|X_n - X| > \varepsilon\Big) = 0 \quad \textit{pro každé} \;\; \varepsilon > 0 \; .$$

Tuto konvergenci budeme označovat symbolem $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$.

Definice 3 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$, *konverguje k r.n.v.* X *v* L_p, *pro* $1 \leq p < +\infty$, *jestliže jsou všechny uvažované r.n.v. definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$ *a je-li splněno* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}|X_n - X|^p = 0$.

Tuto konvergenci budeme označovat symbolem $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L_p} X$.

Definice 4 *Říkáme, že posloupnost r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *konverguje v distribuci k r.n.v.* X, *jestliže pro každou spojitou omezenou funkci* $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *platí* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}f(X_n) = \mathrm{E}f(X)$. *(Každá z uvažovaných r.n.v. může být definována na jiném pravděpodobnostním prostoru.)*

Tuto konvergenci budeme označovat $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$.

Konvergenci v distribuci lze vyjádřit několika ekvivalentními způsoby, viz [22], kap. III.4 "Konvergence v distribuci", zejména věta III.4.1, str. 216, III.4.5, str. 217 a III.4.7, str. 219.

Zesílením konvergence v distribuci je stabilní konvergence v distribuci.

Definice 5 *Říkáme, že posloupnost r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *konverguje v distribuci k r.n.v.* X *stabilně, jestliže r.n.v.* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *jsou definovány na společném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$ *a* X *je r.n.v. definovaná na nějakém pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}', \mathrm{Prob}')$, *který je rozšířením prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$, *t.j.* $\mathrm{Prob}'(A \times \Omega') = \mathrm{Prob}(A)$ *pro každé* $A \in \mathcal{A}$, *a pro každou množinu* $A \in \mathcal{A}$ *platí* $X_n I_A \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X I_{A\times\Omega'}$.

Tuto konvergenci budeme označovat $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X\,(stably)$.

Definici stabilní konvergence nalezneme v [4], kap. 3.2, str. 56. Definice, kterou jsme zde uvedli je, podle našeho názoru, názornější a je s klasickou definicí ekvivalentní. Důkaz najdeme opět v [4], kap. 3.2, str. 56.

Stabilní konvergence v distribuci implikuje evidentně konvergenci v distribuci; stačí položit $A = \Omega$. Význam stabilní konvergence v distribuci tkví v tom, že můžeme zaměnit pravděpodobnostní míru Prob za jinou, která je vůči ní absolutně spojitá, a konvergence v distribuci zůstane zachována. Limitní rozdělení musíme samozřejmě přepočíst.

Mezi těmito konvergencemi jsou následující vztahy.

Lemma 1 *Nechť $X_n, n \in \mathcal{N}$ a X jsou r.n.v., definované na společném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$.*

1. *Když X_n konverguje k X s.j., potom konverguje také v pravděpodobnosti.*

2. *Když X_n konverguje k X v pravděpodobnosti, pak lze z každé podposloupnosti vybrat podposloupnost, která konverguje s.j.*

Lemma 2 *Nechť $X_n, n \in \mathcal{N}$ a X jsou r.n.v. definované na společném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Prob})$.*

1. *Když X_n konvergují k X v pravděpodobnosti, pak konvergují také v distribuci.*

2. *Když X_n konvergují k X v distribuci a X je s.j. konstanta, pak konvergují také v pravděpodobnosti.*

Mezi konvergencí v pravděpodobnosti a v L_p pro $1 \leq p < +\infty$ platí následující vztah. Nejdříve však připomeňme definici stejnoměrné integrovatelnosti.

Definice 6 *Řekneme, že množina r.n.v. $\{X_i, i \in I\}$ je stejnoměrně integrovatelná, jestliže*

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{i \in I} \mathrm{E}\big[|X_n| I_{[|X_i| \geq K]}\big] = 0 \ .$$

Tvrzení 1 *Pro $X_n, n \in \mathcal{N}$, X r.n.v. a $1 \leq p < +\infty$ je ekvivalentní:*

1. $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L_p} X$,

2. $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} X$ *a množina r.n.v. $\{|X_n|^p, n \in \mathcal{N}\}$ je stejnoměrně integrovatelná.*

Podmínku stejnoměrné integrovatelnosti lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který bývá příjemnější k ověřování.

Tvrzení 2 (Vallé-Poussin) *Množina r.n.v.* $\mathcal{F}$ *je stejnoměrně integrovatelná tehdy a jen tehdy, existuje-li neklesající funkce* $\Psi : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$ *taková, že* $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = +\infty$ *a* $\sup_{X\in\mathcal{F}} \mathrm{E}[|X|\Psi(|X|)] < +\infty$.

Funkci Ψ *lze dokonce volit tak, že funkce* $x \mapsto x\Psi(x)$ *je konvexní na* $\mathcal{R}_+$.

Věta je uvedena i s důkazem v [22], věta III.2.13, str. 197.

Speciálně, když $\sup_{n\in\mathcal{N}} \mathrm{E}|X_n|^q < +\infty$ pro nějaké $1 < q < +\infty$, potom je posloupnost $\{|X_n|^p, n \in \mathcal{N}\}$ stejnoměrně integrovatelná pro každé $1 \le p < q$.

1.2 Sčítatelnost řady reálných náhodných veličin

Definice 7 *Nechť* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *jsou r.n.v. Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je absolutně sčítatelná s.j. (v pravděpodobnosti, v* L_p*), jestliže částečné absolutní součty* $AS_n = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$ *mají konečnou limitu s.j. (v pravděpodobnosti, v* L_p*).*

Definice 8 *Nechť* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *jsou r.n.v. Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná s.j. (v pravděpodobnosti, v* L_p*), jestliže částečné součty* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *mají konečnou limitu s.j. (v pravděpodobnosti, v* L_p*).*

Částečné absolutní součty AS_n neklesají s rostoucím n a tak jejich limita existuje vždy. Může však být pro některá $\omega \in \Omega$ rovna $+\infty$. Triviálně tedy platí ekvivalence absolutní sčítatelnosti v pravděpodobnosti a s.j.

Věta 1 *Suma* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je absolutně sčítatelná v pravděpodobnosti právě tehdy, je-li absolutně sčítatelná s.j.*

Jednoduché kritérium pro absolutní sčítatelnost je konečnost střední hodnoty.

Věta 2 *Nechť* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *jsou r.n.v. a nechť splňují* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}|X_n| < +\infty$*, potom je řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *absolutně sčítatelná s.j. i v* L_1*.*

V obecném případě můžeme použít některého výsledku z následujících kapitol k ověření sčítatelnosti řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n|$.

Dalším pozorováním je následující fakt. Sčítatelnost řady náhodných veličin s.j. implikuje silný zákon velkých čísel. Stačí si pouze uvědomit následující lemma.

Lemma 3 (Kronecker) *Mějme dvě posloupnosti reálných čísel* $a_n, n \in \mathcal{N}$ *a* $b_n, n \in \mathcal{N}$*. Když* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *je sčítatelná,* $0 < b_1 \le b_2 \le b_3 \le \dots$ *a* $b_n \to +\infty$*, potom* $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Lemma je uvedeno s důkazem v [22], IV.2.5, str. 258.

1.3 Jiné poznámky

Zobecněním normování v zákoně velkých čísel je Töplitzova matice $A = (a_{k,n})_{k,n\in\mathcal{N}}$.

Definice 9 *Budeme říkat, že matice $A = (a_{k,n})_{k,n\in\mathcal{N}}$ je Töplitzova, když platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{k\in\mathcal{N}} |a_{k,n}| = 0 \ , \quad \sup_{n\in\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{k,n}| < +\infty \quad a \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} = 1 \ ,$$

2 Nezávislé stejně rozdělené

Pro nezávislé stejně rozdělené (i.i.d.) r.n.v. je situace celkem přehledná. Pro SZVČ máme vyčerpávající charakterizaci.

Věta 3 *Pro $(X_n, n \in \mathcal{N})$ i.i.d. r.n.v. je ekvivalentní*

1.
$$\mathrm{Prob}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < +\infty\right) > 0 \ .$$

2.
$$X_1 \in L_1 \quad , \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathrm{E}X_1 \ .$$

3. $X_1 \in L_1$.

Ve slabším znění je věta uvedena v [22], IV.2.2, str.253. Limitní řád konvergence s.j. dává zákon iterovaného logaritmu.

Věta 4 (Hartmann-Wintner) *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ jsou i.i.d. r.n.v. s $\mathrm{E}X_1 = 0$ a $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2$, kde $0 < \sigma < +\infty$. Pak*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad s.j. \quad a \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = -1 \quad s.j.$$

Věta je uvedena s důkazem v [22], VII.3.6, str. 432. Pro konvergenci v distribuci je maximální řád $\sqrt{n}$.

Věta 5 (Lévy-Lindeberg) *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ jsou i.i.d. r.n.v., $\mathrm{E}X_1 = \mu$ a $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2$, kde $0 < \sigma^2 < +\infty$. Pak*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Viz [22], IV.3.4, str. 269. SZVČ a CLV pro i.i.d. r.n.v. budeme zobecňovat oslabováním tohoto předpokladu. Nebudeme se ale zabývat SZVČ bez integrovatelnosti a CLV s nekonečnými rozptyly, čtenáře odkazujeme na články [3] a [2]. Vynecháváme také teorii neomezeně dělitelných rozdělení. Čtenář se s ní může seznámit v knížce [22], kapitola IV.4., str. 272-281.

3 Nezávislé náhodné veličiny

Pro nezávislé r.n.v. lze sledované otázky vyřešit téměř beze zbytku.

3.1 Sčítatelnost řady

Věta 6 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé r.n.v., potom je ekvivalentní*

- $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná s.j.*
- $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná v pravděpodobnosti.*

Věta je uvedena s důkazem v [22], IV.1.2, str.239.

Věta 7 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé r.n.v. a* $X_n \in L_2$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$*. Když* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var} X_n < +\infty$*, potom je řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} (X_n - \mathrm{E} X_n)$ *sčítatelná s.j. i v* L_2*.*

Věta 8 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé a stejně omezené r.n.v. Potom řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná s.j. tehdy a jen tehdy když* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E} X_n$ *je sčítatelná a* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var} X_n < +\infty$*.*

Tyto dvě věty jsou speciálními případy obecné věty, která problematiku sčítatelnosti r.n.v. řeší úplně.

Věta 9 (Kolmogorovova o třech řadách) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé r.n.v. Pak jsou následující tři tvrzení ekvivalentní:*

- $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná s.j.*
- *Existuje* $0 < c < +\infty$ *takové, že*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Prob}(|X_n| > c) < +\infty \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}\big[X_n I_{[|X_n| \le c]}\big] \quad \textit{je sčítatelná a}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}\big(X_n I_{[|X_n| \le c]}\big) < +\infty \ .$$

- *Pro každé* $0 < c < +\infty$ *platí*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Prob}(|X_n| > c) < +\infty \ , \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}\big[X_n I_{[|X_n| \le c]}\big] \quad \textit{je sčítatelná a}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}\big(X_n I_{[|X_n| \le c]}\big) < +\infty \ .$$

Věta je uvedena s důkazem v [22], IV.1.7, str.243.

3.2 Silný zákon velkých čísel

Věta 10 *Pro* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *nezávislé r.n.v. a posloupnost čísel* $b_n > 0$, $b_n \to +\infty$ *existují čísla* $c, d \in \mathcal{R}^*$, $d \le c$ *takové, že*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = c \quad \textit{s.j.} \ , \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k = d \quad \textit{s.j.} \ .$$

Věta 11 (Kolmogorov) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé r.n.v. a* $0 < b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots$, $b_n \to +\infty$.

$$\textit{Když} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Var}X_n}{b_n^2} < +\infty \ , \quad \textit{potom} \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \ \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \ 0 \ .$$

Větu lze dokázat spojením věty 7 a lemmatu 3; viz [22], IV.2.1, str.252. Předpoklady věty nelze jednoduše zeslabit. Když $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} = +\infty$, potom existuje posloupnost nezávislých r.n.v. $(X_n, n \in \mathcal{N})$ taková, že $\mathrm{E}X_n = 0$, $\mathrm{Var}X_n = \sigma_n^2$ a přitom

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k > \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{s.j.} \ ,$$

viz [22], IV.2.8, str.260.

3.3 Centrální limitní věty

Věta 12 (Feller-Lindeberg) *Nechť* $X_{1,n}, X_{2,n}, \cdots, X_{k_n,n}$ *jsou pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *nezávislé r.n.v.,* $\mathrm{E}X_{k,n} = 0$ *a* $\mathrm{Var}X_{k,n} = \sigma_{k,n}^2$. *Položme* $\sigma_n^2 = \sigma_{1,n}^2 + \sigma_{2,n}^2 + \cdots + \sigma_{k_n,n}^2$. *Když* $0 < \sigma_n^2 < +\infty$ *a je-li splněna Fellerova-Lindebergova podmínka*

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}X_{k,n}^2 I_{[|X_{k,n}| \ge \varepsilon\sigma_n]} \ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ 0 \ \textit{pro každé} \ \varepsilon > 0 \ ,$$

pak

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Věta je uvedena s důkazem v [22], IV.3.1, str. 265. Věta téměř vyčerpává problematiku centrální limitní věty pro nezávislé r.n.v. Za předpokladu stejnoměrné asymptotické zanedbatelnosti, t.j.

$$\max\left\{\mathrm{Prob}\left(\left|\frac{X_{k,n}}{\sigma_n}\right| > \varepsilon\right) : k = 1,2,\ldots,k_n\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \text{ pro každé } \varepsilon > 0 \ ,$$

lze tvrzení věty obrátit, viz [22], IV.4.9, str. 277.

Fellerova-Lindebergova podmínka je splněna pro i.i.d. r.n.v. s konečným rozptylem, viz. věta 5. Podmínka je také splněna, je-li splněna Ljapunovova podmínka.

Věta 13 (Ljapunov) *Nechť $X_{1,n}, X_{2,n}, \cdots, X_{k_n,n}$ jsou nezávislé r.n.v. pro každé $n \in \mathcal{N}$, $\mathrm{E}X_{k,n} = 0$, $\mathrm{Var}X_{k,n} = \sigma^2_{k,n}$. Nechť $\Psi : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$ je neklesající, $\lim_{x\to+\infty}\Psi(x) = +\infty$. Označme $\rho_{k,n}(\Psi) = \mathrm{E}\big[(X_{k,n})^2\Psi(|X_{k,n}|)\big]$, $\sigma_n^2 = \sigma^2_{1,n} + \sigma^2_{2,n} + \cdots + \sigma^2_{k_n,n}$ a $\rho_n(\Psi) = \rho_{1,n}(\Psi) + \rho_{2,n}(\Psi) + \cdots + \rho_{k_n,n}(\Psi)$. Když $0 < \sigma_n^2 < +\infty$ a je-li splněna podmínka*

$$\frac{\rho_n(\Psi)}{\sigma_n^2\Psi(\varepsilon\sigma_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{pro každé } \ \varepsilon > 0 \ ,$$

pak

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Pro speciální volbu $\Psi(x) = x^\delta$, $\delta > 0$ nalezneme vetu i s důkazem v [22], IV.3.3, str. 269. Pro obecnou funkci Ψ probíhá důkaz obdobně.

4 Po dvou nezávislé

Definice 10 *Řekneme, že posloupnost r.n.v. $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je p.i.i.d. (pairwise independent identically distributed), jestliže $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(X_1)$ pro každé $n \in \mathcal{N}$ a X_n, X_k jsou nezávislé pro každé $n, k \in \mathcal{N}$, $n \neq k$.*

Věta 14 (Chung) *Když $(X_n, n \in \mathcal{N})$ jsou p.i.i.d. a $X_1 \in L_1$, pak*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathrm{E}X_1 \ .$$

Důkaz viz [17].

Definice 11 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *má symetrické rozdělení, jestliže*

$$\mathcal{L}\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right) = \mathcal{L}\left(\delta_1 X_1, \delta_2 X_2, \ldots, \delta_k X_k\right)$$

pro každé $\delta_i \in \{-1, 1\}$*,* $i \in \mathcal{N}$ *a každou délku* $k \in \mathcal{N}$*.*

Věta 15 (Hong) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou p.i.i.d. a tato posloupnost má symetrické rozdělení s* $\mathrm{E}X_1 = \mu$ *a* $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2$*,* $0 < \sigma^2 < +\infty$*. Pak*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Dokonce

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \Big/ |X_1|, |X_2|, |X_3|, \ldots\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{w} N(0,1) \quad s.j. \ ,$$

kde w označuje slabou konvergenci pravděpodobnostních měr.

Důkaz najdeme v článku [16].

5 m-závislé posloupnosti

Definice 12 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je* m*-závislá pro* $m \in \mathcal{N}$*, jestliže vektor* $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ *a posloupnost* $(X_{k+m+n}, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé pro každé* $k \in \mathcal{N}$*.*

5.1 Sčítatelnost řady

Věty pro sčítatelnost řady plynou okamžitě z výsledků pro nezávislé r.n.v. Stačí si jen uvědomit, že m-závislou posloupnost můžeme rozdělit na $m+1$ posloupností nezávislých r.n.v. Ovšem ztrácíme ekvivalenci, která platí pro nezávislé r.n.v.

Věta 16 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je* m*-závislá posloupnost,* $m \in \mathcal{N}$ *a* $X_n \in L_2$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$*. Když* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}X_n < +\infty$*, potom je řada* $\sum_{n=1}^{+\infty}(X_n - \mathrm{E}X_n)$ *sčítatelná s.j. i v* L_2*.*

Věta 17 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je* m*-závislá posloupnost,* $m \in \mathcal{N}$ *a nechť existuje* $0 < c < +\infty$ *takové, že*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Prob}(|X_n| > c) < +\infty \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}\big(X_n I_{[|X_n| \le c]}\big) < +\infty$$

a řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\big[X_{nm+k} I_{[|X_{nm+k}|\le c]}\big] \quad \textit{jsou sčítatelné pro každé } k \in \{1,2,\ldots,m+1\} \ .$$

Potom je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *sčítatelná s.j.*

5.2 Silný zákon velkých čísel

Věta 18 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je* m*-závislá posloupnost,* $m \in \mathcal{N}$ *a* $0 < b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots$, $b_n \to +\infty$.

$$\textit{Když} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Var} X_n}{b_n^2} < +\infty \ , \quad \textit{potom} \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \ \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \ 0 \ .$$

Větu lze dokázat spojením věty 16 a lemmatu 3.

Věta 19 *Pro* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ m*-závislou posloupnost,* $m \in \mathcal{N}$, $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(X_1)$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *a* $X_1 \in L_1$ *platí*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \ \mathrm{E}X_1 \ .$$

Tato věta plyne ihned z věty 3.

5.3 Centrální limitní věty

m-závislá posloupnost je automaticky silný mixing, viz. paragraf 10. Proto pro ni platí centrální limitní věta.

Věta 20 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je* m*-závislá stacionární posloupnost pro nějaké* $m \in \mathcal{N}$ *a* $X_1 \in L_2$, $\mathrm{E}X_1 = 0$. *Označíme-li* $\sigma^2 = \mathrm{Var}X_1 + 2\sum_{k=2}^{m+1} \mathrm{cov} X_1 X_k$, *potom*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \ X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,\sigma^2) \ .$$

6 Nekorelované náhodné veličiny

Věta 21 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nekorelované a* $X_n \in L_2$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$. *Potom* $\sum_{n=1}^{+\infty}(X_n - \mathrm{E}X_n)$ *je sčítatelná v* L_2 *tehdy a jen tehdy když* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}X_n < +\infty$.

Věta 22 *Nechť r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nekorelované a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log n)^2 \mathrm{Var} X_n < +\infty \ ,$$

potom $\sum_{n=1}^{+\infty} (X_n - \mathrm{E}X_n)$ *je sčítatelná s.j.*

Věta je uvedena s důkazem v [23], věta 2.3.2, str. 20. Pro konstanty $a_n = o((\log n)^2)$ již existují příklady posloupností nekorelovaných r.n.v. s vlastností $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{Var} X_n < +\infty$ ale řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (X_n - \mathrm{E}X_n)$ není sčítatelná s.j. viz. [1], str. 88.

Věta 23 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nekorelované r.n.v. a* $0 < b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots,\ b_n \to +\infty$. *Když*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^2 \mathrm{Var} X_n}{b_n^2} < +\infty \ ,$$

potom

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} 0 \ .$$

Větu lze dokázat spojením věty 22 a lemmatu 3.

Věta 24 (Čebyšev) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nekorelované r.n.v. a* $b_n > 0$, $b_n \to +\infty$. *Když*

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ ,$$

potom

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0 \ .$$

Věta 25 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nekorelované r.n.v. a* $A = (a_{k,n})_{k,n \in \mathcal{N}}$ *je Töplitzova matice. Když*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{k,n}|^2 \mathrm{Var} X_k < +\infty \ ,$$

potom je řada

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \quad \textit{sčítatelná v } L_2 \ .$$

Když navíc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{k,n}|^2 \mathrm{Var} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

potom platí

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n}(X_k - \mathrm{E}X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0 \ .$$

7 Martingaly

Definice 13 *Nechť $(S_n, n \in \mathcal{N})$ a $(X_n, n \in \mathcal{N})$ jsou posloupnosti integrovatelných r.n.v. a $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$ je posloupnost σ-algeber, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{A}$ pro každé $n \in \mathcal{N}$ taková, že S_n i X_n jsou $\mathcal{F}_n$-měřitelné pro každé $n \in \mathcal{N}$.*

- *Posloupnost $((S_n, \mathcal{F}_n), n \in \mathcal{N})$ je martingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,\mathcal{F}_n] = S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $((S_n, \mathcal{F}_n), n \in \mathcal{N})$ je submartingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,\mathcal{F}_n] \geq S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $((S_n, \mathcal{F}_n), n \in \mathcal{N})$ je supermartingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,\mathcal{F}_n] \leq S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $((X_n, \mathcal{F}_n), n \in \mathcal{N})$ je posloupnost martingalových (submartingalových nebo supermartingalových) diferencí, jestliže posloupnost $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \mathcal{F}_n\right), n \in \mathcal{N}\right)$ tvoří martingal (submartingal nebo supermartingal).*

Často stačí uvažovat přirozené σ-algebry $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Proto se používá zjednodušeného značení.

Definice 14 *Nechť $S_n, n \in \mathcal{N}$ a $(X_n, n \in \mathcal{N})$ jsou posloupnosti integrovatelných r.n.v.*

- *Posloupnost $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je martingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,S_1, S_2, \ldots, S_n] = S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je submartingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,S_1, S_2, \ldots, S_n] \geq S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je supermartingal, jestliže* $\mathrm{E}[S_{n+1}/\,S_1, S_2, \ldots, S_n] \leq S_n$ *s.j. pro každé $n \in \mathcal{N}$.*
- *Posloupnost $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je posloupnost martingalových (submartingalových nebo supermartingalových) diferencí, jestli $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathcal{N}\right)$ tvoří martingal (submartingal nebo supermartingal).*

Definice jsou konzistentní neboť, když $((X_n, \mathcal{F}_n), n \in \mathcal{N})$ je martingal (submartingal, supermartingal nebo jejich diference), potom $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je martingal (submartingal, supermartingal nebo jejich diference).

7.1 Součet řady

Pro submartingaly platí několik konvergenčních vět, které lze chápat jako věty pro součty jejich diferencí.

Věta 26 *Jestliže* $(S_n, n \in \mathcal{N})$ *je submartingal a* $\sup_{n \in \mathcal{N}} \mathrm{E}S_n^+ < +\infty$, *potom existuje integrovatelná r.n.v.* S *taková, že* $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$.

Věta je uvedena s důkazem v [22], věta VI.3.1, str. 357.

Věta 27 *Jestliže* $(S_n, n \in \mathcal{N})$ *je stejnoměrně integrovatelný submartingal, potom existuje integrovatelná r.n.v.* S *taková, že* $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$ *a zároveň* $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L_1} S$.

Dokonce platí $S_n = \mathrm{E}[S / S_1, S_2, \ldots, S_n]$ *s.j. pro každé* $n \in \mathcal{N}$.

Věta je uvedena s důkazem v [22], věta VI.3.5, str. 359.

Věta 28 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je posloupnost martingalových diferencí s vlastností* $\mathrm{E}(\sup_{n \in \mathcal{N}} X_n)^+ < +\infty$. *Označme* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. *Potom je řada* $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ *sčítatelná s.j. na množině kde* $\sup_{n \in \mathcal{N}} S_n < +\infty$.

Věta je uvedena s důkazem v [22], věta VI.3.16, str. 364.

Věta 29 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou martingalové diference a* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var} X_n < +\infty$, *potom* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *je sčítatelná s.j. a tento součet je integrovatelná r.n.v.*

Věta je uvedena s důkazem v [22], VI.3.12, str.362.

7.2 Zákony velkých čísel

Věta 30 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou martingalové diference a* $0 < b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots$, $b_n \to +\infty$.

$$\text{Když} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Var} X_k}{b_k^2} < +\infty \ , \quad \text{potom} \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} 0 \ .$$

Větu lze dokázat složením věty 29 a lemmatu 3. Věta je uvedena s důkazem v [22], VI.3.12, str.363.

Věta 31 (Chow) *Nechť* $(S_n, n \in \mathcal{N})$ *je nezáporný submartingal,* $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$, $b_n \to +\infty$ *a* $1 \leq p < +\infty$. *Když* $S_n \in L_p$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}\left[S_{k+1}^p - S_k^p\right]}{b_{k+1}^p} < +\infty \ ,$$

potom

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} 0 \quad \text{a zároveň také} \quad \frac{S_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{L_p} 0 \ .$$

Důkaz viz [22], VI.3.26, str.368. Speciálně z této věty plyne SZVČ pro martingaly.

Věta 32 *Nechť* $(S_n, n \in \mathcal{N})$ *je martingal,* $p \geq 1$, $S_n \in L_p$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *a* $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$, $b_n \to +\infty$. *Když*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}[|S_{k+1}|^p - |S_k|^p]}{b_{k+1}^p} < +\infty \ ,$$

potom

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} 0 \quad \text{a zároveň také} \quad \frac{S_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{L_p} 0 \ .$$

7.3 Centrální limitní věty

Pro martingalové diference existuje několik centrálních limitních vět.

Věta 33 (McLeish) *Nechť pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *jsou dány martingalové diference* $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n}$, $k_n \in \mathcal{N}$. *Dále nechť platí*

1. $\sup_{n\in\mathcal{N}} \mathrm{E}\max\left\{|X_{k,n}|^2 : k = 1, 2, \ldots, k_n\right\} < +\infty$;
2. $\max\{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0$;
3. $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \sigma^2$, *kde* $0 \leq \sigma < +\infty$.

Pak

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0, \sigma^2) \ .$$

Důkaz viz [20] nebo [22], věta VI.4.1, str. 370.

Věta 34 (Hall,Heyde) *Nechť pro každé $n \in \mathcal{N}$ jsou $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n}$, $k_n \in \mathcal{N}$ martingalové diference vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_{1,n} \subset \mathcal{F}_{2,n} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{k_n,n} \subset \mathcal{A}$, $k_n \in \mathcal{N}$. Dále nechť platí*

1. *Posloupnost σ-algeber je "zasítěná" (nested), t.j. $k_n \leq k_{n+1}$ a $\mathcal{F}_{k,n} \subset \mathcal{F}_{k,n+1}$ pro všechny indexy $k = 1, 2, \cdots, k_n$, $n \in \mathcal{N}$.*
2. $\sup_{n \in \mathcal{N}} \mathrm{E} \max \left\{ |X_{k,n}|^2 : k = 1, 2, \ldots, k_n \right\} < +\infty$;
3. $\max \{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} 0$;
4. $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \eta^2$ *pro nezápornou r.n.v. η.*

Pak

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \eta Z \, (stably) \ ,$$

kde $\mathcal{L}(Z) = N(0,1)$ a Z, η jsou nezávislé r.n.v.

Důkaz viz [4], věta 3.2., str. 58. V [19] je ukázáno zobecnění těchto vět ovšem bez stability. Pro úplnost uveďme zobecnění McLeishovy věty.

Věta 35 *Nechť pro každé $n \in \mathcal{N}$ jsou dány martingalové diference $X_{1,n}$, $X_{2,n}$, ..., $X_{k_n,n}$, $k_n \in \mathcal{N}$. Dále nechť platí*

1. $\mathrm{E} \max \{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$;
2. $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \sigma^2$, *kde $0 \leq \sigma < +\infty$.*

Pak

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0, \sigma^2) \ .$$

8 Podmínky martingalového typu

Věta 36 (Brown) *Nechť $X_{1,n}, X_{2,n}, \cdots, X_{k_n,n}$, $k_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathcal{N}$ jsou r.n.v. s konečným rozptylem $\mathrm{Var} X_{k,n} = \sigma_{k,n}^2$. Položme $\sigma_n^2 = \sigma_{1,n}^2 + \sigma_{2,n}^2 + \cdots + \sigma_{k_n,n}^2$. Když $0 < \sigma_n^2 < +\infty$ a je-li splněno*

1. $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{k_n - 1} \mathrm{E}[X_{k+1,n} / X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k,n}] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} 0$;

2. $\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n-1} \mathrm{Var}(X_{k+1,n}/ X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} 1$;

3. *pro každé* $\varepsilon > 0$ *je*

$$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n-1} \mathrm{E}\big[X_{k+1,n}^2 I_{[|X_{k+1,n}|\geq\varepsilon\sigma_n]}/ X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k,n}\big] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} 0 \ ,$$

pak

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Věta je uvedena v [28], věta 7.6.2, str. 177 a v ekvivalentní formulaci v [22], VI.4.9, str. 376.

9 Stacionární posloupnosti

Definice 15 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je stacionární, jestliže*
$\mathcal{L}(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \mathcal{L}(X_2, X_3, \ldots, X_{k+1})$ *pro každé* $k \in \mathcal{N}$.

Definice 16 *Řekneme, že oboustranná posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je stacionární, jestliže*
$\mathcal{L}(X_k, X_{k+1}, \ldots, X_l) = \mathcal{L}(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{l+1})$ *pro každé* $k, l \in \mathcal{N}$, $k \leq l$.

Stacionární posloupnost (stacionární oboustrannou posloupnost) můžeme vždy uvažovat jako posloupnost projekcí na pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{R}^{\mathcal{N}}, \mathcal{B}^{\mathcal{N}}, P_X)$ (případně na $(\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}, \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}, P_X)$), kde P_X je rozdělení posloupnosti X. Této reprezentaci se říká kanonická verze procesu X. Je proto důležitý pojem shiftu na $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ (na $\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$) a σ-algebry invariantních množin na $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ (na $\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$).

Definice 17 *Isomorfismus* $T_{\mathcal{N}} : \mathcal{R}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ *takový, že* $T(x)_k = x_{k+1}$ *pro každé* $x \in \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ *a* $k \in \mathcal{N}$ *se nazývá shift (vlevo) na* $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ *a* σ*-algebra* $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} = \{A \in \mathcal{B}^{\mathcal{N}} : T_{\mathcal{N}}^{-1}(A) = A\}$ *se nazývá* σ*-algebra invariantních množin na* $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$.

Isomorfismus $T_{\mathcal{Z}} : \mathcal{R}^{\mathcal{Z}} \to \mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$ *takový, že* $T(x)_k = x_{k+1}$ *pro každé* $x \in \mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$ *a* $k \in \mathcal{Z}$ *se nazývá (oboustranný) shift na* $\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$ *a* σ*-algebra* $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} = \{A \in \mathcal{B}^{\mathcal{Z}} : T_{\mathcal{Z}}^{-1}(A) = A\}$ *se nazývá* σ*-algebra invariantních množin na* $\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$.

Definice 18 *Řekneme, že stacionární posloupnost* $X = (X_n, n \in \mathcal{N})$ *je ergodická, jestliže pro každou invariantní množinu* $B \in \mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ *je buď*
$\mathrm{Prob}(X \in B) = 1$ *nebo* $\mathrm{Prob}(X \in B) = 0$.

Řekneme, že stacionární oboustranná posloupnost $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je ergodická, jestliže pro každou invariantní množinu* $B \in \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ *je buď*
$\mathrm{Prob}(X \in B) = 1$ *nebo* $\mathrm{Prob}(X \in B) = 0$.

V následujících větách uvažujeme kanonické verze sledovaných stacionárních posloupností a stacionárních oboustranných posloupností. Tato úmluva nám umožní používat jednoduššího a průhlednějšího značení.

9.1 Zákony velkých čísel

Věta 37 (Birkhoff) *Pro $(X_n, n \in \mathcal{N})$ stacionární posloupnost r.n.v., $X_1 \in L_1$, platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathrm{E}[X_1/\mathcal{I}_{\mathcal{N}}] \ .$$

Důkaz viz [22], VI.6.6, str.395.

Věta 38 (Von Neumann) *Pro $(X_n, n \in \mathcal{N})$ stacionární posloupnost, $X_1 \in L_p$, $p \geq 1$ platí:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathrm{E}[X_1/\mathcal{I}_{\mathcal{N}}] \ , \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{L_p} \mathrm{E}[X_1/\mathcal{I}_{\mathcal{N}}] \ .$$

Důkaz viz [22], VI.6.8, str.398.

9.2 Centrální limitní věty

Existují zhruba řečeno čtyři typy předpokladů, které zajišťují platnost CLV. První skupina předpokladů se opírá o martingaly a SZVČ pro stacionární posloupnosti.

Věta 39 (Billingsley, Ibragimov) *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je ergodická stacionární posloupnost martingalových diferencí s $\mathrm{E}X_1 = 0$ a $0 < \mathrm{Var}X_1 = \sigma^2 < +\infty$. Potom*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} Z \quad , \quad \mathcal{L}(Z) = N(0,1) \ .$$

Věta je uvedena s důkazem v [22], VI.6.9, str. 398. Jde vlastně o důsledek McLeishovy věty 33. Věta byla dokázána poprvé nezávisle v článcích [7] a [18].

Věta 40 (Hall,Heyde) *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je stacionární posloupnost martingalových diferencí s $\mathrm{E}X_1 = 0$ a $0 < \mathrm{Var}X_1 = \sigma^2 < +\infty$. Potom*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \eta Z \ (stably) \ , \quad kde$$

$L(Z) = N(0,1)$, $\eta \geq 0$, $\eta^2 = \mathrm{E}\left[X_1^2 / I_{\mathcal{N}}\right]$ a.s. a r.n.v. η a Z jsou nezávislé.

Věta je důsledkem věty 34. Další zesílení tvrzení věty pro ergodické komponenty najdeme v [27].

Další výsledky vyžadují oboustranné stacionární posloupnosti a jsou založeny na existenci invariantní σ-algebry mající speciální vlastnosti. Pro volbu této σ-algebry však neexistuje žádný obecný návod. V některých případech vystačíme s volbou "přirozené" σ-algebry $\sigma(X_{-i}, i \in \mathcal{N}_0)$. Existují však jednoduché příklady v nichž s touto volbou neuspějeme.

Definice 19 *Řekneme, že σ-algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ je invariantní, když $T_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathcal{M} \supset \mathcal{M}$, kde $T_{\mathcal{Z}}$ je shift na $\mathcal{R}^{\mathcal{Z}}$.*

Povšimněme si rozdílu mezi invariantní σ-algebrou a σ-algebrou invariantních množin. Nepleťme si proto tyto dva rozdílné pojmy.

Definice 20 *Pro stacionární oboustrannou posloupnost $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ budeme označovat jako Q_X množinu všech funkcí $g \in L_2(\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}, P_X)$, pro které existuje invariantní σ-algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ a $k \in \mathcal{Z}$ tak, že $g \in L_2(T_{\mathcal{Z}}^{-k}\mathcal{M}, P_X) \ominus L_2(T_{\mathcal{Z}}^{k}\mathcal{M}, P_X)$.*

Druhý typ předpokladů se zakládá na aproximacích navržených v článku [14].

Věta 41 (Gordin) *Nechť $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ je ergodická stacionární oboustranná posloupnost. Když pro funkci $f \in L_2(\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}, P_X)$ platí*

$$\inf_{g \in Q_X} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{E} \left| \sum_{k=1}^{n-1} (f(X_k) - g(X_k)) \right|^2 = 0 \ ,$$

pak existuje limita $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} f(X_k)) = \sigma^2$ a platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} Z \ (stably) \ , \quad \mathcal{L}(Z) = N(0, \sigma^2) \ .$$

Věta byla dokázána v [14]. Výsledky z článku [14] byly zobecněny pro neergodickou verzi v [12], v důkaze je však chyba. Korektní důkazy a další vylepšení tvrzení přinesl článek [27]. Uvádíme proto až tuto verzi.

Věta 42 (Eagleson, Volný) *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ je stacionární oboustranná posloupnost. Když pro funkci $f \in L_2(\mathcal{B}^{\mathcal{Z}}, P_X)$ platí*

$$\inf_{g \in Q_X} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{E} \left| \sum_{k=1}^{n-1} (f(X_k) - g(X_k)) \right|^2 = 0 \ ,$$

pak existuje limita $\frac{1}{n}\mathrm{E}\Big[\big(\sum_{k=1}^n f(X_k)\big)^2 \Big/ I_{\mathcal{Z}}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{L_1} \eta^2$ *a platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \eta Z \ (\textit{stably}) \ ,$$

$\mathcal{L}(Z) = N(0,1)$ *a* Z, η *jsou nezávislé.*

Tvrzení věty je ještě vylepšeno pro ergodické komponenty v článku [27].

Třetí typ předpokladů předpokládá existenci invariantní σ-algebru se speciálními vlastnostmi.

Věta 43 (Heyde) *Nechť* $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je ergodická stacionární oboustranná posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = 0$ *a* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ *je invariantní* σ*-algebra. Nechť*

1. *Suma*
$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} \left(\mathrm{E}\big[X_n / T_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathcal{M}\big] - \mathrm{E}[X_n/\mathcal{M}]\right)$$
je sčítatelná v L_2,

2. *Je splněna rovnost*
$$\sigma^2 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) =$$
$$= \mathrm{Var}\left(\sum_{n\in\mathcal{Z}} \left(\mathrm{E}\big[X_n / T_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathcal{M}\big] - \mathrm{E}[X_n/\mathcal{M}]\right)\right) < +\infty \ .$$

Potom platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} Z \quad , \quad \mathcal{L}(Z) = N(0,\sigma^2) \ .$$

Věta je dokázána v [15]. Neergodickou verzi této věty najdeme v článku [27].

Věta 44 (Volný) *Nechť* $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je stacionární oboustranná posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = 0$ *a* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ *je invariantní* σ*-algebra. Nechť*

1. *Suma*
$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} \left(\mathrm{E}\big[X_n / T_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathcal{M}\big] - \mathrm{E}[X_n/\mathcal{M}]\right)$$
je sčítatelná v L_2,

2. Je splněna rovnost

$$\sigma^2 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) =$$

$$= \mathrm{Var}\left(\sum_{n\in\mathcal{Z}} \left(\mathrm{E}\left[X_n / T_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathcal{M}\right] - \mathrm{E}[X_n / \mathcal{M}]\right)\right) < +\infty \ .$$

Potom $\frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 \Big/ \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{L_1} \eta^2$ *a platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \eta Z \quad ,$$

$\mathcal{L}(Z) = N(0,1)$ *a* Z, η *jsou nezávislé r.n.v.*

V článku [27] najdeme také zlepšení tvrzení pro ergodické komponenty.
Čtvrtý typ předpokladů byl navržen opět Gordinem v noticce [13].

Věta 45 (Gordin) *Nechť* $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je ergodická stacionární oboustranná posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = 0$ *a* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ *je invariantní* σ*-algebra. Nechť je dále splněno*

1. Existuje konečný limes superior

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < +\infty \ ;$$

2. Následující součty jsou konečné

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\mathrm{E}[X_1 / T_{\mathcal{Z}}^{n}\mathcal{M}]\right| < +\infty \ \ s.j., \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left|X_1 - \mathrm{E}\left[X_1 / T_{\mathcal{Z}}^{-n}\mathcal{M}\right]\right| < +\infty \ \ s.j.$$

Potom existuje limita

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < +\infty$$

a platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} Z \quad , \quad \mathcal{L}(Z) = N(0,\sigma^2) \ .$$

Výsledky z noticky [13] byly nejdříve dokázány v [4]. V důkaze je však chyba. Korektní formulace a důkaz pochází z [6].

Zobecnění pro neergodický případ nalezneme v [27]. Zatím nejobecnější je výsledek z [24].

Věta 46 (Volný) *Nechť* $X = (X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je ergodická stacionární oboustranná posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = 0$ *a* $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^{\mathcal{Z}}$ *je invariantní* σ*-algebra. Nechť je dále splněno*

1. *Existuje konečný limes superior*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}\left[\left| \sum_{k=1}^{n} X_k \right| \Big/ \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \right] < +\infty \quad s.j.$$

2. *Sumy*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}[X_1 / T_{\mathcal{Z}}^{n}\mathcal{M}] \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(X_1 - \mathrm{E}\left[X_1 / T_{\mathcal{Z}}^{-n}\mathcal{M} \right] \right)$$

   jsou sčítatelné v L_2.

Potom existuje limita

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{E}\left[\left| \sum_{k=1}^{n} X_k \right| \Big/ I_{\mathcal{Z}} \right] < +\infty$$

a platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \eta Z \quad ,$$

$\mathcal{L}(Z) = N(0,1)$ *a* Z, η *jsou nezávislé r.n.v.*

10 Mixingy

Definice 21 *Pro oboustrannou posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *definujeme* σ*-algebry*

- $\mathcal{M}_k^l = \sigma\{X_n, n = k, k+1, \ldots, l\}$ *pro* $k, l \in \mathcal{Z}$ *a* $k \le l$,
- $\mathcal{M}_k^{+\infty} = \sigma\{\mathcal{M}_k^{k+j}, j \in \mathcal{N}\}$, $\mathcal{M}_{-\infty}^l = \sigma\{\mathcal{M}_{l-j}^l, j \in \mathcal{N}\}$ *pro* $k, l \in \mathcal{Z}$,
- $\mathcal{M}_{-\infty}^{+\infty} = \sigma\{\mathcal{M}_{-k}^k, k \in \mathcal{N}\}$.

Pro dvě σ-algebry se používají následující míry vzdálenosti.

Definice 22 *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ jsou dvě σ-algebry, pak zavádíme následující míry vzdálenosti těchto σ-algeber:*

- $\psi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\Big\{ \Big| \frac{\mathrm{Prob}(B\cap C)}{\mathrm{Prob}(B)\mathrm{Prob}(C)} - 1 \Big| : \mathrm{Prob}(B) > 0, \mathrm{Prob}(C) > 0,$
  $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C} \Big\},$
- $\phi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\Big\{ \Big| \mathrm{Prob}(C/B) - \mathrm{Prob}(C) \Big| : \mathrm{Prob}(B) > 0,$
  $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C} \Big\},$
- $\beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathrm{E}\Big[\sup\Big\{ |\mathrm{Prob}(C/\mathcal{B}) - \mathrm{Prob}(C)| : C \in \mathcal{C} \Big\} \Big],$
- $\alpha(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\Big\{ |\mathrm{Prob} B \cap C - \mathrm{Prob}(B)\,\mathrm{Prob}(C)| : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C} \Big\},$
- $\rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\Big\{ |\mathrm{cor}(\eta,\xi)| : \eta$ *je $\mathcal{B}$-měřitelná,* ξ *je $\mathcal{C}$-měřitelná,*
  $\mathrm{Var}\eta = 1, \mathrm{Var}\xi = 1 \Big\}.$

Definice 23 *Pro oboustrannou posloupnost $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ zavádíme terminologii:*

- $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je $*$-mixing, když*
  $\psi(k) = \sup_{l\in\mathcal{Z}} \psi(\mathcal{M}_{-\infty}^{l}, \mathcal{M}_{k+l}^{+\infty}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$
- $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je ϕ-mixing, když*
  $\phi(k) = \sup_{l\in\mathcal{Z}} \phi(\mathcal{M}_{-\infty}^{l}, \mathcal{M}_{k+l}^{+\infty}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$
- $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je absolutně regulární, když*
  $\beta(k) = \sup_{l\in\mathcal{Z}} \beta(\mathcal{M}_{-\infty}^{l}, \mathcal{M}_{k+l}^{+\infty}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$
- $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing, když*
  $\alpha(k) = \sup_{l\in\mathcal{Z}} \alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^{l}, \mathcal{M}_{k+l}^{+\infty}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$

Poznamenejme, že pokud je posloupnost $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ stacionární, potom suprema v definicích odpadnou. Rozeznává se podstatně větší počet typů mixingů. Pro úplnější přehled doporučujeme zájemcům knížku [28], kapitola 3, str. 25-46. Zde také nalezneme základní vztahy mezi jednotlivými mixingy, viz. [28], kapitola 3.8., str. 42-46.

Povšimněme si, že uvedené názvosloví je poněkud zavádějící neboť silný mixing vlastně znamená nejslabší předpoklady.

10.1 Zákony velkých čísel

Věta 47 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = \mu$ *a matice* $A = (a_{k,n})_{k,n\in\mathcal{N}}$ *je Töplitzova. Když existuje* $\gamma > 0$ *takové, že*

$$\mathrm{E}|X_1|^{1+\frac{1}{\gamma}} < +\infty \ , \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha^{\frac{1}{1+\gamma}}(j) < +\infty \ , \quad \textit{potom} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mu \ .$$

Věta je ukázána v [28], věta 12.2.1, str. 329.

Věta 48 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = \mu$ *a matice* $A = (a_{k,n})_{k,n\in\mathcal{N}}$ *je Töplitzova. Když existují* $\delta > \gamma > 0$, $\beta > 0$ *takové, že*

$$\mathrm{E}|X_1|^{1+\frac{1}{\gamma}} < +\infty \ , \quad \alpha(n) = O\left(n^{-\delta}\right) \ , \quad \max_{k\in\mathcal{N}} |a_{k,n}| = O\left(n^{-\beta}\right) \ ,$$

potom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mu \ .$$

Věta je ukázána v [28], věta 12.2.2, str. 331.

10.2 Centrální limitní věty

Věta 49 (Dehling,Denker,Philipp) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost s* $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}X_1 = 1$. *Označme*

$$s_n^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 \quad a \quad \rho_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \ .$$

Když platí

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n}\mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > 0$$

a existuje posloupnost čísel $0 < a_n \leq +\infty$, $a_n \to +\infty$ *taková, že*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\rho_n^2}\mathrm{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 I_{\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \leq a_n s_n\right]}\right] \leq 1 \ ,$$

potom

$$\frac{1}{\rho_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X \quad , \quad \mathcal{L}(X) = N(0,1) \ .$$

Větu nalezneme v [28], věta 8.2.3, str. 189.

Věta 50 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost. Nechť* $\mathrm{E}X_1 = 0$, $|X_1| \le K < +\infty$ *a* $\alpha(n) = O\left(n^{-(1+\theta)}\right)$ *pro* $\theta > 0$. *Potom řada* $\sigma^2 = \mathrm{Var}X_1 + 2\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{cov}(X_1, X_k)$ *konverguje absolutně a*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0, \sigma^2) \ .$$

Věta 51 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost. Nechť* $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{E}|X_1|^{2+\delta} < +\infty$ *a* $\alpha(n) = O\left(n^{-(1+\theta)(1+\frac{2}{\delta})}\right)$ *pro nějaké* $\theta > 0$ *a* $\delta > 0$. *Potom řada* $\sigma^2 = \mathrm{Var}X_1 + 2\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{cov}(X_1, X_k)$ *konverguje absolutně a*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0, \sigma^2) \ .$$

Tyto dvě věty nalezneme v [28] shrnuté ve větě 7.4.2, str. 166.

Věta 52 (Denker, Volný) *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{Z})$ *je silný mixing a oboustranná stacionární posloupnost,* $\mathrm{E}X_1 = 0$ *a* $\mathrm{Var}X_1 < +\infty$. *Položme* $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k)$. *Když* $\sigma_n^2 \to +\infty$, *pak je ekvivalentní:*

-
$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X \ , \ \mathcal{L}(X) = N(0, 1)$$

- *Množina r.n.v.*
$$\left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2, n \in \mathcal{N} \right\} \quad \textit{je stejnoměrně integrovatelná.}$$

Věta byla dokázána v článcích [11], [25] a [5]. Nalezneme ji také v knížce [28], věta 8.2.1, str. 183. Pro nestacionární mixingy je věta zobecněna v článku [26].

11 Homogenní Markovovy řetězce

Definice 24 *Řekneme, že posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *tvoří homogenní Markovův řetězec se stavy v množině* $S = (S, \mathcal{S})$, *jestliže* $X_n \in S$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$ *a když existuje funkce* $p : S \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ *taková, že pro každé* $A \in \mathcal{S}$ *platí* $\mathrm{Prob}(X_{n+1} \in A / X_n) = p(X_n, A)$ *s.j.,* $A \mapsto p(s, A)$ *je pravděpodobnostní míra pro každé* $s \in S$ *a funkce* $s \mapsto p(s, A)$ *je* $\mathcal{S}$*-měřitelná pro každou množinu* $A \in \mathcal{A}$.

V případě, že S je nejvýše spočetná množina stačí místo funkce p uvažovat pouze matici pravděpodobností přechodu $P = (p(s,t))_{t,s \in S}$.

Definice 25 *Řekneme, že homogenní Markovův řetězec $(X_n, n \in \mathcal{N})$ se stavy v $(S, \mathcal{S})$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p : S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ má stacionární rozdělení $\pi : \mathcal{S} \to [0,1]$, jestliže platí $\pi(A) = \int_S p(s,A)\,\mathrm{d}\pi(s)$ pro každé $A \in \mathcal{S}$.*

Pro Markovovy řetězce s nejvýše spočetnou množinou stavů zavádíme následující terminologii.

Definice 26 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je homogenní Markovův řetězec s nejvýše spočetně stavy S. Řekneme, že stav $s \in S$ je trvalý, jestliže když začneme ve stavu s, potom se řetězec do stavu s po konečně mnoha krocích vrátí s pravděpodobností 1.*

Řekneme, že stav $s \in S$ je přechodný, jestliže když začneme ve stavu s, potom se s kladnou pravděpodobností řetězec do stavu s nevrátí po konečně mnoha krocích.

Řekneme, že trvalý stav $s \in S$ je nulový, jestliže střední délka doby návratu do stavu s je $+\infty$.

Definice 27 *Řekneme, že homogenní Markovův řetězec $(X_n, n \in \mathcal{N})$ s nejvýše spočetně stavy S je nerozložitelný, jestliže je každý jeho stav dosažitelný po konečně mnoha krocích z každého jiného stavu.*

Lemma 4 *V nerozložitelném Markovově řetězci s nejvýše spočetně stavy jsou všechny stavy stejného druhu.*

Věta 53 *Když $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je homogenní nerozložitelný Markovův řetězec s konečnou množinou stavů S, pak existuje jednoznačně určené stacionární rozdělení π a platí $\pi_s > 0$ pro každé $s \in S$.*

Věta 54 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je homogenní nerozložitelný Markovův řetězec se spočetnou množinou stavů $S = \{s_i : i \in \mathcal{N}\}$. Když*

$$\lim_{k \to +\infty} \max_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j=k}^{+\infty} p(s_i, s_j) = 0 \ ,$$

potom existuje jednoznačně určené stacionární rozdělení π a platí $\pi_s > 0$ pro každé $s \in S$.

Věta 55 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je homogenní nerozložitelný Markovův řetězec s nejvýše spočetnou množinou stavů S a s maticí pravděpodobností přechodu*

$P = (p(i,j))_{i,j\in S}$. Jsou-li všechny stavy trvalé nenulové, pak existuje jednoznačně určené stacionární rozdělení π a platí $\pi_s > 0$ pro každé $s \in S$, a pro každou omezenou funkci $f : S^k \to \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{N}$ platí

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, X_{i+1}, ..., X_{i+k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \sum_{t\in S^k} f(t)\pi_{t_1} p(t_1,t_2)\cdot\ldots\cdot p(t_{k-1},t_k) \ ,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var} f(X_i, X_{i+1}, ..., X_{i+k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2 \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \Big(f(X_i, X_{i+1}, ..., X_{i+k-1}) - \mathrm{E} f(X_i, X_{i+1}, ..., X_{i+k-1})\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} Z \ ,$$

kde $\mathcal{L}(Z) = N(0,\sigma^2)$.

Pro případ $k = 1$ a $f(t) = I_{[t=s]}$ kde $s \in S$ je věta s důkazem uvedena v [21].

12 Quasi-ortonormální posloupnosti

Věta 56 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je posloupnost r.n.v., $X_n \in L_2$ pro každé $n \in \mathcal{N}$ a $q : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{R}_+$ je funkce taková, že $\sum_{k=0}^{+\infty} q(k) < +\infty$. Jestliže je splněno*

1. *Pro každé $i, j \in \mathcal{N}$ $\mathrm{cov}(X_i, X_j) \le q(|i-j|)\sqrt{\mathrm{Var} X_i}\sqrt{\mathrm{Var} X_j}$.*

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log^2 n\right) \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$,

potom je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (X_n - \mathrm{E}X_n)$ sčítatelná s.j.

Větu nalezneme s důkazem ve [23], corollary 2.4.1, str. 28.

Věta 57 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je posloupnost r.n.v., $X_n \in L_2$ pro každé $n \in \mathcal{N}$, $0 < b_1 \le b_2 \le \ldots$, $b_n \to +\infty$ a $q : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{R}_+$ je funkce taková, že $\sum_{k=0}^{+\infty} q(k) < +\infty$. Jestliže je splněno*

1. *Pro každé $i, j \in \mathcal{N}$ $\mathrm{cov}(X_i, X_j) \le q(|i-j|)\sqrt{\mathrm{Var} X_i}\sqrt{\mathrm{Var} X_j}$.*

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log^2 n\right) \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{b_n^2} < +\infty$,

potom

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathrm{E}X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j} 0 \ .$$

Větu nalezneme s důkazem ve [23], věta 3.7.2., str. 202.

13 Höffdingova dekompozice

Při vyšetřování asymptotických vlastností U-statistik se využívá limitní věty založených na Höffdingově dekompozici.

Definice 28 *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je posloupnost r.n.v. a $(Y_n, n \in \mathcal{N})$ jsou posloupnosti nezávislých r.n.v. Označme $\mathcal{F}_I = \sigma(Y_i, i \in I)$ pro každou $I \subset \mathcal{N}$ konečnou. Řekneme, že kolekce r.n.v. $(W_{I,n}, I \subset \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathcal{N})$ je Höffdingova dekompozice posloupnosti $(X_n, n \in \mathcal{N})$ vzhledem k $(Y_n, n \in \mathcal{N})$, když platí:*

1. $X_n = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} W_{I,n}$;
2. $W_{I,n}$ *je* $\mathcal{F}_I$*-měřitelná pro každé* $I \subset \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathcal{N}$;
3. $\mathrm{E}[W_{I,n}/ \mathcal{F}_J] = 0$, *kdykoli* $I \cap J \neq I$, $n \in \mathcal{N}$.

Poznamenejme, že nutně X_n je $\mathcal{F}_{\{1,\dots,n\}}$-měřitelná pro každé $n \in \mathcal{N}$.

Věta 58 *Nechť $(W_{I,n}, I \subset \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathcal{N})$ je Höffdingova dekompozice posloupnosti $(X_n, n \in \mathcal{N})$ vzhledem k posloupnosti nezávislých r.n.v. $(Y_n, n \in \mathcal{N})$ a $d \in \mathcal{N}$.*

$$\textit{Označme} \quad W(n;d) = \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,n\} \\ \mathrm{card}\,(I) = d}} W_{I,n} \quad \textit{pro všechna} \quad n \in \mathcal{N}\ .$$

$$\textit{Když} \quad \max_{i \in \mathcal{N}} \sum_{I \ni i} \mathrm{Var} W_{I,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\ , \quad \mathrm{Var} W(n;d) = 1 \quad \textit{pro každé } n \in \mathcal{N}$$

a $\mathrm{E}W(n;d)^4 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$, *potom*

$$W(n;d) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} W\ , \quad \mathcal{L}(W) = N(0,1)\ .$$

Větu nalezneme s důkazem v článku [8]. Větu lze dokonce obrátit.

Věta 59 *Nechť $(W_{I,n}, I \subset \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathcal{N})$ je Höffdingova dekompozice posloupnosti $(X_n, n \in \mathcal{N})$ vzhledem k posloupnosti nezávislých r.n.v. $(Y_n, n \in \mathcal{N})$ a $d \in \mathcal{N}$.*

$$\textit{Označme} \quad W(n;d) = \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,n\} \\ \mathrm{card}\,(I) = d}} W_{I,n} \quad \textit{pro všechna} \quad n \in \mathcal{N}\ .$$

Když $\max_{i \in \mathcal{N}} \sum_{I \ni i} \mathrm{Var} W_{I,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\mathrm{Var} W(n;d) = 1$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$

a ještě $\sup \left\{ \frac{\mathrm{E} W_{I,n}^4}{(\mathrm{Var} W_{I,n})^2} : I \subset \mathcal{N}, \mathrm{card}\,(I) < +\infty, n \in \mathcal{N} \right\} < +\infty$,

potom

$$\mathrm{E} W(n;d)^4 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3 \iff W(n;d) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} W \ , \ \mathcal{L}(W) = N(0,1) \ .$$

Tento výsledek by měl být ukázán v [10]. Speciálním případem věty 58 je věta v [9].

Věta 60 *Nechť* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *jsou nezávislé r.n.v. a* $w_{i,j,n} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ *jsou borelovské funkce pro každé* $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, $n \in \mathcal{N}$. *Označme* $\sigma_{i,j,n}^2 = \mathrm{Var} w_{i,j,n}(X_i, X_j)$ *a* $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{i,j,n}^2$. *Předpokládejme, že platí*

1. $0 < \sigma_n < +\infty$ *pro každé* $n \in \mathcal{N}$,
2. $\mathrm{E}[w_{i,j,n}(X_i, X_j)/\, X_i] = 0$ *s.j. pro každé* $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, $n \in \mathcal{N}$,
3. $\frac{1}{\sigma_n^2} \max \left\{ \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{i,j,n}^2 : i = 1, 2, \ldots, n-1 \right\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,
4. $\frac{1}{\sigma_n^4} \mathrm{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{i,j,n}(X_i, X_j) \right)^4 \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$.

Potom

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{i,j,n}(X_i, X_j) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} W \ , \ \mathcal{L}(W) = N(0,1) \ .$$

14 Jiné věty

Pro jiné posloupnosti jsem našel věty.

Věta 61 *Když pro posloupnost r.n.v.* $(X_n, n \in \mathcal{N})$ *platí*

$$\mathrm{Var} X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ , \quad \textit{potom} \quad X_n - \mathrm{E} X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0 \ .$$

Věta 62 (Poisson) *Nechť* $X_n, n \in \mathcal{N}$ *je posloupnost r.n.v. s binomickým rozdělením* $\mathcal{L}(X_n) = Bi(n, p_n)$. *Když* $np_n \to \lambda$ *pro nějaké* $0 < \lambda < +\infty$, *pak* $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} X$, $\mathcal{L}(X) = Po(\lambda)$, *kde* $Po(\lambda)$ *označuje Poissonovo rozdělení s parametrem* λ.

References

[1] G. Alexitz. *Convergence Problems of Orthogonal Series.* Pergamon, Oxford, 1961.

[2] A. Adler and A. Rosalsky. An extension of the Hong–Park version of the Chow–Robbins theorem on sums of nonintegrable random variables. *J. Korean Math. Soc.*, 32,2:363–370, 1995.

[3] A. Adler and A. Rosalsky. On the norming constants in the Feller-Khintchine-Lévy central limit theorem. *Calcutta Statist. Assoc. Bull*, 41:161–164, 1991.

[4] P. Hall and C.C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application.* Academic Press, New York, 1980.

[5] T. Mori and K. Yoshihara. A note on the central limit theorem for stationary mixing sequences. *Yokohama Math. J.*, 34:143–146, 1986.

[6] C.G. Esseen and S. Janson. On moment conditions for normed sums of independent random variables and martingale differencies. *Stoch. Proc. Appl.*, 19:173–182, 1985.

[7] P. Billingsley. The Lindeberg–Lévy theorem for martingals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:788–792, 1961.

[8] P. de Jong. A central limit theorem for generalized multilinear forms. *Journal of Multivariate Analysis*, 34:275–289, 1990.

[9] P. de Jong. A central limit theorem for generalized quadratic forms. *Probab. Th. Rel. Fields*, 75:261–277, 1987.

[10] P. de Jong. Central limit theorems for generalized multilinear forms. *CWI*, Tract 61, 1989.

[11] M. Denker. Uniform integrability and the clt for strongly mixing sequences. In *Dependence in Probability and Statistics (ed. E. Eberlein and M.S. Taqqu)*, pages 169–174, Boston, Basel, Studgart, 1986. Birkhäuser.

[12] G.K. Eagleson. On Gordin's central limit theorem for stationary processes. *J. Appl. Probability*, 12:176–179, 1975.

[13] M.I. Gordin. Abstracts of communications, i.1:. *A-K. International conference on probability theory (Vilnius)*, 1973.

[14] M.I. Gordin. The central limit theorem for stationary processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 188:739–741, 1969.

[15] C.C. Heyde. On the central limit theorem for stationary processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 30:315–320, 1974.

[16] D.H. Hong. A remerk on the C.L.T. for sums of pairwise i.i.d. random variables. *Math. Japonica*, 42,1:87–89, 1995.

[17] K.L. Chung. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, New York, 1974.

[18] I.A. Ibragimov. A central limit theorem for a class of dependent random variables. *Theory Probab. Appl.*, 8:83–89, 1963.

[19] P. Lachout. A martingale central limit theorem. *Comm. Mathem. Univ. Carolinae*, 27:371–375, 1986.

[20] D.L. McLeish. Invariance principles for dependent variables. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 32:165–178, 1975.

[21] S.I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[22] J. Štěpán. *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha, 1987.

[23] W.F. Stout. *Almost Sure Convergence.* Academic Press, New York, 1974.

[24] D. Volný. Approximating martingales and the central limit theorem for strictly stationary processes. *Stochastic Process. Appl.*, 44:41–74, 1993.

[25] D. Volný. Approximation of stationary processes and the central limit theorem. In *Lecture Notes on Mathematics 1299 (S. Watanabe and Yu. Prokhorov: Probability Theory and Mathematical Statistics)*, pages 532–540. Springer, 1986.

[26] D. Volný. A central limit theorem for non stationary mixing processes. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 30,2:405–407, 1989.

[27] D. Volný. On non–ergodic versions of limit theorems. *Apl. Mat.*, 34:351–363, 1989.

[28] K.I. Yoshihara. *Weakly Dependent Stochastic Sequences and Their Applications.* Sanseido Co., Tokyo, 1992.