

ABSTRAKTNÍ POJEM ČÍSLA A MĚŘENÍ V HISTORII  
ANEB  
MÁTE U NĚKOHO VROUBEK?

Jan COUFAL  
VŠE, KM

**Abstract:** This article describes the development of numeral recording from the pre-historic times till the Middle Ages. It summarizes the „arrival“ of the decimal system to Europe, especially to Bohemia.

**Резюме:** Эта статья занимается развитием цифрового записи из исторических пор до среднего века. Следует приход десятичной системы в Европу, специально в Чехию.

Člověk je jediný typ samočinného počítače schopný učít se ze zkušeností, který může být produkován v masovém měřítku nezkušenými pracovníky.  
(GORDON TAYLOR)

Podivné místo je svět, ve kterém žijeme. Spojením neznámých činitelů přírody byl vytvořen myslící tvor, člověk, který je schopen se tázat, co znamenají věci kolem něj a jaký je jejich smysl. Jeho tělesné i duševní vlastnosti se neustále mění, stejně jako jeho okolí. Od růžového jitra, ozářeného paprsky vycházejícího slunce, až do pozdního večera, kdy na temném se nebi vytryskávají světla dalekých hvězd, neslyšitelný tok času se nezastaví a nedá ničím zabrzdit. Někdy lině klesí svou cestu mezi břehy života, jindy zase zrychlí svůj tok a šíleným chvatem strhává vše do závrtných hlubin. Je to náš vlastní, osobní čas, kterým žijeme, jenž zabarvuje svérázně každé dění, který se ale nehodí pro nezaujatý pohled na svět.

Každá doba nazírá na minulost svým způsobem a hledá v ní především odpověď na vlastní současné otázky. Vlastně lze říci, že nejen HISTORIA MAGISTRA VITAE<sup>1</sup>, ale také VITA MAGISTRA HISTORIAE<sup>2</sup>. Nové pohledy i cesty jsou opravdu zajímavé a svůdné. Lze říci spolu s *Pekařem*, že jde o úsilí *proniknouti k základním duchovním složkám minula, poznat jejich dynamiku, postihnout vývojové podmínky jejich změn, nástupu i ústupu, rozdíly jejich stylu, svérázu a mentality, a pokusit se v pokud možná jednotné fysiognomii zachytiti zdánlivě tak rozmanitou tvář jejich!* Poznamenejme, že dějiny čtené *post festum* vytvářejí iluze. Umění<sup>3</sup>, ten křehký a půvabný květ lidského

<sup>1</sup>Tj. latinská sentence znamenající *historie učitelka života*.

<sup>2</sup>Latinská parafráze předchozí sentence znamenající *život učitel historie*.

<sup>3</sup>Míníme tím umění v širokém slova smyslu, tj. v původním smyslu latinského slova *ars* (řecky TECHNÉ), které znamená „umění“ (také zkušenost, zručnost, znalost), ve starověku

ducha, okouzující svou mluvou generace po generaci, bylo považováno ještě nedávno za výsadu historického člověka, za vrcholný projev tvůrčích snah, který vyrostl z prostých kořenů pradávne minulosti, aby vykvetl mnohem později. Člověk objevoval postupně umění minulých dob – v renesanci objevil umění antické, později umění tajemného Egypta a nakonec umění mýtické Mezopotámie. Trvalo velmi dlouho, než vzali lidé na vědomí umění, které vytvořil pračlověk.

Každý nový objev pouze odhaluje a potvrzuje předtuchy jedince, každému činu předcházela za všech dob myšlenka. Dějiny jsou však příliš uspěchané, než aby mohly být spravedlivé, dějiny slouží vždy jen úspěchu. Jen čin je proslaví, slavně dovršený čin, ne smělý pokus, který pronásleduje nevole a nevděk. Dějiny oslavují jen dovršitele, ne toho, kdo stojí na počátku, jedině vítěze oblévají září, předbojovníky však uvrhnou v temnotu. Stále znovu se naplňuje nejstarší barbarský zákon lidstva, kdysi platný v krvi a dnes ještě v duchu, onen neúprosný příkaz, který za všech dob požadoval, aby prvorozenci byli obětováni.

Začneme od Adama. Snad každý čtenář považoval při návštěvě nějakého města za svou povinnost podívat se do muzea. Tam mezi jiným viděl ve vitrinách vystavené nádoby, předměty kamenné, kostěné, bronzové a železné – zbraně, nástroje a šperky. S jistým zájmem si prohlédl jejich nejnápadnější tvary, někde si povšiml údaje o nalezišti, někdy také názvu udávajícího nějaké období, nebo dokonce určení doby, z níž nálezy pocházejí. Ale pak šel divák klidně dál, protože více mu vystavené předměty nevypověděly. Jsou to opravdu němí svědkové, kteří jen v citlivých rukou dovedou vyprávět mnoho zajímavého o svých tvůrčích. Jejich jednotlivé hlasy splývají v ukázněný chór, vyprávějící vzrušenou a pohnutou ságu o člověku a jeho cestě do neznámé budoucnosti. Aby tito němí svědkové mohli podat své svědectví, je třeba porozumět jejich řeči. Je třeba je rozdělit a uspořádat, aby místo chaotického výkladu došlo k jasným výpovědím o dobách, o nichž nejsou zápisy. Svědectví zde podává člověk sám a dílo jeho rukou. Je mnoho pramenů, které nenávratně utonuly v přívalu dějin – pověsti a báje, hrdinské zkazky a paměti starců, zvyky a zpěvy, tance a modlitby, stejně jako řeč a slova, která tlumočila myšlenky. Nic z toho nelze získat zpět.

V matematice je fantazie všudypřítomná. Komplexní číslo nebo čtyřrozměrný prostor nikdy nikdo neviděl a neuvidí. Stvořila je fantazie, stejně jako další pojmy. Vždyť i tak jednoduchý objekt matematického zkoumání, jako je např. číslo 5, nezískáme přímo ze smyslů. Můžeme vidět 5 stromů, slyšet 5 skladeb, držet v ruce 5 karet, ale nemůžeme vnímat samotné číslo 5 jako takové, tj. *an sich* řečeno s I. Kantem. Je to „pět prstů bez prstů“<sup>4</sup>.

pojem mnohem širšího rozsahu než dnes; zahrnoval i řemesla a ty z věd, které měly ráz čistě spekulativní (např. lékařství).

<sup>4</sup>Adam Smith se vyjádřil, že názvy čísel – číslovky – jsou výrazem jedné z „nejab-

„První člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dní, udělal pozoruhodný krok v dějinách myšlení. Byl prvním člověkem, který uvažoval o pojmu patřícím do čisté matematiky,” napsal autor jedné z neoriginálnějších filosofických koncepcí našeho století A. N. WHITEHEAD. Rovněž nikdy nikdo nenakreslil kružnici či bod. Všechny geometrické pojmy jsou idealizovány, jsou absolutně dokonalé, proto nereálné. Matematika by bez abstrakce, idealizace a fantazie nikdy neexistovala. Domnívat se, že fantazii potřebuje pouze básník, je hluboký omyl: např. v matematice je fantazie nutná, protože bez ní by nebylo možné objevit mj. diferenciální či integrální počet. Fantazie je kvalita nesmírné ceny.

#### PRVNÍ POČETNÍ POMŮCKY

Podle současného stavu archeologie lze říci, že nejstarší zachovaný předmět, svědčící o schopnosti člověka zaznamenat představu množství či představu počtu kusů, pochází z Moravy. Je to asi 18 cm dlouhá stehenní kost mladého vlka, do které je vyryto 55 hlubokých zářezů, z nichž prvních 25 je uspořádáno do skupin po pěti. Po nich následuje dvakrát tak dlouhý zářez, jímž posloupnost končí. Pak začíná opět dvojnásobně dlouhým zářezem nová posloupnost, která dosahuje třiceti vrubů. Je možné, že jde o záznamy dvou různých osob nebo o záznamy s různým významem. Podobné předměty, zvané *vrubovky*<sup>5</sup>, byly nalezeny i jinde – v Evropě, Asii i Africe. Nejstarší z nich je zatím vrubovka nalezená na našem území. Její vytvoření se datuje do doby 15 až 20 tisíc let před naším letopočtem. Roku 1936 ji našel český archeolog profesor K. Absolon při průzkumu sídliště lovců mamutů ze starší doby kamenné v jeskyni Pekárna u obce Mokré v Moravském krasu<sup>6</sup>. Vrubovky jsou nejstarším a po dlouhá léta jediným dokladem o zárodcích matematického myšlení. Bohužel, jejich svědectví není dodnes vysvětleno a s jistotou neumíme ani přiblížit jejich použití, ani co se jimi počítalo. Jedno z vysvětlení může podat sentence „mít u někoho vroubek”, která znamená mít u někoho dluh, zejména finanční. Počet zářezů zřejmě u pravěkých lovců zaznamenával počet ulovených kusů. Později sloužil k registraci, ale byl také vyjádřením společenské prestiže, protože na vrubovky, které byly zpravidla dřevěné tyčky, na nichž se zářezy (vruby či vroubky) vyznačoval číselný údaj, zpravidla finanční pohledávka.

Samozřejmě metody vytváření zářezů se vyvíjely postupem času. „Modernizované” vrubovky se uplatnily zejména jako doklady o dluzích, zejména

---

*straktnějších myšlenek, které je lidská mysl schopna vytvořit.*” Poznamenejme, že se jich také začalo používat jen pozvolna. V prvních případech měly spíše kvalitativní než kvantitativní charakter a rozlišovaly pouze mezi jedním, dvěma a více. Přitom ve významu „jeden muž” byl důraz kladen spíše na význam „nějaký, určitý muž” než na kvantitativní označení „jeden”.

<sup>5</sup>Tyto předměty se ve starších pramenech nazývají také *počítací hole*.

<sup>6</sup>Jeskyně Pekárna bývá ve starších pramenech uváděna také jako *Kostelík*.

v době, kdy psané znaky pro čísla neexistovaly, záznamy na vrubovkách byly jednoduchou a spolehlivou formou registrace a účetnictví. Proto bylo v některých zemích jejich používání (i způsob vytváření vrubů) právně kodifikované. Jako příklad uveďme anglický systém, který platil v Anglii a jejích koloniích od 12. století až do roku 1826(!). Vrubovky v Anglii (*tallies*) byly podélně naštípnutá dřívka, na které se nejdříve vysekal nebo vyřezal záznam, potom se dřívko rozštěpilo úplně. Tak vznikly dva shodné záznamy – pro věřitele a pro dlužníka. Státní pokladna měla dokonce zvláštního mistra pro tvoření vrubovek a předpisy o jejich rozměrech a tvarech:

*„Záznam 1000 liber šterlinků je vrub široký jako ruka a vyřeže se na horním konci vrubovky. Výřez má být hranatý.*

*Záznam 100 liber šterlinků je široký jako palec, zaoblený, umístěný na dolním konci vrubovky.*

*Záznam 20 liber šterlinků je široký jako malíček, záznam 1 libry jako zrnko ječmene atd.”*

Pak se tyto vrubovky rozštíply na dvě části, jedna z nich sloužila jako doklad pro šerifa a druhá jako kontrolní doklad státní pokladně. Pokud bylo někdy potřeba prokázat zaplacení, stačilo přiložit k sobě oba díly. Shoda řezu a shoda jakosti dřeva vylučovaly jakýkoli podvod. Tento způsob byl tak bezpečný, že jej Anglická banka používala až do 19. století<sup>7</sup>.

Existovala ale matematika a statistika v paleolitu? Můžeme v kultuře paleolitu vyčlenit autonomní oblast myšlení, která by mohla být označena **matematická**? Zdá se, že nemůžeme. Je to podobné situaci, kdybychom zkoumali kybernetiku v renesanci. Renesance měla ke kybernetice velmi daleko, ale paleolit k matematice ještě dále. Na straně druhé, začneme-li zkoumat z historického hlediska myšlenky v kybernetice a budeme-li se ptát, kdy a kde vznikla ta či ona idea, určitě se dostaneme i do renesance, kde např. objevíme zrod myšlenky funkční závislosti. Obdobně pouť k pramenům matematického a statistického myšlení nás nutně zavede do paleolitu.

#### ZROD DESÍTKOVÉ POZIČNÍ SOUSTAVY

Na konci paleolitu (tj. asi před 12 000 lety) v životě člověka začaly probíhat důležité změny. Usazoval se a stával se zemědělcem. Nebezpečný lov vystřídala lopotná, ale jistější a produktivnější práce. To trvalo asi čtyři tisíciletí. Potom bylo vše připraveno k velké neolitické technické revoluci, která se odehrála v povodí Nilu, Eufratu, Tigridu, Indu a dalších velkých řek v době asi 6 000 – 4 000 let před Kristem a stala se základnou staré civilizace. Podle současného stavu historického poznání se první civilizované společnosti objevily koncem 4. tisíciletí před Kristem v dolním úvalu řek Eufrat a Tigris a v deltě a na dolním toku Nilu. Od této technické revoluce až do průmyslové

<sup>7</sup>Ve Francii jej někteří venkovští pekaři používají dodnes.

revoluce v 17. století našeho věku nedošlo v osudech lidí k žádné srovnatelné změně. Původně rovnostářská společnost se rozvrstvila, vznikla účinnější organizace společnosti, která urychlila pokrok ve dvou směrech – umožnila koncentrovat značný pracovní potenciál hlavně na stavbu zavlažovacích soustav a osvobodila od každodenní dřiny skupinu lidí, kteří se mohli věnovat „přemýšlení“. Vznikly podmínky pro rozvoj kultury a přiblížila se doba vzniku písma, snad nejdůležitějšího objevu v dějinách lidstva vůbec. „*Písmo je nejkrásnější, nejduchaplnější a nejpotřebnější vynález lidstva,*“ řekl tvůrce moderního tiskařského písma Bodoni. Zdá se, že téhož názoru byli i Sumerové. Považovali písmo za „dar bohů“, a tak mu podle svých představ přisouvali nejvyšší původ a nejvyšší význam. V rámci této iniciativy se člověk značně zdokonalil i v zaznamenávání počtu a v početních operacích. Staří Sumerové považovali počítání už za lidský vynález. S číselnými znaky se setkáváme na nejstarších sumerských piktografických tabulkách. Šlo o prosté tečky a čárky, z nichž každá označovala jednotku. Na pozdějších tabulkách nacházíme už tyto číselné znaky uspořádané do soustavy, tj. do čísel. Rozbor těchto čísel ukazuje, že Sumerové používali dvou systémů: desetinného a šedesátinného. Kombinace těchto dvou systémů je výrazem neobyčejného důvtipu: umožňuje dělit celá čísla beze zbytku dvěma i třemi. Na babylónských dokumentech zjišťujeme, že už ve 2. století před Kristem se v Mezopotámii používal tzv. *poziční systém*, tj. takový zápis čísel, v němž jedna a tatáž číslice má různou hodnotu podle svého místa v zápisu (např. číslice 1 v pětimístném čísle má na prvním místě hodnotu 10000, na druhém 1000, . . . ). Princip této poziční soustavy, na kterou nepřišli ani Řekové ani Římané, objevili – jak ukazují hospodářské inventáře z Uruku a Nippuru – Sumerové. Pro srovnání – nejstarší egyptský záznam čísla je asi o pět století starší než první pyramida. Pochází asi z roku 3300 před naším letopočtem a oslavuje velikost vojenské kořisti – 120 000 zajatců, 400 000 kusů dobytka, 422 000 koz.

Čtyři základní početní operace ovládá dnes každé dítě. Považujeme to za tak samozřejmé, že si téměř ani neuvědomujeme nutnost je objevit. Dejme tomu, že ke sčítání se nevyžadují zvláštní intelektuální schopnosti. Rozhodně to však nelze říci o násobení a dělení. První lidé, kteří si uvědomili, že sčítání stejných čísel lze vyjádřit jako násobení, byli rovněž Sumerové. Tento vynález doplnili počátkem 3. tisíciletí před Kristem (ne-li dříve) vynálezem dělení.

Jestliže se mohlo zdát překvapující, že písmo vzniklo z hospodářských potřeb člověka a společnosti, pak u vzniku číslic, měr a vah to nemůže být samozřejmé. Vývoj tu přitom postupoval od počítání k měření a od měření k psaní, nikoli opačně. Časově jej lze zařadit zhruba do období mezi dobu, kdy se oddělily pastevecké kmeny od ostatního obyvatelstva, a dobu, kdy se oddělilo řemeslo od zemědělství. U Sumerů měl, jak se zdá, na tento „přechod od negramotnosti ke gramotnosti“ rozhodující vliv jejich objev zemědělství.

Zajímavý byl (z našeho dnešního hlediska) způsob strukturalizace matematických znalostí v Mezopotámii a v Egyptě. Píše-li se dnes učebnice matematiky, řadí se v ní k sobě myšlenky téhož obsahu: kvadratické rovnice, funkce, soustavy lineárních rovnic apod. Starověcí písaři neslučovali matematické znalosti podle jejich vzájemných souvislostí, ale podle potřeb praktických, jimž sloužily. Např. v jednom ze zachovaných papyrů<sup>8</sup> jsou úlohy členěny do 5 skupin takto:

- (i) úlohy pro výpočet objemu sýpek;
- (ii) obsahy polí;
- (iii) pyramidy;
- (iv) objemy tekutin a dělení chlebů;
- (v) krmivo pro zvířata.

Teprve později se začalo toto prakticky zaměřené hledisko teoretizovat. Vznikají první teoretizující myšlenky v prostředí písařských škol. Objevují se úlohy, které nemohl přinést praktický život, tudíž musely vzniknout jedině jako „školské“ úlohy (možná byly zaměřeny ke kontrole jiných výpočtů). Takovou je např. zadání požadující vypočítat rozměry obdélníkového pole, známe-li jeho obsah a rozdíl délek jeho stran. Dále existují klínopisné texty s problémy složitějšího úrokování – taková je třeba otázka *jak dlouho by trvalo, než by se zdvojnásobila jistá částka peněz při 20 % úroku*; problém vede na rovnici

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^x = 2;$$

při jejím řešení se nejprve určilo  $3 < x < 4$ , pak se úloha lineárně interpolovala, tj. v moderním zápisu

$$4 - x = \frac{(1, 2)^4 - 2}{(1, 2)^4 - (1, 2)^3},$$

což vede k hodnotě  $x$  čtyři roky minus (2, 33, 20) měsíce, což znamená při použití naší dnešní symboliky  $x = 4 - \frac{1}{12} \left(2 + \frac{33}{60} + \frac{20}{60^2}\right)$ . Celou orientální matematiku charakterizuje, že nikde v písemných památkách nenacházíme ani náznak důkazu, vždy jde jen o podrobné pokyny, jak řešit příslušnou úlohu, tj. je uveden algoritmus, ale není dokázáno, že tento algoritmus řeší příslušnou třídu úloh.

Orientální matematika vznikla jako praktická věda, aby usnadnila výpočet kalendáře, řízení sklizní, organizaci veřejných staveb a vybírání daní. Zpočátku byla přirozeně věnována pozornost praktické aritmetice a zeměměřičství.

---

<sup>8</sup>Většina našich znalostí o egyptské matematice pramení ze dvou matematických papyrů: je to jednak Rhindův papyrus, obsahující 85 úloh a jednak o dvě století starší takzvaný Moskevský papyrus, který obsahuje 25 úloh. Egyptská matematika se zakládala na desítkovém systému a příznačné pro ni bylo počítání se zlomky na principu převedení zlomků na „kmenové“ zlomky, tj. zlomky s čitatelem rovným 1. Tento způsob výpočtu dal egyptské matematice jistý komplikovaný rys, který jí překážel později v jejím vývoji.

Avšak věda, která byla po staletí pěstována jako zvláštní dovednost, jejíž úkol je nejen v aplikaci, ale i ve vyučování vlastních tajemství, se rozvíjí směrem k abstrakci. Ponenáhle se začne studovat pro sebe samu. Aritmetika se rozvine v algebru nejen proto, že se zlepší praktické výpočty, ale také v důsledku přirozeného naučného vývoje, který byl pěstován v písařských školách. Tytéž důvody dovedly měříčství k počátkům – dále ale určitě ne – geometrie jako matematické disciplíny.

Jedním ze specifických podnětů pro rozvoj algebry kolem roku 2000 před Kristem se zdá být používání starého sumerského písma novými semitskými pány země – Babylóňany. Staré písmo bylo podobně jako hieroglyfy sbírkou pojmových znaků, přičemž každý znak představoval jiný pojem. Semité při fonetické interpretaci používali těchto znaků a přejali některé z nich v jejich původním významu. Tyto znaky vyjadřovaly nyní tytéž pojmy, ale byly vyslovovány odlišným způsobem. Takové pojmové znaky byly pro algebraickou řeč nevhodnější podobně jako dnešní symboly jako např.  $+$ ,  $-$ ,  $:$ ,  $\dots$ , které jsou ve skutečnosti pojmovými znaky. Lze říci, že země mezi proudy Eufratu a Tigridu byla prastarou zemí kultury a civilizace. Sumerové, Akadové, Asyřané a Babyloňané tu přemítali, bojovali, rolničili, navzájem se hubili a navzájem se mísili. Na klínových tabulkách bylo mj. i počítáno. Na rozdíl od Egypta nebyl poslední cíl výpočtů – kromě praktických peněžních věcí (dokonce i přepravního pojištění) – zaměřen na vnější zařízení, ale zde v Babylonu a v celé Mezopotamii byl pohled zaměřen k nebi. Chaldeové byli nejlepšími astronomy tehdy známého světa. Vypočítávali zatmění Slunce i Měsíce, zkoumali a určovali kalendář a vyznali se přesně v úhlech, pod nimiž vycházejí i zapadají souhvězdí i v drahách, jimiž probíhají planety. Provozovali sférickou trigonometrii, měřili úhly na kouli. Rozdělili kruh na 360 stupňů.

#### ABAKUS

Jak jsme uvedli, zřejmě člověk nejprve používal kaménky k vyjádření množství. Později začal kaménky posouvat po zemi. Dalším stupni vývoje byly pro počítání zhotovovány kamenné desky se svisle a vodorovně vyrytými drážkami, v nichž se při výpočtech posouvaly kaménky (latinsky *calculi* – odtud termíny kalkulačka, kalkul nebo kalkulace). Rovnoběžných rýh bylo zpravidla osm. V nich se posouvaly kaménky podle svislých řad, které zprava doleva značily jednotky, desítky, stovky i vyšší řády. Jediná zachovalá pomůcka tohoto druhu ze starověku, zvaná Salaminská deska, pochází ze 3. století před Kristem. Později byl tento *abakus* (z řeckého slova *abakion* – plochá deska) zdokonalen na mechanické počítadlo, které mělo svou technickou i teoretickou stránku, protože čísla byla reprezentována kamennými kuličkami navlečenými na soustavě drátů. Spolu s příslušnými algoritmy umožňoval provádět jednoduché výpočty, které se opírají o čtyři základní početní operace. Násobení bylo převedeno na sčítání a dělení na odčítání.

Počítadla tohoto typu byla nejen školní pomůckou, ale také je používali např. účtující úředníci.

Rovněž ve staré Číně se používaly různé početní pomůcky. Jednou z nich bylo čínské počítadlo či počítací prkénko, tzv. *suan-pchan* (což doslova znamená počítací deska), které bylo podobné abakům nebo ruským „ščetům“ či našim dětským počítadlům. Nejsou žádné přesné doklady, kdy suan-pchan vznikl, ale je známo, že nejpozději v 6. století po Kristu a možná již ve 2. století se používal. Ke konci středověku se suan-pchan rozšířil nejen v Číně, ale i v Japonsku, kde se nazýval *soroban*. I když je Japonsko zemí elektroniky, tak se dosud používá a ve školách vyučuje práce s dědici sorobanů.

A pro změnu docela daleko na západě trvá v tu dobu v nejlepším pořádku americká říše vysoce civilizovaných Mayů, beze vsí spojitosti se vším, co jsme dosud uvedli, se státem, správou, obchodem a kalendářem, majíc dobře vymyšleny číselné soustavy.

Řeční matematici činili rozdíl mezi „aritmetikou“, tj. vědou o číslech (ARITHMOI), a „logistikou“, tj. praktickým počítáním. Termín „ARITHMOS“ znamenal pouze kladné přirozené číslo, veličinu složenou z jednotek (Eukleidés – *Základy*, kniha 7, definice 2; z této definice plyne, že naše přirozené číslo „jedna“ nebylo tehdy považováno za číslo). Náš pojem reálného čísla nebyl znám. Úsečka proto neměla vždy délku. Geometrické úvahy nahrazovaly naše počítání s reálnými čísly. Když chtěl Eukleidés vyjádřit, že obsah plochy trojúhelníka je rovna polovině součinu délky základny a délky výšky, musel říci, že je rovna polovině obsahu plochy obdélníku o téže základně, ležící mezi týmiž rovnoběžkami (Eukleidés – *Základy*, kniha 1, věta 41). Pýthagorova věta vyjadřovala vztah mezi obsahy ploch tří čtverců a nikoli mezi délkami tří stran. Eukleidovy Základy podaly také teorii kvadratických rovnic, která při formulaci problémů užívala obsahů ploch; protože kořeny jsou vyjádřeny jako velikosti úsečky, k nimž se došlo jistými konstrukcemi, lze tvrdit, že jedinými přípustnými kořeny jsou kladné kořeny. V Základech nemusí mít každá úsečka přiřazenu číselnou hodnotu představující její délku. Toto chápání úseček a čísel musíme považovat za dobře uvážené stanovisko, které se opíralo o vítězství Platónových filosofických názorů u té části řecké společnosti, která se zajímala o matematiku, zatímco tehdejší orientální pojetí týkající se vztahu algebry a geometrie nedovolovalo žádné zúžení pojmu „číslo“. Máme dostatečné důvody pro tvrzení, že pro Sumerány a Babylóňany byla Pýthagorova věta číselným vztahem mezi délkami stran a že právě s tímto typem matematiky se iónští matematici seznámili nejdříve.

Obvyklé počtářství známé jako „logistika“ neztratilo během celého vývoje Řecka nic ze své životnosti. Eukleidés je sice zamítl, ale Archimédés a Hérón je obratně a bez jakéhokoli váhání používali. Opíralo se o početní systém, který se během doby měnil. Původní řecká numerace vycházela z aditivního desítkového systému jako u Egyptanů nebo Římanů. V alexandrijském ob-



dobí (a možná i dříve) se objevil způsob zápisu čísel, který byl užíván až do 15. století nejen učenci, ale i obchodníky a správními úředníky. K vyjádření našich symbolů 1, 2, 3, ..., 9, desítek od 10 do 90 a stovek od 100 do 900 se používala písmena řecké abecedy ( $\alpha = 1, \beta = 2, \dots$ ). K 24 písmenům řecké abecedy se přidala tři zvláštní archaická semitská písmena (jinak nepotřebná). Tak bylo dosaženo potřebných 27 symbolů. Tak bylo možné každé číslo systému menší než 1000 zapsat nejvýše třemi symboly, např. 14 jako  $\iota\delta$ , protože  $\iota = 10$  a  $\delta = 4$ ; čísla větší než 1000 se mohla vyjádřit jednoduchým rozšířením systému, protože čísla od 1 do 999 se označovala s čárkou nahoře, tj.  $\alpha' = 1$ , pro tisíce (a výše) se užívalo týchž písmen s čárkou dole, tj.  $\alpha = 1000$ ; např. 338 se přepisovalo  $\overline{\sigma\lambda\eta}$ , 1907 jako  $\alpha \xi'$ . Tento způsob byl výhodný pro písaře, ale nevýhodný pro početní operace i pro vývoj algebry. Tento systém se používá v zachovaných rukopisech Archimédových, Hérónových i dalších klasických pracích. Existuje i archeologický doklad o tom, že se vyučoval i ve školách.

V tomto desítkovém (ale nepozičním) systému mohlo jak  $\delta\iota$ , tak i  $\iota\delta$  znamenat pouze 14. Skutečnost, že tento systém není poziční a má 27 symbolů se uváděla jako doklad jeho méněcennosti. Na straně druhé snadnost, s jakou ho starověcí matematici používali, jeho všeobecné přijetí řeckými obchodníky, uplatnění i při velmi složitých obchodních jednáních a jeho dlouhá životnost – ve východní části římského impéria se zachoval až do jejího rozpadu roku 1453 – ukazuje, že snad měl i své přednosti. Staří Řekové uměli zapisovat ve svém systému i zlomky, např.  $\frac{12}{35}$  se psal  $\iota\beta'\lambda\epsilon$ . Několik výpočtů v tomto systému nás může dostatečně přesvědčit o tom, že zvládneme-li význam symbolů, lze už docela snadno provádět čtyři základní operace. Počítání se zlomky, které měly vlastní symboliku, je rovněž jednoduché. Dlužno říci, že Řekové nebyli důslední, protože jejich systém postrádal jednotnost. Užívali jak egyptské kmenové zlomky, tak babylónské šedesátinné zlomky, tak také zlomky připomínající tvarem náš zápis. V Řecku nebyly nikdy zavedeny desetinné zlomky. Tento velký pokrok se objevuje až v evropské renesanci, kdy početní technika překonala vše, co se používalo ve starověku<sup>9</sup>. Hovořilo se, že alfabertický systém poškodil růst řecké algebry; užívání písmen jako symbolů pro určitá čísla zabránilo prý jejich použití pro označení obecnějších čísel. I když příkládáme značný význam vhodné symbolice, přece musíme odmítnout tyto formální důvody, proč neexistovala řecká algebra před Diofantem. Kdyby se klasičtí autoři zajímali o algebru, byli by vytvořili vhodnou symboliku; její faktické začátky vytvořil vlastně až Diofantos.

---

<sup>9</sup>Ani potom až do 18. a 19. století nebyly desetinné zlomky převzaty do mnohých učebnic.

## VELKÝ PŘÍNOS INDŮ

Potom přišel tak zvaný temný středověk, ale právě v tomto údajném temnu uzrála semena vědění, která měla v pravý čas vzklíčit a rozvinout se v nové, skvělejší formy civilizace. Evropa už nebyla jediným přebujelým, letargickým císařstvím, doléhajícím na vše svou kolosální tíhou, a rozdrobila se na větší počet nezávislých společenství. Pokažené helénství ještě žilo, ztrnulé jako zlatá mozaika, v říši plné úskočnosti, ukrutnosti, rozkošnictví a polovzdělanosti – Byzanci. Řecký kulturní vliv sice dále trval, avšak smíšené kultury řecko-orientální se stabilizovaly v jiných střediscích, např. v Mezopotámii, a svými vlivy pronikaly i na západ říše. Jednotlivé nauky propadaly iracionalismu podporovanému orientálními vlivy – astronomie ustupuje astrologii, v lékařství i jinde se uplatňuje magie. Skonávající helénismus byl představitelem doby, která si libovala v proroctvích, apokalypsách, románech nikoli ve vážných filosofických traktátech, ve sbírkách klepů a ne ve vážných historických dílech. Právě tehdy dochází k největšímu vědeckému a vůbec kulturnímu přínosu národů žijících na území Indie, kterým je poziční způsob zápisu číselné soustavy. Proces vzniku této soustavy byl dlouhý a zdaleka není znám ve všech svých stadiích. V Indii se matematika těšila vždy velké vážnosti. Indové hýřili obrovskými čísly, měli zvláštní slova pro číslice, které hraničí s nepředstavitelnem. V jejich prastarém eposu *Mahabharatam* se hovoří o  $24 \cdot 10^{15}$  bohů a *Gautama Siddhárta*<sup>10</sup> měl prý 600000 milionů synů. Nejstarší poznatky o indické matematice se vztahují k období, v němž vznikaly posvátné náboženské knihy „*Veda*”<sup>11</sup>. Cenným pramenem jsou v tomto ohledu „*Pravidla provazce*”<sup>12</sup>, obsahující geometrické konstrukce a výsledky některých výpočtů. Při určování vzniku tohoto spisu se názory rozcházejí – jedni jej zařazují do doby mezi 15. a 12. stoletím před Kristem, jiní soudí, že byl napsán mezi 8. a 3. stoletím před Kristem, ale většina se přiklání k období mezi 7. a 5. stoletím před Kristem.

Nepočítáme-li „*Pravidla provazce*”, pak nejdůležitější známá díla staré indické matematiky byla sepsána mezi 2. a 16. stoletím po Kristu. Většinou jde o matematické partie astronomických traktátů. Jsou psány v sánskrtu, který byl jazykem indického náboženství i nauky, podobně jako arabština v islámských zemích a latina ve středověké Evropě. Výklad v indických matematických spisech je velmi složitý a často neobsahuje žádné důkazy. Jejich lakoničnost, stejně jako u čínské matematiky, je dovedena až ke krajnosti; nezavěšený čtenář není schopen pochopit uváděná pravidla bez

<sup>10</sup>Myslitel kšatrijského původu a zakladatel náboženství, dnes rozšířeného hlavně ve východní a jihovýchodní Asii, vlastním jménem Gautama (Gótamo) Siddhárta (\* asi 560 před Kristem v Kapilavástu – + asi 480 před Kristem v Kusinaře, podle legendy 13.10.483) syn vládce kmene Šákjů, známější pod jménem BUDDHA, což znamená Osvícený, se začal podle legendy v osmi letech učit psát a poté i počítat, protože to byly nejdůležitější nauky.

<sup>11</sup>česky by šlo přeložit „*Vědomosti*”.

<sup>12</sup>„*Śalvasútra*”

doplňujícího výkladu. Částečně to souvisí s tím, že řada knih e napsána ve verších – pravidla jsou formulována v krátkých slokách, kterým se Indové učili nazpaměť. Přihlédneme-li k přesně stanoveným pravidlům sanskrtské prosodie, je pochopitelné, že v písemném výkladu pravidel byly mezery, které byly občas i závažné. Vyučování bylo většinou, stejně jako všude ve středověku, dogmatické a opíralo se více o paměť než rozumovou úvahu.

Opravdový chvalo zpěv na matematiku pronesl v 9. po Kristu Mahávira: „Počítání je užitečné v každé činnosti související se světskými, vědskými nebo jim podobnými náboženskými záležitostmi. Znalost početní je vysoce ceněna v znalosti lásky, v poznacích o bohatství, o hudbě i dramatu, v kuchařském umění, v lékařství, v architektuře, v prosodii, ve veršotepectví i poezii, v logice a gramatice a v jiných věcech . . . Používá se jí ve spojitosti s pohyby Slunce a jiných nebeských těles, se zatměními a konjunkcemi planet a v souvislosti s hledáním směru, polohy, času a s pohybem Měsíce. Počty, průměry a obvody ostrovů, oceánů a hor, rozměry sídlišť a lidských obydlí, prostory mezi světy, svět světla, svět bohů i svět pekelných živlů a množství nejrůznějších měření – lze uskutečnit jen s pomocí matematiky.“<sup>13</sup>

Nejpozději v 7. století desítková soustava založená na pozičním významu devíti číslic a nuly již existovala, protože o ní pronikají zprávy na západ. První svědectví o indické numeraci nacházíme u syrského učenca *Severa Sébóchta z Nisibis* roku 661. V polemice s lidmi, kteří mají přezíravý vztah k učencům jiných národů, poukazuje na indické „vtipné objevy v astronomii, daleko důmyslnější než objevy Řeků a Babylóňanů“ a na „jejich početní soustavu, pro kterou nenacházíme slov,“ zvláště pro tu, „která používá devíti znaků“. Je sice pravda, že píše jen o devíti znacích, ale možná, že Sébócht znal metody počítání s devíti číslicemi, ve kterých chybějícím řádům odpovídala prázdná místa. Je také možné, že tečku nebo kroužek, který označoval nulu, nepovažoval za číselný znak. Později vyjádření nuly kroužkem vytlačilo tečku a začalo se všeobecně používat. Významný objev nuly, velmi cenný pro rozvoj aritmetiky, pochází tedy z Indie. Sotvakde jinde než v Indii se objevilo tak smysluplné pojetí nicotnosti<sup>14</sup>. Termín „*súnya*“ (tj. prázdnota), který pro nulu používali Indové v sánskrtu, přeložili Arabové jako „*as-sifr*“, tak k nám proniklo slovo *cifra*. Indičtí učenci mají ohromnou zásluhu ve sjednocení vlastních i cizích prvků v jedinou desítkovou poziční soustavu. Právě ona umožnila snad poprvé v pravém slova smyslu dětské ovládnání i velmi složitých početních operací a automatické využívání zkoušek a kontrol, které tkví v samotném systému, že mohly konkurovat počítání na abaku. Koncem 8. století se stal indický číselný zápis známým v centru arabského chalífátu, v Bagdádu. Arabští matematikové rychle ocenili přednosti nové soustavy.

<sup>13</sup>Tato tiráda poněkud připomíná „*chvály aritmetiky*“ v předmluvách aritmetických prací evropských autorů pozdního středověku.

<sup>14</sup>bylo však zásluhou Arabů, že bylo vypracováno k plnému praktickému užití

## EX ORIENTE LUX

Po bouřlivém stěhování národů ukula pojivá síla islámu z dosavadních potulných, nepovšimnutých Nomádů, kteří si někde v poušti za hvězdných nocí vyprávěli pohádky, mocný a vážený kulturní národ. Nepomíjející zásluha Arabů je v tom, že se skutečným zápalem a fanatismem národa, který dochází úspěchu, shromažďuje nejen rukopisné dědictví Helady, ale také novoperské, indické a čínské texty. Zástupy překladatelů převádějí tyto skvosty do arabštiny. V duchu obracecích a rozšiřovacích snah islámu rozvinuli obsáhlé školství. Je snad nejdůležitější rolí islámské civilizace, že předala a rozmnožila lidské vědomosti. Její hlavní příspěvek ke starověkým vědám se týká astronomie, chemie, zeměpisu, matematiky, lékařství, logiky a filosofie. Závažnost vědeckých objevů arabských a poarabštěných učenců pro rozvoj evropské vědy je všeobecně uznávána. Střední Asie spolu s provincií Sindh v ústí řeky Indus byly dvě cesty, kterými do středu islámské kultury přecházely indické myšlenky a hodnoty<sup>15</sup>.

Zvláště za vlády Abbásovců v arabském chalífátu dochází k velkému rozvoji arabské kultury. Druhý chalífa této dynastie (v letech 754 – 775) *Abú Džafar al-Mansúr* (tzn. *Vítězný*) přenesl své sídlo do Bagdádu (762) a připravil podporou přírodních věd a matematiky podmínky pro rozvoj arabské vědy. Bagdád stal prvním velkým naučným střediskem chalífátu. Al-Mansúrův vnuk *Hárún ar-Rašíd* (tzn. *Pravověrný*, chalífa v letech 786 – 809), známý z pohádkových příběhů Tisíce a jedné noci, založil v Bagdádu velkou knihovnu, která se doplňovala řeckými rukopisy až z Byzance. Ar-Rašídův druhý syn *Abdalláh al-Ma'mún* (tzn. *Pravdomluvný*, chalífa v letech 813 – 833) soustředil podle vzoru Ptolemaiovců učence do zvláštní akademie zvané *Bajt al-hikma*, což znamená Dům moudrosti. Kromě bohaté knihovny k němu patřila astronomická observatoř a od roku 832 úřad pro systematické překládání řeckých autorů. Asi od roku 819 vede Dům moudrosti *Abú Abdalláh Muhammad ibn Músa al-Chvárizmí al-Mádžúsí* (\* asi 783 – + asi 850). Přízvisko *al-Chvárizmí* uvádí, že pocházel z východoperské provincie Chvárizm (dnes součást Uzbekistanu). Al-Chvárizmího dílo zasahuje do řady vědních oblastí. Z jeho děl vyjímáme dvě nejvýznamnější:

(1) *Aritmetika* obsahuje výklad indického početního systému (ztratil se arabský originál, ale existuje latinský překlad z 12. století). Al-Chvárizmího kniha seznámila Arábii a později i Evropu s indickou desítkovou pozičním soustavou. Až do 19. století se nevědělo, jak vznikl termín algoritmus, ačkoli se jej běžně používalo. Předpokládalo se, že jde o zkomolení slova logaritmus a rozhodně se uváděla souvislost s řeckým slovem „*arithmos*” (tj. číslo). Teprve v roce 1849 se zjistilo, že jméno al-Chvárizmí se stalo díky latinskému překladu začínajícím slovy „*Dixit Algorizmi . . .*” (tj. Tak pravil Algorizmi

<sup>15</sup>předtím než se islám pevněji usadil na indickém subkontinentu v průběhu 11. a 12. století po Kristu

... ) základem termínu *algorithmus*, který zpočátku neznamenal nic jiného než postup podle pravidel uvedených v al-Chvárizmího díle. Dnes znamená libovolný pravidelný početní postup, udávající řešení určité třídy úloh konečným počtem kroků.

(2) *Algebra*, jejíž plný arabský název je *Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala* (česky doslova Krátká kniha o redukcí a vzájemném rušení, tj. podle dnešní terminologie Krátká kniha o rovnicích), se zachovala v arabském originálu a obsahuje diskusi řešení lineárních a kvadratických rovnic. Slova *al-džabr* a *al-muqábala* jsou názvy základních operací používaných při úpravách rovnic; z *al-džabr* se vytvořil název celé matematické disciplíny – algebry<sup>16</sup>, z *al-muqábala* se zrodilo slovo kabala. Mezi problémy, které museli řešit matematikové Orientu od nejstarších dob, zaujímaly mnoho místa úlohy vznikající při budování kanálů a hrází, cest, opevnění, palácových a chrámových staveb atd. Zde bylo třeba počítat objemy a obsahy, aby se zjistilo potřebné množství materiálu a dělníků, jakož i nároky na jejich stravování a jejich platy. Finanční správa měla na starosti určování výše daní, které se řídilo podle jednotlivých daňových předpisů, jakož i jejich rozdělování. Dále řídila i naturální dávky, závisející na kvalitě půdy, na vzdálenosti sběren atd. K tomu se připojovaly nejdůležitější úlohy z obchodní praxe a (zvláště v arabských zemích) úlohy dělení pozůstalosti ovlivněné dosti složitými kánony mohamedánského dědického práva. Al-Chvárizmí napsal v úvodu tohoto spisu, že do něj zařadil vše to, co „*lidé potřebují stále v problémech dědictví a testamentů, při rozdělování majetku a v soudních procesech, stejně jako v různých vzájemných vztazích, při vyměřování půdy a při stavbě kanálů, v geometrii a v různých jiných otázkách.*” Toto dílo obsahuje diskusi řešení lineárních a kvadratických rovnic. Al-Chvárizmí nepoužívá žádné symboly, jeho výklad je čistě slovní, tudíž značně obtížný pro pochopení. Dílo se skládá ze tří částí:

- (a) z vlastního algebraického oddílu (obsahujícího mj. řešení kvadratických rovnic), za kterým následuje malá kapitola o obchodních smlouvách, kde se z matematiky objevuje jednoduchá trojčlenka podle indického vzoru;
- (b) z nevelké geometrické kapitoly o měření s některými aplikacemi algebry;
- (c) z obsáhlé kapitoly o závětích.

Al-Chvárizmího základním cílem při sestavování tohoto traktátu bylo sepsání příručky k řešení úloh vyskytujících se v každodenním praktickém životě. Tím lze vysvětlit obšírnost výkladu i velká pozornost, která je věnována zvláště úlohám o závětích a dědictví, neboť obsahují více než polovinu knihy.

<sup>16</sup>přesněji – západní Arabové, kteří al-Chvárizmího práce převzali a přenesli je do Evropy, vyslovovali hlásku „džíne“ jako „g“, a tudíž říkali nikoli *al-džabr*, ale *al-gabr*; tak se v Evropě objevuje slovo *algebra* jako název disciplíny ve 14. století

Muslimské dědické právo bylo a někde dosud je podřízeno přísným a složitým předpisům (vždyť i v Koránu je těmto otázkám věnována velká pozornost), které určovaly možné podíly dědiců v závislosti na stupni příbuznosti (manželka, manžel, dcera, syn, rodiče atp.) a omezovaly práva odkazujícího. Proto vznikaly před právníky dosti spleť problémy, které v zájmu procvičení dostávaly v učebnicích ještě komplikovanější tvar. Úlohami o závětech se zabývali již před al-Chvárizmím (např. ve starém Babylónu) i po něm. V této části jsou úlohy na lineární rovnice. Tyto úlohy mají algebraický charakter, ačkoli se zde nepoužívá žádná symbolika. Řešení je díky tomu poněkud zdouhavé a těžkopádné.

Poznamenejme, že sám sobě al-Chvárizmí nepřipisoval žádné objevy.

Proces prosazování desítkové poziční soustavy v islámských zemích byl zdouhavý a během středověku nemohl plně vytlačit ostatní číselné soustavy. Široké vrstvy obyvatelstva používaly stále - stejně jako dříve - čistě slovního vyjadřování čísel. Svědčí o tom např. spis *Kitáb fímá yahtádž ilajhí al-kuttáb min ilm al-hisáb* (Kniha o tom, co potřebují písaři a kupci z aritmetiky), kterou napsal arabský astronom a matematik perského původu ABU 'L-WAFÁ MUHAMMAD IBN MUHAMMAD AL-BÚZDŽÁNÍ (\* asi 940 - + 997 - 8). První dvě části knihy jsou věnovány počítání s celými čísly a zlomky, třetí část měření rovinných útvarů, těles a vzdáleností. Zbývající čtyři části Abu 'l-Wafovy knihy, které nebyly dosud zpracovány, zahrnují rozličné úlohy praktické aritmetiky, jako jsou obchodní smlouvy, zdanění, soustavy měr, směna různých druhů obilí, směna peněz, výdaje stravních dávek a žoldu vojsku, výpočty při stavbě budov, hrází atd. V tomto spise zaměřeném speciálně pro potřeby praktické není vykládána desítková soustava a všechna čísla jsou vyjadřována číslovkami, tj. slovy. Symbolika, kterou do matematiky vnesli středověcí arabští matematici, podstatně rozšířila arzenál prostředků, kterými člověk vyjadřoval své představy o skutečnosti.

#### A CO EVROPA?

Zatímco kontinentální Evropu v období rozpadu Římské říše i později otrásaly nájezdy nových kmenů, Irsko, kam již v 5. století proniklo křesťanství, leželo stranou všech bouří. Kláštery irských mnichů (některé i na území dnešní Anglie) se na nějakou dobu stávají důležitými kulturními centry. Jedním z irských mnichů byl největší vzdělanec anglosaského období v Anglii *Beda Venerabilis*, tj. Ctihodný (\* asi 672 - + 735). Od mládí žil v kláštorech Northumbrie, kolébce anglosaské vzdělanosti. O jeho životě víme z krátké autobiografické poznámky v díle *Historia Ecclesiana Gentis Anglorum* (Církevní dějiny anglického národa, 731). Od 6. století se církev snažila upravit kalendář zjednodušením výpočtu velikonoce (*computus paschalis*), protože na tuto problematiku nebyl dlouho ustálený názor. Tyto složitosti zaujaly Bedu a věnoval jim své dílo *De ratione temporum* (O počítání času), v němž mj. uvádí jedinou úplnou soustavu počítání na

prstech, kde různé kombinace ohnutých a natažených prstů představují jednotky, desítky, stovky a tisíce, přičemž různé polohy paží dovolují rozšířit číselný rozsah až do miliónu. Počítání na prstech bylo zcela jistě známo již v dávných dobách. Používali je, protože prostředky byly vždy „po ruce“, často kupci při tajném uzavírání obchodů v přítomnosti cizích lidí. Mohli je užívat i negramotní lidé, ale neopovrhovali jím ani velcí matematici (např. Luca Pacioli), kteří jej doporučovali jako pomůcku při počítání v desítkovém pozičním systému. Z počítání na prstech vychází také dělení čísel na *digiti* (prsty), tj. jednotky, *articuli* (články), tj. desítky, a na ostatní čísla *numeri compositi* (čísla složená). Angličané nazývají dodnes jednotky, resp. číslice, *digits* a Francouzi – *doigts*.

#### VRCHOLNÝ STŘEDOVĚK V EVROPĚ

Indicko-arabské číslice, které se u nás dosud běžně nazývají „arabské“, sice počaly pronikat do křesťanské Evropy v 10. století přes jih Pyrenejského poloostrova ještě ovládaný Araby, kde při rozšiřování a překládání vědomostí (mj. al-Chvárizmího Aritmetiky) pomáhali arabští a židovští lékaři a astrologové. Nejstarším evropským rukopisem, v němž se užívá těchto číslic, je CODEX VIGILANUS, napsaný roku 976 ve Španělsku, ale počátky úzkých vztahů mezi Západem a Východem je asi nutno hledat na konci 11. století v první křížové výpravě. Výzva papeže Urbana II. v roce 1095 v Clermont-Ferrand, aby svatá místa byla vysvobozena zbraněmi od pohanů, byla přijata s nepopsatelným nadšením. Téměř ihned bylo na francouzské půdě sestaveno vojsko. Ze šesti set tisíc křížáků, kteří se prý vydali na Východ, zůstalo čtyřicet tisíc vyčerpaných bojovníků, kteří se 15.7.1099 v posledním vzepětí sil dobyli Jeruzalém. Křížáci se sice nezajímali o kulturu, ale přece jen zprostředkovávali výměnu intelektuálních a materiálních hodnot mezi dvěma do té doby téměř navzájem izolovanými civilizacemi. Kupci, diplomati, učenci, poutníci a vojáci začali pozvolna šířit indicko-arabské číslice Evropou, ale zavádění deseti číselných symbolů do Evropy probíhalo velmi pomalu, např. nejstarší francouzský rukopis, v němž se vyskytují, pochází z roku 1275.

Evropané se dostali do styku s velkými asijskými národy a seznámili se s jejich kulturou v době, kdy došlo k obratu v dějinách světa. Stalo se to tehdy, kdy Evropané zahájili svůj velký vzestup, zatímco ostatní civilizované lidstvo mělo spíše tendenci odpočívat s rukama v klíně. Tento kontrast se projevil v tom, že to byli Evropané, kteří objevili východ<sup>17</sup> a ne obráceně.

Ve vrcholném středověku se duchovní život opíral o hrdinské rytířstvo, o jeho sepětí s církví a jeho dvorský ideál, ale nová doba se začínala opírat o měšťanstvo, sledující obchodní a ryze materiální cíle. Proti úsilí o kvalitativní hodnoty, na které byly dosud zaměřeny církve a rytířstvo, se začaly

<sup>17</sup>a také daleký západ

prosazovat požadavky kvantity, které se stávaly stále nebezpečnějším soupeřem, až nabyly vrchu s „vědeckou“ kulturou 19. století. Rok 1270 spojuje symbolicky poslední křížovou výpravu, při níž zahynul *Ludvík Svatý*, rytířský král par excellence, s vydáním druhé části *Románu o růži*, jehož dvorskou symboliku dovedl *Jean de Meung* k pronikavému materialismu a pohrdání ženou. Jiný duch zavládl i v samotných křížových výpravách, zvrátil jejich smysl a vnesl do nich tu největší vypočítavost a ziskuchtivost. Rychle bohatnoucí měšťanstvo nastolovalo všude vládu peněz, přetvářelo hospodářskou strukturu a pronikalo i do bezprostřední blízkosti panovníků. Např. ve 14. století se ozývaly stížnosti, že v papežském paláci v Avignonu začíná být účetnictví důležitější než posvátné úkony ... V Itálii dopomohla banka dokonce ke zrodu novému šlechtickému rodu – Medicejským. Peníze měly obrovskou hodnotu – ve 13. a 14. století stouply v Itálii úrokové zisky postupně z 12 % až na 35 %. Význam italského bankovníctví reprezentovaného lombardskými, piemontskými a florentskými bankéři např. dokresluje *Kronika pražského kostela*, ve které současník Karla IV. *Václav Beneš Krabice z Weitmile* (+ 27.7.1375) píše: „*Léta Páně 1300, v měsíci červenci, přišli [do Čech] na králův rozkaz z Florencie jacísi zkušení muži a v Kutné Hoře razili nové mince, totiž groše pražské a malé.*“ V politické a společenské struktuře se dostával do popředí zřetel ekonomický a praktický.

#### VÍTĚZSTVÍ DESÍTKOVÉ SOUSTAVY V KŘESŤANSKÉ EVROPĚ

Italské bankovní domy byly velkou hospodářskou silou nejen v Itálii, ale i v Evropě. Právě v nich se nejdříve projevilo, že účetnictví je základní nezbytností pro obchod. Asi od r. 1260 převáděly své obchodní knihy na „arabské“ číslice a nulu, ale jejich zavádění naráželo na odpor, protože nové symboly prý ztěžovaly čtení obchodních zapisů. Ve stanovách bankéřského cechu *Arte del Cambio* (tj. umění směnárnické) z roku 1299 byly florentským bankéřům zakázány arabské číslice a museli používat římské. Teprve někdy během 14. století italští obchodníci a finančníci běžněji používají „arabské“ číslice, i když např. počínaje rokem 1406 v obchodních knihách medicejského rodu, které jsou uloženy v Selfridgově sbírce Harvardovy vysoké školy obchodní, se objevují tyto číslice pouze v textu, který popisuje nebo vysvětluje. Od roku 1439 začíná nový zápis nahrazovat římské číslice v peněžních nebo zbožních údajích v knihách příjmu, v denících, v příručních obchodních knihách atd. Od roku 1494 se u Medicejských užívají ve všech obchodních knihách pouze indicko-arabské číslice. Pronikání nové číselné symboliky Evropou je vidět na mincích a náhrobcích. První mince s indicko-arabskými čísly se objevily roku 1424 ve Švýcarsku, roku 1478 v Německu, roku 1478 ve Švédsku, roku 1485 ve Francii atd. Na náhrobních kamenech se tyto číslice objevují ještě dříve – roku 1371 v Pforzheimu (Bádensko) a roku 1388 v Ulmu.



|  |     |     |     |     |     |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|
|  |     | 3   | 5   | 8   |     |
|  |     | / / | 1 / | 1 / |     |
|  |     | / / | / / | / / | 2   |
|  |     | / 6 | / 0 | / 6 |     |
|  | / / | 1 / | 2 / | 3 / |     |
|  | / / | / / | / / | / / | 4   |
|  | / / | / 2 | / 0 | / 2 |     |
|  | / / | 1 / | 3 / | 4 / |     |
|  | / / | / / | / / | / / | 6   |
|  | / / | / 8 | / 0 | / 8 |     |
|  | 8 / | 8 / | 0 / | 6 / | 8 / |

OBR. 1. Šachovnicový způsob násobení  
 uvedený na příkladu  $246 \cdot 358 = 88068$

#### A CO U NÁS?

V Čechách se dekadický systém používal od poloviny 14. století zprvu pouze v matematických a astronomických textech, např. v traktátu *Algorismus prosaycus* asi z roku 1400 (dochovaný v několika opisech), jehož autorem je učitel Jana Husa pražský matematik magistr *Křišťan z Prachatic* (\* asi 1366 – + 5.9.1439)<sup>18</sup>. Tento spis byl jakýmsi úvodem do početní techniky. Je v něm i návod na počítání se zlomky a příklad násobení tzv. šachovnicovým způsobem (viz obr. 1), které se více rozšířilo až za půl století po jeho smrti. Ale běžně se nová číselná symbolika používala v Čechách teprve od 16. století. Nejznámějším matematikem pocházejícím z Čech v té době byl chebský rodák *Johann Widmann*, který studoval na universitě v Lipsku. Po získání hodnosti magistra roku 1485 začal v Lipsku i přednášet. Je

<sup>18</sup>Křišťan z Prachatic (latinsky se psal *Cristianus*) byl nejvýraznější postavou naší dávné přírodovědy a vynikl jako lékař, astronom a matematik. Narodil se v Prachaticích kolem roku 1366, studoval na prachatické latinské škole a pak na pražské universitě. Roku 1388 se stal bakalářem a roku 1390 magistrem svobodných umění. Přednášel matematiku a astronomii na pražské universitě, mezitím vystudoval i medicínu. V prvopočátečním období pražské university byl bezesporu naším nejvýznamnějším přírodovědcem. Přednášel na ní s menší přestávkou skoro čtyři a půl desetiletí až do roku 1437. Zprvu se stejně jako jeho astronomičtí předchůdci zabýval sestavováním církevních kalendářů a astrologií, ale brzy všechny předčil v tom, že se pouštěl do samostatných pozorování, že se zajímal o pohyb planet, určování času a zeměpisných souřadnic a že k ověřování svých úvah používal také tehdejší přístroje. Jeden z nich a práci s ním – astroláb pro měření výšek hvězd a času – i podrobně popsal. Je vskutku osudovou ironií, že jeho doporučené zdravotnické zásady, které měly bránit vzniku moru a jeho šíření, Křišťana nakonec před nebezpečím infekční choroby neuchránily a během jedné morové epidemie, která postihla Prahu před 556 lety, 5. září 1439 zemřel.

autorem mnohokrát vydaného spisu *Behende und hubsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft* (Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce), který byl vytištěn poprvé v Lipsku roku 1489. Zde se poprvé v tištěné práci objevuje symbol + (plus) pro sčítání a symbol – (minus) pro odčítání. O původu těchto symbolů se dodnes vedou spory. Zpravidla se odvozují ze značek, které se používaly na bednách zboží a označovaly, že váha bedny nedosahuje či přesahuje určenou váhu. O několik let dříve než u Widmanna se znaky + a – vyskytly v německých a latinských rukopisech, které byly uloženy v Drážďanech.

Symbol pro násobení pochází z doby kolem roku 1630 a symbol pro dělení použil koncem 17. století Gottfried Wilhelm Leibniz.

#### ZLOMKY

Pozvolna se rozvíjelo učení o zlomcích. V Číně byly zlomky typu  $\frac{m}{n}$  známy odedávna. Zvláštní symboly pro ně neexistovaly, tak  $\frac{m}{n}$  zapisovali jako „*m n-tých dílů*“. Pro nejčastěji používané zlomky se dochovaly také zvláštní staré názvy a znaky<sup>19</sup>. Termín „*zlomek*“ se objevil v evropské literatuře jako překlad arabského „*kasr*“<sup>20</sup>. V překladu al-Chvárizmího Aritmetiky se zlomek nazývá „*fractio*“<sup>21</sup>. Původ našeho slova „zlomek“, francouzských termínů „*nombre rompu*“ nebo „*fraction*“, anglického „*fraction*“ či německého „*Bruch*“ je zřejmý. Zlomková čára, oddělující čitatel od jmenovatele, se objevuje roku 1202 u Leonarda Pisánského, zvaného Fibonacci, a přibližně v téže době i u západoarabského učenice al-Hassára. Učení o zlomcích bylo zvláště obtížné<sup>22</sup>, protože se zlomky při početních operacích nechovají jako celá čísla. Tyto obtíže našly svůj výraz v německém úsloví „*in die Brüche geraten*“<sup>23</sup>.

Co říci závěrem? Snad lze použít Goetheho slova: „*Jedině to, co je plodné, je pravdivé.*“

Bibliografie – příloha ke knize, v níž autor vypočítává díla, která jsou mu známa jen podle názvu.

(A. POLIKARPOV)

#### LITERATURA

- [1] Nicolas Bourbaki : *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960.
- [2] Adolf Pavlovič Juškevič : *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

<sup>19</sup>ve 2. – 8. knize Matematiky v devíti knihách je označení pro polovinu (pchan), jedna třetina se označuje jako „malá polovina“ (čao pchan) a dvě třetiny jako „velká polovina“ (tchaj pchan). V jedné aritmetické příručce z doby kolem roku 500 je ještě název pro jednu čtvrtinu – „slabá polovina“

<sup>20</sup>od *kasara*, tj. rozbít, lámat

<sup>21</sup>z latinského *frangere* – rozbít, lámat, rozdrobovat

<sup>22</sup>a pro někoho i dosud je

<sup>23</sup>doslova „*octnout se ve zlomcích*“ – ve významu dostat se do slepé uličky

- [3] André Maurois : *Dějiny Anglie*, doplněné o nejnovější období Michele Mohrtem, Nakladatelství Lidové noviny, Praha, 1995.
- [4] Dirk J. Struik : *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.
- [5] A. N. Whitehead : *Věda a moderný svět*, Pravda, Bratislava, 1989.
- [6] Štefan Znáň a kolektiv : *Pohľad do dejín matematiky*, ALFA, Bratislava, 1986.

## DODATEK

Moderní konference se podobá pouti středověkého křesťanstva v tom, že účastníkům umožňuje, aby si dopřávali všech rozkoší a kratochvilí spojených s cestováním, a přitom vypadali jako asketové usilující o své sebezdokonalení. Je sice třeba podstoupit určitá kajicnická cvičení – možná přednést referát a zcela jistě vyslechnout referáty ostatních. Jenže pod touto záminkou cestujete do nových a zajímavých krajů, poznáváte nové a zajímavé lidi, navazujete s nimi nové a zajímavé vztahy, vyměňujete si drby a důvěrnosti (protože historiky pro vás omleté jsou pro ně čerstvé a naopak), každého večera se s nimi oddáváte jídlu, pití a radovánkám, a přesto se nakonec vrátíte domů s posílenou reputací seriózního pracovníka. Navíc mají dnešní konference před někdejšími poutníky tu výhodu, že výdaje jim obvykle hradí – ne-li úplně, pak alespoň zčásti – jejich mateřská instituce, ať už jde o ministerstvo, obchodní podnik nebo – snad nejčastěji – univerzita.

Konference se za našich dní pořádají téměř o všem možném, dílo Geoffreyho Chaucera nevyjímaje. Jestli se jako Troilus v závěru jeho Troila a Criseidy dívá z osmé sféry nebeské

*na to malé zrnko země  
obepjaté mořem*

a sleduje všechno to horečné putování kolem zeměkoule, které spolu s dalšími spisovateli zapříčinil – bílé stopy trysek křižující oceány a značící přelety expertů z jednoho kontinentu na druhý, dráhy sbíhavé, proťaté a rovnoběžné, jak tito cestovatelé chvátají do hotelů, zámečků či staroslavných sídel vědy, aby tam konferovali a hodovali v zájmu uchování anglistiky a dalších vědních oborů – copak si asi Geoffrey Chaucer myslí?

Nejspíše se (tak jako duch udatného rytíře a zhrzeného milence Troila) tomu reji srdečně směje a je rád, že se ho nemusí účastnit. Neboť ne všechny konference jsou blaženě rozkochané, ne všechna jejich dějiště jsou luxusní a malebná, ne všechny dubny bývají provázeny šumnými přeprškami a líbeznými vánky.

(DAVID LODGE – *Svět je malý*)