JEDEN MULTIVARIÁTNÍ LINEÁRNÍ MODEL S RUŠIVÝMI PARAMETRY

Pavla KUNDEROVÁ

PřF UP, KMA

Abstract: The characterization for class of functions of useful parameters which are estimable under the model with nuisance parameters and under the model, where the nuisance parameters are neglected and estimators of which have the same variance in both mentioned models, is given in the paper.

Резюме: В статье установленно такое семейство функций полезных параметров, оценки которых несмещенны как в модели с мешающими параметрами, так и в модели, в которой не предполагаются мешающие параметры и оценки которых в обоих моделях имеют одинаковые дисперсии.

1. Úvod

Uvažujme multivariátní lineární model

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}(\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)}) + \varepsilon,$$

kde $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}^{(1)}, \ldots, \mathrm{Y}^{(m)})$ je matice pozorování, X matice plánu a $(\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)})$ matice neznámých parametrů.

V deformačních měřeních s proměnnými parametry se setkáváme s tzv. modelem růstových křivek (growth–curve model), viz lit.[2], str.96, v němž se předpokládá, že i-tá složka $\beta^{(j)}$ (v j-té epoše měření, tj. v čase t_j), má tvar

$$\beta_i(t_j) = b_{i,1} + b_{i,2}\varphi_1(t_j) + \cdots + b_{i,l}\varphi_{l-1}(t_j),$$

kde $\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_{l-1}(\cdot)$ jsou známé lineárně nezávislé funkce definované na R^1 s vlastností

$$\varphi_r(t_1) = 0,\ r = 1, \ldots, l-1.$$

Observační matici Y lze potom vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{Y}_{n,m} = \mathrm{X}_{n,k}\mathrm{B}_{k,l}\mathrm{Z}_{l,m} + \varepsilon, \tag{1}$$

kde

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{k,1}, & b_{k,2}, & \ldots, & b_{k,l} \end{pmatrix}$$

a

$$Z = \left(\begin{array}{cccc} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \varphi_1(t_1), & \varphi_1(t_2), & \dots, & \varphi_1(t_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{l-1}(t_1), & \varphi_{l-1}(t_2), & \dots, & \varphi_{l-1}(t_m) \end{array} \right).$$

Uvažujme situaci, kdy je matice B v (1) rozdělena do dvou bloků:
blok B_1 tzv. užitečných parametrů, které (nebo jejich funkce) mají být odhadnuty z matice pozorování Y,
blok B_2 tzv. rušivých parametrů, tj. situaci

$$Y = X(B_1, B_2) \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array} \right) + \varepsilon. \tag{2}$$

Cílem tohoto článku je (při respektování struktury modelu (2)) určit třídu takových funkcí užitečných parametrů, jejichž odhad určený při zanedbání rušivých parametrů zůstává nestranný i v úplném modelu. Analogicky požadujeme, aby rozptyl odhadu funkce z uvažované třídy byl stejný jak v modelu s rušivými parametry tak v modelu, kde jsou rušivé parametry zanedbány. Určení třídy funkcí užitečných parametrů s uvedenými vlastnostmi má velký význam pro praxi, protože počet rušivých parametrů v reálných situacích může být řádově větší než počet užitečných parametrů. V souladu s prací [1] označme tuto třídu symbolem $\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma)$.

Nechť R^n označuje prostor všech n-rozměrných reálných vektorů, u_p a $A_{m,n}$ označuje reálný sloupcový p-rozměrný vektor a reálnou matici rozměru $m \times n$. Symboly $A', \mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A), r(A)$ označují transpozici, prostor vytvořený nad sloupci matice A, nulový prostor a hodnost matice A. Dále $vec(A)$ označuje sloupcový vektor $(\{A\}'_{\cdot 1}, \dots, \{A\}'_{\cdot n})'$ vytvořený ze sloupců matice A. Symbol $A \otimes B$ označuje Kroneckerův (tenzorový) součin matic A,B. Symbol A^- označuje libovolnou pseudoinverzní (g–inverzní) matici k matici A, P_A resp. Q_A označuje ortogonální projektor na $\mathcal{R}(A)$ resp. na $\mathcal{R}^{\perp}(A)$ [$\mathcal{R}^{\perp}(A)$ označuje prostor všech vektorů kolmých k $\mathcal{R}(A)$], $A^{\perp}$ označuje libovolnou matici, pro kterou $\mathcal{R}^{\perp}(A) = \mathcal{R}(A^{\perp})$.

2. Poznámky a pomocná tvrzení.

Uvažujme model (2)

$$Y_{n,m} = X_{n,k}(B_1, B_2) \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array} \right) + \varepsilon.$$

kde B_1 je matice typu $k \times r$, B_2 matice typu $k \times s$, Z_1 matice typu $r \times m$, Z_2 matice typu $s \times m$.

X, Z_1, Z_2 jsou známé nenulové matice libovolné hodnosti.

Předpokládáme, že pro sloupce observační matice Y platí

$$cov(\mathrm{Y}^{(i)}, \mathrm{Y}^{(j)}) = \mathrm{O}, \forall i \neq j, \quad var(\mathrm{Y}^{(j)}) = \Sigma, \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

kde Σ je nejméně pozitivně semidefinitní.

Lema 1
Model (2) lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$vec(\mathrm{Y}) = [\mathrm{Z}_1' \otimes \mathrm{X}, \mathrm{Z}_2' \otimes \mathrm{X}] \begin{pmatrix} vec(\mathrm{B}_1) \\ vec(\mathrm{B}_2) \end{pmatrix} + vec(\varepsilon). \tag{3}$$

Důkaz: výpočtem. $\square$

Pro varianční matici $vec(\mathrm{Y})$ platí

$$var[vec(\mathrm{Y})] = \mathrm{I}_{m,m} \otimes \Sigma_{n,n}.$$

Ve shodě s článkem [1] budeme studovat lineární model s rušivými parametry

$$\mathcal{M}_a(\mathrm{I} \otimes \Sigma) = \left[vec(\mathrm{Y}), (\mathrm{Z}_1' \otimes \mathrm{X}, \mathrm{Z}_2' \otimes \mathrm{X}) \begin{pmatrix} vec(\mathrm{B}_1) \\ vec(\mathrm{B}_2) \end{pmatrix}, \mathrm{I} \otimes \Sigma \right], \tag{4}$$

a lineární model bez rušivých parametrů

$$\mathcal{M}(\mathrm{I} \otimes \Sigma) = \left[vec(\mathrm{Y}), (\mathrm{Z}_1' \otimes \mathrm{X}) vec(\mathrm{B}_1), \mathrm{I} \otimes \Sigma \right]. \tag{5}$$

Budeme předpokládat, že je splněna podmínka

$$\mathcal{R}(\mathrm{Z}_1' \otimes \mathrm{X}, \mathrm{Z}_2' \otimes \mathrm{X}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \Sigma). \tag{6}$$

Tato podmínka je ekvivalentní požadavku

$$\mathcal{R}(\mathrm{X}) \subset \mathcal{R}(\Sigma), \tag{7}$$

a zaručuje, že

$$\mathrm{P}\left[vec(\mathrm{Y}) \in \mathcal{R}(\mathrm{I} \otimes \Sigma) \right] = 1.$$

Označení
Označme (ve shodě s článkem [1]) $\mathcal{E}_a$ resp. $\mathcal{E}$ třídu všech lineárních funkcionálů vektoru $vec(\mathrm{B}_1)$, které jsou odhadnutelné v modelu $\mathcal{M}_a$ resp. v modelu $\mathcal{M}$.
(Index a v dalším textu tedy značí, že odhad je uvažován v úplném modelu $\mathcal{M}_a$ s rušivými parametry.)

Zřejmě

$$\mathcal{E} = \{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) : \mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}')\}. \tag{8}$$

Poznámka 1
$\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1', \dots, \mathrm{p}_r')'$, kde p_j jsou k-rozměrné vektory, $j = 1, \dots, r$. Označíme-li $\mathrm{P}' = (\mathrm{p}_1, \dots, p_r)$, lze psát $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) = Tr(\mathrm{PB}_1)$.

Z vyjádření třídy $\mathcal{E}$ vyplývají následující ekvivalence

$$\mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}') \Leftrightarrow \exists \mathrm{A}_{m,n},\ \mathrm{p} = (\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}')vec(\mathrm{A}') \Leftrightarrow \exists \mathrm{A}_{m,n},\ \mathrm{P} = \mathrm{Z}_1\mathrm{AX}.$$

Věnujme se třídě

$$\mathcal{E}_a = \{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) : \mathrm{p} \in R^{kr}, \exists \mathrm{L} \in R^{nm}, \forall vec(\mathrm{B}_1) \in R^{kr},$$
$$\forall vec(\mathrm{B}_2) \in R^{ks}, \quad E_{vec(B)}\left[\mathrm{L}'vec(\mathrm{Y})\right] = \mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1)\}.$$

Požadovaná rovnost je $\forall vec(\mathrm{B}_1), vec(\mathrm{B}_2)$ splněna právě tehdy, když

$$\mathrm{p} = (\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}')\mathrm{L} \quad \wedge \quad (\mathrm{Z}_2 \otimes \mathrm{X}')\mathrm{L} = 0,$$

což je ekvivalentní vztahu

$$\mathrm{p} = (\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}')\mathrm{Q}_{Z_2' \otimes X}\mathrm{u}, \quad \forall \mathrm{u} \in R^{mn}.$$

Po úpravě dostaneme výsledek

$$\mathcal{E}_a = \{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) : \mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}')\}. \tag{9}$$

Poznámka 2
Užitím matice P lze psát

$$\mathrm{p} \in \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}') \Leftrightarrow \exists \mathrm{A} \text{ taková, že } \quad \mathrm{P} = \mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{AX}.$$

Ze vztahů (8),(9) plyne, že

$$\mathcal{E}_a \subset \mathcal{E}.$$

Navíc platí

Lema 2

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E} \ \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1' \otimes \mathrm{X}) \cap \mathcal{R}(\mathrm{Z}_2' \otimes \mathrm{X}) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1') \cap \mathcal{R}(\mathrm{Z}_2') = \{0\}. \tag{10}$$

Důkaz:

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}') = \mathcal{R}(Z_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}') \Leftrightarrow 0 = r(\mathrm{Z}_1 \otimes \mathrm{X}') - r(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}')$$

$$= dim[\mathcal{R}(Z_1' \otimes X) \cap \mathcal{R}^{\perp}(I - P_{Z_2'} \otimes P_X)] = dim[\mathcal{R}(Z_1' \otimes X) \cap \mathcal{R}(Z_2' \otimes X)],$$

kde jsme užili rovnost (viz [1], Corollary 3.2)

$$r(A) - r(AB) = dim[\mathcal{R}(A') \cap \mathcal{R}^{\perp}(B)].$$

Druhá dokazovaná ekvivalence plyne z předchozích úvah s užitím toho, že platí $r(A \otimes B) = r(A)r(B)$. $\square$

V dalším budeme předpokládat

$$\mathcal{R}(Z_1' \otimes X) \not\subset \mathcal{R}(Z_2' \otimes X).$$

Kdyby totiž platilo $\mathcal{R}(Z_1' \otimes X) \subset \mathcal{R}(Z_2' \otimes X)$, potom by bylo $\mathcal{R}(Z_1 Q_{Z_2'} \otimes X') = \{0\}$.

Označme $p'\widehat{vec(B_1)}$ resp. $p'\widehat{vec(B_1)}_a$ BLUEs funkcí $p'vec(B_1)$ v modelu $\mathcal{M}(I \otimes \Sigma)$ resp. v modelu $\mathcal{M}_a(I \otimes \Sigma)$.

Lema 3

$$p'\widehat{vec(B_1)} = p' \left[(Z_1 Z_1')^- Z_1 \otimes (X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^-\right] vec(Y), \text{ je-li } p'vec(B_1) \in \mathcal{E}, \tag{11}$$

$$p'\widehat{vec(B_1)}_a = p' \left[(Z_1 Q_{Z_2'} Z_1')^- Z_1 Q_{Z_2'} \otimes (X\Sigma^- X')^- X'\Sigma^-\right] vec(Y), \tag{12}$$

$$\text{je-li } p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a,$$

$$var[p'\widehat{vec}(B_1)] = p' \left[(Z_1 Z_1')^- \otimes (X'\Sigma^- X)^-\right] p, \text{ je-li } p'vec(B_1) \in \mathcal{E}, \tag{13}$$

$$var[p'\widehat{vec}(B_1)_a] = p' \left[(Z_1 Q_{Z_2'} Z_1')^- \otimes (X'\Sigma^- X)^-\right] p, \text{ je-li } p'vec(B_1) \in \mathcal{E}_a. \tag{14}$$

Důkaz: v modelu $\mathcal{M}_a$ je jednou z verzí odhadu

$$\begin{pmatrix} \widehat{vec(B_1)}_a \\ \widehat{vec(B_2)}_a \end{pmatrix}$$

$$= [(Z_1' \otimes X, Z_2' \otimes X)'(I \otimes \Sigma)^-(Z_1' \otimes X, Z_2' \otimes X)]^- \begin{pmatrix} Z_1 \otimes X' \\ Z_2 \otimes X' \end{pmatrix} (I \otimes \Sigma)^- vec(Y)$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1Z_1' \otimes X'\Sigma^- X, & Z_1Z_2' \otimes X'\Sigma^- X \\ Z_2Z_1' \otimes X'\Sigma^- X, & Z_2Z_2' \otimes X'\Sigma^- X \end{bmatrix}^- \begin{pmatrix} Z_1 \otimes X'\Sigma^- \\ Z_2 \otimes X'\Sigma^- \end{pmatrix} vec(Y)$$

$$= \begin{bmatrix} U \otimes W, & -[UZ_1Z_2'(Z_2Z_2')^- \otimes W] \\ -[(Z_2Z_2')^- Z_2Z_1'U \otimes W], & (Z_2Z_2')^-[I + Z_2Z_1'UZ_1Z_2'(Z_2Z_2')^-] \otimes W \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} Z_1 \otimes X'\Sigma^- \\ Z_2 \otimes X'\Sigma^- \end{pmatrix} vec(Y),$$

kde $U = (Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^-$, $W = (X'\Sigma^- X)^-$. (Užili jsme Rohdeho formuli pro g-inverzi blokové matice). Potom

$$vec\widehat{(B_1)}_a = [(Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^- Z_1Q_{Z_2'} \otimes (X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^-]vec(Y).$$

$$\begin{aligned} Tr\widehat{(PB_1)}_a = p'vec\widehat{(B_1)}_a &= p'\{vec[(X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^- YQ_{Z_2'}Z_1'(Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^-]\} \\ &= Tr[P(X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^- YQ_{Z_2'}Z_1'(Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^-]. \end{aligned}$$

Důkaz zbývajících tvrzení je zřejmý. □

Poznámka 3
Tvrzení lematu 3 je možno zapsat také v následujícím tvaru

$$Tr\widehat{(PB_1)} = Tr\left[P(X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^- YZ_1'(Z_1Z_1')^-\right], \text{ je-li } Tr(PB_1) \in \mathcal{E}, \quad (15)$$

$$Tr\widehat{(PB_1)}_a = Tr[P(X'\Sigma^- X)^- X'\Sigma^- YQ_{Z_2'}Z_1'(Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^-], \quad (16)$$

je-li $Tr(PB_1) \in \mathcal{E}_a$,

$$var[\widehat{Tr(}PB_1)] = Tr[P(X'\Sigma^- X)^- P'(Z_1Z_1')^-], \text{ je-li } Tr(PB_1) \in \mathcal{E}, \quad (17)$$

$$var[\widehat{Tr(}PB_1')_a] = Tr[P(X'\Sigma^- X)^- P'(Z_1Q_{Z_2'}Z_1')^-], \text{ je-li } Tr(PB_1) \in \mathcal{E}_a. \quad (18)$$

3. Určení třídy $\mathcal{E}_0(\mathbf{I} \otimes \Sigma)$

Jak již bylo v úvodu řečeno, označíme symbolem $\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma)$ takovou podtřídu třídy $\mathcal{E}_a$, která obsahuje všechny ty lineární funkcionály $p'vec(B_1)$, jejichž BLUE za platnosti modelu $\mathcal{M}_a(I \otimes \Sigma)$ má stejný rozptyl jako BLUE za platnosti modelu $\mathcal{M}(I \otimes \Sigma)$, tj.

$$\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) = \{Tr(PB_1) \in \mathcal{E}_a : var[Tr\widehat{(PB_1)}] = var[Tr\widehat{(PB_1)}_a]\}.$$

Vyšetřme, kdy platí rovnost

$$var[\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}] = var[\mathrm{p}'\widehat{vec(\mathrm{B}_1)}_a] \quad \text{pro} \quad \mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a.$$

Ze vztahu (9) víme, že podmínka $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a$ je ekvivalentní s tím, že $\mathrm{p} = (\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}')\mathrm{u}_0$ pro nějaký vektor $\mathrm{u}_0 \in R^{mn}$. Rovnost výrazů (17) a (18) za této podmínky znamená, že

$$\mathrm{u}_0'[\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1'(\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1')^-\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}(\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}']\mathrm{u}_0$$
$$= \mathrm{u}_0'[\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1'(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1')^-\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'} \otimes \mathrm{X}(\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}']\mathrm{u}_0,$$

tj. po úpravě

$$\mathrm{u}_0'\{(\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1'[(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1')^- - (\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1')^-]\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}) \otimes \mathrm{X}(\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})^-\mathrm{X}'\}\mathrm{u}_0 = 0. \quad (19)$$

Věnujme se matici, která stojí v tenzorovém součinu nalevo.

Užijeme-li následující tvrzení

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}', & \mathrm{C} \end{pmatrix} \ \text{p.s.d} \ \Rightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{C}^-\mathrm{B}')^- = \mathrm{A}^- + \mathrm{A}^-\mathrm{B}(\mathrm{C} - \mathrm{B}'\mathrm{A}^-\mathrm{B})^-\mathrm{B}'\mathrm{A}^-,$$

na matici

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1', & \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2' \\ \mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_1', & \mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_2' \end{pmatrix},$$

dostaneme

$$(\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{Z}_1')^- = (\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1' - \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2'(\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_2')^-\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_1')^-$$

$$= (\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1')^- + (\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1')^-\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2'(\mathrm{Z}_2\mathrm{Q}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2')^-\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_1'(\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1')^-.$$

Výraz (19) má potom tvar

$$\mathrm{u}_0'\left\{\left[\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2'(\mathrm{Z}_2\mathrm{Q}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2')^-\mathrm{Z}_2\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Q}_{Z_2'}\right] \otimes \left[\mathrm{X}(\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\right]\right\}\mathrm{u}_0 = 0,$$

Protože matice $\mathrm{Z}_2\mathrm{Q}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2'$ je pozitivně semidefinitní, lze matici $(\mathrm{Z}_2\mathrm{Q}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2')^-$ zvolit pozitivně definitní, tj. ve tvaru $\mathrm{J}\mathrm{J}'$, kde J je regulární. Z předpokladu (7) vyplývá, že také matici $(\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})^-$ lze zvolit ve tvaru $\mathrm{K}\mathrm{K}'$, kde K je regulární.
Tedy

$$\mathrm{u}_0'[(\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2'\mathrm{J}\mathrm{J}'\mathrm{Z}_2\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Q}_{Z_2'}) \otimes \mathrm{X}\mathrm{K}\mathrm{K}'\mathrm{X}']\mathrm{u}_0 = 0.$$

To je splněno právě tehdy, je-li

$$\mathrm{X}'\mathrm{U}_0'\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2' = \mathrm{O}, \ \text{kde} \ vec(\mathrm{U}_0') = \mathrm{u}_0. \quad (20)$$

Tím byla dokázána následující věta:

Věta 1
Jestliže $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a$, tj. existuje-li matice U_0 taková, že platí $\mathrm{P} = \mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{U}_0\mathrm{X}$, potom

$$\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{X}'\mathrm{U}_0'\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2' = \mathrm{O}.$$

Důsledek

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2' = \mathrm{O}.$$

Poznámka 4
Tvrzení věty je možno ověřit také aplikací vztahu (2.12), lit.[1] na náš multivariátní případ. Podle tohoto vztahu platí

$$var[\mathrm{p}'\widehat{vec}(\mathrm{B}_1)] = var[\mathrm{p}'\widehat{vec}(\mathrm{B}_1)]_a \quad \text{pro} \quad \mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a, \tag{21}$$

právě tehdy, když

$$\mathrm{u}'Q_{Z_2'\otimes X}(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X})[(\mathrm{Z}_1\otimes\mathrm{X}')(\mathrm{I}\otimes\Sigma^-)(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X})]^-(\mathrm{Z}_1\otimes\mathrm{X}')(\mathrm{I}\otimes\Sigma^-)(\mathrm{Z}_2'\otimes\mathrm{X}) = \mathrm{o}, \tag{22}$$
$$\mathrm{u} \in R^{mn}.$$

Úpravou posledního vztahu, dosazením $\mathrm{Q}_{Z_2'\otimes X} = \mathrm{I}\otimes\mathrm{I} - \mathrm{P}_{Z_2'}\otimes\mathrm{P}_X$, dostaneme následující ekvivalentní podmínku pro splnění rovnosti (21)

$$\mathrm{Q}_{Z_2'}\mathrm{P}_{Z_1'}\mathrm{Z}_2'\otimes\mathrm{X} = \mathrm{O}.$$

Věta 2

$$\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma) = \{Tr(\mathrm{PB}_1) : \mathrm{P} = \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1'\mathrm{Q}_{Z_1Z_2'}\mathrm{AX}'\Sigma^-\mathrm{X} \text{ pro libovolné A}\}.$$

Důkaz: do třídy $\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma)$ patří takové funkce $\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1) \in \mathcal{E}_a$ (tj. funkce, ve kterých podle (9) je p tvaru $\mathrm{p} = (\mathrm{Z}_1\mathrm{Q}_{Z_2'}\otimes\mathrm{X}')\mathrm{u} = (\mathrm{Z}_1\otimes\mathrm{X}')\mathrm{Q}_{Z_2'\otimes X}\mathrm{u}$, $\mathrm{u} \in R^{mn}$), které splňují rovnost (21).
Označme $\mathrm{q} = \mathrm{Q}_{Z_2'\otimes X}\mathrm{u}$, $\mathrm{u} \in R^{mn}$. Ze vztahu (22) dostaneme, že

$$\begin{aligned}\mathrm{q} \perp \mathcal{R}\{&(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X})[(\mathrm{Z}_1\otimes\mathrm{X}')(\mathrm{I}\otimes\Sigma^-)(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X})]^-(\mathrm{Z}_1\otimes\mathrm{X}')(\mathrm{I}\otimes\Sigma^-)(\mathrm{Z}_2'\otimes\mathrm{X})\} \\ &= \mathcal{R}(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X}) \cap \left[\mathcal{R}\{(\mathrm{I}\otimes\Sigma)(\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X})^{\perp}\} + \mathcal{R}(\mathrm{Z}_2'\otimes\mathrm{X})\right].\end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Lemmatu 2.1,[1].
Tedy

$$q \in \left(\mathcal{R}^{\perp}(Z_1' \otimes X) + \left[\mathcal{R}^{\perp}\{(I \otimes \Sigma)(Z_1' \otimes X)^{\perp}\} \cap \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X)\right]\right).$$

Užijeme-li při úpravě výrazu v hranaté závorce následující vztah (viz (2.16), [1])

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(S) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\perp}(SA^{\perp}) = \mathcal{R}(S^{-}A, I - S^{-}S),$$

zjistíme, že

$$\mathcal{N}(I \otimes \Sigma) \subset \left[\mathcal{R}^{\perp}\{(I \otimes \Sigma)(Z_1' \otimes X)^{\perp}\} \cap \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X)\right].$$

Uvědomíme–li si, že $\mathcal{R}^{\perp}(Z_k' \otimes X) \supset \mathcal{N}(I \otimes \Sigma), k \ = 1, 2$, dostaneme tvrzení

$$q \in \Big(\mathcal{R}^{\perp}(Z_1' \otimes X)$$

$$+[\mathcal{N}(I \otimes \Sigma) + (\mathcal{R}^{\perp}\{(I \otimes \Sigma)(Z_1' \otimes X)^{\perp}\} \cap \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X) \cap \mathcal{R}(I \otimes \Sigma))]\Big)$$

$$= \left[\mathcal{R}^{\perp}(Z_1' \otimes X) + \left\{\mathcal{R}^{\perp}\{(I \otimes \Sigma)(Z_1' \otimes X)^{\perp}\} \cap \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X) \cap \mathcal{R}(I \otimes \Sigma)\right\}\right].$$

Ale pro každé $q \in \mathcal{R}^{\perp}(Z_1' \otimes X)$ je $p = (Z_1 \otimes X')q = 0$, tedy

$$\mathcal{E}_0(I \otimes \Sigma) =$$

$$\{p' vec(B_1) : p = (Z_1 \otimes X')q, q \in \mathcal{R}^{\perp}\{(I \otimes \Sigma)(Z_1' \otimes X)^{\perp}\} \cap \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X) \cap \mathcal{R}(I \otimes \Sigma)\} \tag{23}$$

Podle následujícího tvrzení (viz (2.15), [1])

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(S) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(SA^{\perp}) = \mathcal{R}^{\perp}(S^{-}A) \cap \mathcal{R}(S),$$

platí pro vektor q z výrazu (23)

$$q \in \mathcal{R}[(I \otimes \Sigma^{-})(Z_1' \otimes X)] + \mathcal{R}^{\perp}(I \otimes \Sigma).$$

Vzhledem k předpokladu (6) to znamená, že

$$p = (Z_1 \otimes X')q = (Z_1 \otimes X')(I \otimes \Sigma^{-})(Z_1' \otimes X)t, \ t \in R^{kr}.$$

Z podmínky $q \in \mathcal{R}^{\perp}(Z_2' \otimes X)$ dostaneme, že $t \in \mathcal{R}(Q_{Z_1 Z_2' \otimes X'\Sigma^{-}X})$. Odtud plyne, že

$$p = (Z_1 Z_1' \otimes X'\Sigma^{-}X)Q_{Z_1 Z_2' \otimes X'\Sigma^{-}X}u, \ u \in R^{kr}.$$

Tedy

$$\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma)=\{\mathrm{p}'vec(\mathrm{B}_1):$$

$$\mathrm{p}\in\mathcal{R}(\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1'\otimes\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})\mathrm{Q}_{Z_1Z_2'\otimes X'\Sigma^-X}=\mathcal{R}(\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1'\mathrm{Q}_{Z_1Z_2'}\otimes\mathrm{X}'\Sigma^-\mathrm{X})\}.$$

Pomocí matice P zavedené v Poznámce 1 lze psát

$$\mathcal{E}_0(\mathrm{I}\otimes\Sigma)=\{Tr(\mathrm{PB}_1):\mathrm{P}=\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_1'\mathrm{Q}_{Z_1Z_2'}\mathrm{AX}'\Sigma^-\mathrm{X}\text{ pro libovolnou matici A}\}.$$

□

Poděkování
Autorka děkuje Prof. RNDr. Ing. Lubomíru Kubáčkovi, DrSc. za to, že ji seznámil s prací [1].

Literatura

[1] Nordström, K.,Fellman, J.: Characterizations and Dispersion–Matrix Robustness of Efficiently Estimable Parametric Functionals in Linear Models with Nuisance Parameters. Linear algebra and its applications 127 (1990), 341–361.

[2] Kubáček, L.: Statistical modelling of deformation measurements, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXIII, 1(1994), pp. 77–106.