MINIMAXNÉ ODHADY VARIANČNÝCH KOMPONENTOV S NEÚPLNÝMI ELIPTICKÝMI OHRANIČENIAMI

Viktor Witkovský*
Ústav merania Slovenskej akadémie vied
Dúbravská cesta 9, 842 19 Bratislava
E-mail: umerwitk@savba.savba.sk

Abstrakt: Vo všeobecnom lineárnom modeli s variančnými a kovariančnými komponentami odhadujeme lineárnu funkciu parametrov druhého rádu $G\vartheta$, pričom G je matica typu $s \times p$, za obmedzujúcich podmienok na parametrický priestor daných množinou $\Theta = \{\vartheta \in \mathrm{R}^p : R\vartheta \in \Omega\}$, kde R je daná matica typu $q \times p$, $q \leq p$, plnej hodnosti a Ω je kompaktná symetrická podmnožina priestoru R^q.

Aplikáciou tzv. lineárneho prístupu k odhadovaniu parametrov druhého rádu a všeobecných výsledkov lineárnej teórie je odvodený explicitný tvar minimaxného lineárneho odhadu funkcie $G\vartheta$ v *linearizovanom modeli* v prípade, že parametrická množina spĺňa neúplné eliptické ohraničenia.

Kľúčové slová: Lineárny model s variančnými a kovariančnými komponentami, linearizovaný model, MINQE(U,I), MINQE(U,I) s ohraničeniami, Θ-MILE.

1. Úvod

Problém odhadovania kovariančnej štruktúry, resp. lineárnych funkcií variančných a kovariančných komponentov je pomerne dôležitým medzistupňom v procese lineárnej štatistickej inferencie.

V literatúre sú najčastejšie uvádzané kvadratické odhady parametrov druhého rádu. MINQUE metóda, (MINQE(U,I) — Minimum Norm Quadratic Unbiased Invariant Estimator, odhad zaviedol C. R. Rao v prácach [4] a [5]), patrí medzi najuniverzálnejšie a najefektívnejšie metódy odhadovania variančných komponentov. Za doplňujúceho predpokladu o normalite rozdelenia vektora pozorovaní je MINQE(U,I) optimálny odhad. Tento odhad je však lokálny, t.j. závisí od apriórnej voľby neznámych parametrov. Podľa mnohých teoretických a simulačných štúdií sa však ukazuje, že citlivosť odhadov na apriórnej voľbe parametrov nie je príliš významná. Naopak, v mnohých prípadoch vie experimentátor spoľahlivo určiť oblasť, v ktorej sa neznáme parametre nachádzajú.

V tejto práci skúmame minimaxné „lineárne" odhady (MILE) lineárnej funkcie vektora variančných a kovariančných komponentov ϑ, ktoré navyše spĺňajú systém ohraničení daný množinou $\Theta = \{\vartheta \in \mathrm{R}^p : R\vartheta \in \Omega\}$, kde R je daná matica typu $q \times p$, $q \leq p$, plnej hodnosti a Ω je kompaktná symetrická podmnožina priestoru R^q. Pri odvádzaní tvaru odhadu využijeme tzv. *lineárny prístup* k odhadovaniu variančných komponentov ako bol zavedený v prácach [9] a [10] a následne výsledky lineárnej teórie — postupy pri odhadovaní lineárnej funkcie parametrov prvého rádu so systémom neúplných ohraničení, pozri napr. [3], [1] a [2].

2. Základné pojmy a označenia

2.1. Všeobecný lineárny model

Uvažujme *všeobecný lineárny model s variančnými a kovariančnými komponentami* $y = X\beta + \varepsilon$, kde y je n-rozmerný vektor pozorovaní, X je známa $(n \times k)$-rozmerná matica plánu a $\beta \in \mathrm{R}^k$ je k-rozmerný neznámy

*This work was supported by the Slovak Academy of Sciences under Grant No. 999366

vektor parametrov prvého rádu. Vektor náhodných chýb ε ukrýva v sebe celú kovariančnú štruktúru vytvorenú napr. náhodnými efektami. Budeme teda predpokladať: $E(\varepsilon) = 0$; a lineárnu štruktúru kovariančnej matice (ako funkciu neznámych parametrov druhého rádu — variančných a kovariančných komponentov): $V(\vartheta) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i V_i$, kde V_i, $i = 1, \ldots, p$, označujú známe symetrické $(n \times n)$-matice a vektor $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p)'$ je vektor neznámych parametrov druhého rádu, ktoré jednoznačne určujú celú kovariančnú štruktúru. Prirodzeným parametrickým priestorom je množina $\Theta = \{\vartheta \in \mathrm{R}^p : V(\vartheta) \geq 0\}$, t.j. do parametrického priestoru patria len také vektory ϑ, pre ktoré je kovariančná matica $V(\vartheta)$ pozitívne semidefinitná. Predpokladáme tiež, že Θ obsahuje otvorenú podmnožinu. Potom možno ľahko nahliadnuť, že parametrická množina Θ vytvára v euklidovskom priestore R^p konvexný kužeľ.

Normalitu rozdelenia vektora y nebudeme vo všeobecnosti predpokladať, predpokladáme len existenciu matíc tretích a štvrtých momentov, t.j. $E(\varepsilon \otimes \varepsilon\varepsilon') = \Phi$ a $E(\varepsilon\varepsilon' \otimes \varepsilon\varepsilon') = \Psi$. Kvôli jednoduchosti, vyššie popísaný model budeme zapisovať stručne v tvare

$$\left(y, X\beta, \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i V_i\right). \tag{1}$$

2.2. Podmnožina parametrického priestoru

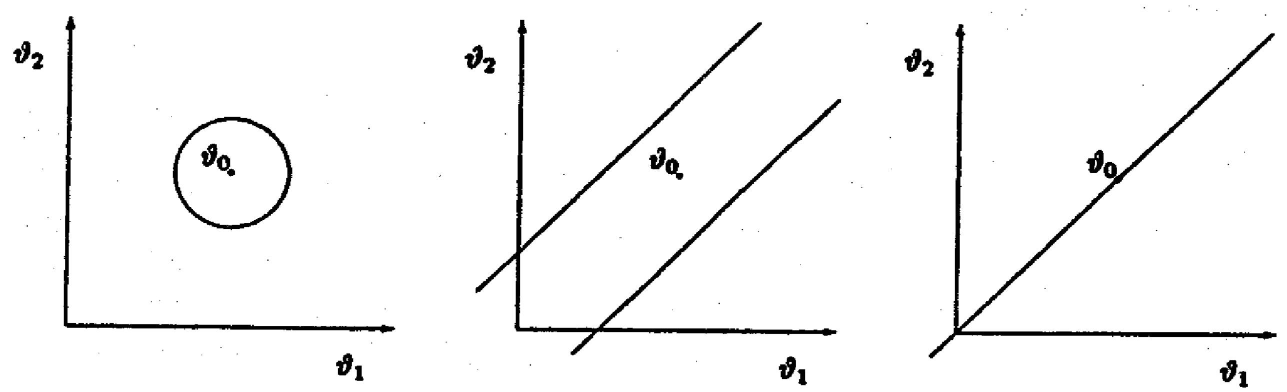
Naším cieľom je odhadovanie lineárnej vektorovej funkcie $G\vartheta$ parametrov druhého rádu, kde G označuje $(s \times p)$-rozmernú maticu plnej hodnosti, (špeciálnym prípadom je jednorozmerná funkcia $g'\vartheta$, $g \in \mathrm{R}^p$). Pritom predpokladáme, že experimentátor vie dostatočne spoľahlivo vymedziť podmnožinu parametrického priestoru, v ktorej sa skutočný ale neznámy parameter ϑ nachádza.

Budeme sa teda zaoberať problémom odhadovania lineárnej funkcie $G\vartheta$ s ohraničeniami na parameter ϑ v tvare množiny

$$\Theta = \{\vartheta \in \mathrm{R}^p : R\vartheta \in \Omega\}, \tag{2}$$

kde R je $(q \times p)$-matica plnej hodnosti, a $\Omega \subset \mathrm{R}^q$ je kompaktná a symetrická množina.

Rozlišujeme niekoľko špeciálnych prípadov: V prípade, že matica R je typu $p \times p$, (špeciálne $R = I_p$), hovoríme o *úplných ohraničeniach*; v prípade, že $q < p$ hovoríme o *čiastočných (neúplných) ohraničeniach* vektora parametrov.



Obrázok 1: Príklad parametrickej množiny Θ v prípade dvojrozmerného vektora parametrov $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)'$: a) úplné eliptické ohraničenia; b) neúplné eliptické ohraničenia; c) lineárne ohraničenia.

Všimnime si, že množina $\Theta = \{\vartheta \in \mathrm{R}^p : (\vartheta - \vartheta_0)'H(\vartheta - \vartheta_0) \leq 1\}$, t.j. prípad *eliptických ohraničení* na parameter ϑ (so stredom v bode ϑ_0), je špeciálnym prípadom množiny (2), kde stačí zvoliť $H = R'R$, pričom hodnosť matice H je q, R je typu $q \times p$ a Ω je jednotková guľa v R^q so stredom v nule. Ak $\Omega = \{0\}$, potom $\Theta = \{\vartheta \in R^p : R(\vartheta - \vartheta_0) = 0\}$, a teda ide o prípad *lineárnych ohraničení* na parameter ϑ. Vhodnou voľbou matice R a množiny Ω možno získať ďalšie zaujímavé typy ohraničení, ako napr. ohraničenie len určitého subvektora vektora ϑ.

2.3. Linearizovaný model

V prácach [9], [6] a [10] bol s využitím tzv. lineárneho prístupu k odhadovaniu variančných komponentov odvodený *(ϑ_0, Ψ_0)-lokálne najlepší lineárny nevychýlený invariantný odhad* ((ϑ_0, Ψ_0)-LBLUIE) lineárnej funkcie $g'\vartheta$, $g \in R^p$, so systémom lineárnych podmienok $R(\vartheta - \vartheta_0) = 0$. Taktiež bol odvodený *odhad metódou najmenších štvorcov* (LSE) v tzv. *linearizovanom modeli*, v ktorom parameter ϑ už vystupuje iba ako parameter prvého rádu, (pozri tiež [7], [8] a [11]). Bolo tiež dokázané, že za predpokladu normality rozdelenia vektora pozorovaní y sa odhad LSE zhoduje s odhadom ϑ_0-LBLUIE.

Nech ϑ_0 a Ψ_0 označujú pevne zvolený bod v parametrickom priestore a maticu štvrtých momentov. Označme $V_0 = V(\vartheta_0) = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_{i0} V_i$ kovariančnú maticu v bode ϑ_0. Označme $T_0 = V_0 + XX'$ a nech U_0 je taká matica, že $T_0^+ = U_0' U_0$ a $U_0 T_0 U_0' = I$, pričom T_0^+ označuje Moorovu-Penroseovu g-inverziu matice T_0. Ďalej nech $M_0 = I - U_0 X (X' T_0^+ X)^+ X' U_0$ a nech F_0 je taká matica plnej hodnosti m, že $M_0 = F_0 F_0'$ a $F_0' F_0 = I$.

m-rozmerný vektor $z = F_0' U_0 y$ je *maximálnym invariantom* vzhľadom na grupu posunutí v strednej hodnote. V ďalšom budeme pracovať s hypervektorom $z \otimes z = \operatorname{vec} zz'$ („$\otimes$" označuje Kroneckerov súčin matíc resp. vektorov; operátor „vec" usporiada stĺpce matice pod seba). Potom platí:

$$E(\operatorname{vec} zz') = \left(\operatorname{vec} F_0' U_0 V_1 U_0' F_0, \ldots, \operatorname{vec} F_0' U_0 V_p U_0' F_0\right) \vartheta = Q\vartheta; \tag{3}$$

$$\operatorname{cov}(\operatorname{vec} zz') = (F_0' U_0 \otimes F_0' U_0) \Psi (F_0' U_0 \otimes F_0' U_0)' - (\operatorname{vec} F_0' U_0 V(\vartheta) U_0' F_0)(\operatorname{vec} F_0' U_0 V(\vartheta) U_0' F_0)' = \Sigma(\vartheta, \Psi). \tag{4}$$

Pre pevne zvolené ϑ_0 a Ψ_0 označme $\Sigma_0 = \Sigma(\vartheta_0, \Psi_0)$ kovariančnú maticu vektora $\operatorname{vec} zz'$. Nech kvôli jednoduchosti platí $R(Q) \subseteq R(\Sigma_0)$, ($R(A)$ označuje lineárny priestor generovaný stĺpcami matice A). Potom lineárny model s neznámym parametrom ϑ

$$(\operatorname{vec} zz', Q\vartheta, \Sigma_0) \tag{5}$$

nazývame *linearizovaným modelom* v bode (ϑ_0, Ψ_0). V nasledujúcom, pri určovaní lineárnych odhadov lineárnej funkcie $G\vartheta$, budeme zjednodušene predpokladať platnosť modelu (5) v dostatočne veľkom okolí bodu ϑ_0 parametrického priestoru.

2.4. MINQE(U,I) a MINQE(U,I) s lineárnymi ohraničeniami $R(\vartheta - \vartheta_0) = 0$

V prípade normality pôvodného vektora pozorovaní y platí nasledujúca rovnosť: $\Sigma_0 Q = 2Q$ (pozri [9]), a teda je splnená postačujúca podmienka $\Sigma_0 Q \in R(Q)$, aby kovariančná matica Σ_0 v lineárnom modeli (5) mala tzv. *jednoduchú Raovu štruktúru*. V lineárnom modeli s takou kovariančnou maticou platí, že odhad metódou najmenších štvorcov je zhodný s najlepším lineárnym nevychýleným odhadom lineárnej odhadnuteľnej funkcie, (t.j. LSE≡BLUE).

Odhadujme lineárnu funkciu $G\vartheta$ v modeli (5) metódou najmenších štvorcov. Nech $G \in R(Q'Q)$, resp. $G \in R(Q'Q + R'R)$, (nevychýlene odhadnuteľná funkcia bez podmienok, resp. s lineárnymi podmienkami). Potom $\widehat{G\vartheta}$ je LSE odhad a $\widehat{\widehat{G\vartheta}}$ je LSE odhad s lineárnymi ohraničeniami $R(\vartheta - \vartheta_0) = 0$, $R(R') \subset R(Q')$, (špeciálny prípad parametrickej množiny Θ), lineárnej funkcie $G\vartheta$, pričom

$$\widehat{G\vartheta} = G(Q'Q)^+ Q' \operatorname{vec} zz' = GK^+ q, \tag{6}$$

$$\widehat{\widehat{G\vartheta}} = GM_{R'}(M_{R'} Q' Q M_{R'})^+ M_{R'} Q' \operatorname{vec} zz' + G\vartheta_0 = G(M_{R'} K M_{R'})^+ q + G\vartheta_0, \tag{7}$$

kde $M_{R'} = I - R^+R$, K je tzv. *kriteriálna* $(p \times p)$-matica s prvkami $K_{ij} = \mathrm{tr}(MV_0M)^+V_i(MV_0M)^+V_j$, $i,j = 1,\dots,p$, kde $M = I - XX^+$; a napokon — q označuje p-rozmerný vektor kvadratických foriem, pričom $q_i = y'(MV_0M)^+V_i(MV_0M)^+y$, $i = 1,\dots,p$.

Odhad $\widehat{G\vartheta}$ sa zhoduje s MINQE(U,I) funkcie $G\vartheta$. Kvôli analógii, odhad $\widehat{\widehat{G\vartheta}}$ budeme niekedy nazývať MINQE(U,I) s lineárnymi ohraničeniami $R(\vartheta - \vartheta_0) = 0$. Vektor kvadratických foriem q má zvláštne postavenie. Nazývame ho *MINQE(U,I) vektor q*.

Ak nebudeme predpokladať normalitu, potom odhady

$$\widehat{G\vartheta} = G(Q'\Sigma_0^-Q)^+Q'\Sigma_0^- \operatorname{vec} zz', \tag{8}$$

$$\widehat{\widehat{G\vartheta}} = G(M_{R'}Q'\Sigma_0^-QM_{R'})^+Q'\Sigma_0^- \operatorname{vec} zz' + G\vartheta_0, \tag{9}$$

sú (ϑ_0, Ψ_0)-lokálne najlepšie odhady funkcie $G\vartheta$ bez ohraničení, a s lineárnymi ohraničeniami $R(\vartheta - \vartheta_0) = 0$. Odhad $\widehat{\widehat{G\vartheta}} - G\vartheta_0$ nazývame aj ker(R)-BLUE v modeli (5).

3. Θ-minimaxné lineárne odhady v modeli $(\operatorname{vec} zz', Q\vartheta, \Sigma_0)$

Θ-MILE funkcie $G\vartheta$ v modeli $(\operatorname{vec} zz', Q\vartheta, \Sigma_0)$ je taký lineárny odhad $L^* \operatorname{vec} zz'$, pričom L^* je $(s \times m^2)$-matica, ktorý minimalizuje kvadratickú stratovú funkciu $r_G(L,\vartheta)$, (napr. strednú kvadratickú chybu — MSE), t.j.

$$L^* \operatorname{vec} zz' = \inf_L \sup_{\vartheta \in \Theta} r_G(L,\vartheta), \tag{10}$$

pričom $r_G(L,\vartheta) = E_\vartheta((L \operatorname{vec} zz' - G\vartheta)'(L \operatorname{vec} zz' - G\vartheta)) = \mathrm{tr}(L\Sigma_0L') + \mathrm{tr}((LQ - G)\vartheta\vartheta'(LQ - G)')$.

V prípade, že Θ je kompaktná množina, (prípad úplných ohraničení), odvodil J. Pilz v [3] explicitný tvar Θ-MILE parametra β v lineárnom modeli $(y, X\beta, V)$. Pritom využil vzťah medzi minimaxnými a bayesovskými odhadmi, (Θ-MILE je bayesovský lineárny odhad pri *najnevhodnejšom apriórnom rozdelení*, (Least Favourable prior), na množine parametrov Θ).

Vo všeobecnosti, pri neúplných parametrických ohraničeniach, (matica R je typu $q \times p$, $q < p$), parametrická množina Θ nie je kompaktná množina. V takom prípade sa môže stať, že neexistuje žiadny lineárny odhad $L \operatorname{vec} zz'$, ktorý by mal ohraničenú MSE funkciu na množine Θ, (t.j. $\sup_{\vartheta\in\Theta} r_G(L,\vartheta) = \infty$ pre všetky L). Obmedzíme sa preto len na také lineárne odhady $L \operatorname{vec} zz'$, ktoré majú ohraničenú MSE funkciu $r_G(L,\vartheta)$ na Θ.

Označme $\mathcal{L}_G = \{L \in \mathrm{R}^{s\times m^2} : \sup_{\vartheta\in\Theta} r_G(L,\vartheta) < \infty\}$. B. Heiligers v [2] ukázal, že parametrickú množinu $\Theta = \{\vartheta : R\vartheta \in \Omega\}$ možno rozložiť: $\Theta = \ker(R) + R_D^-(\Omega)$, kde $R_D^-(\Omega) = \tilde{\Theta} = \{R_D^-\omega : \omega \in \Omega\}$ je už kompaktná množina, (R_D^- označuje *minimum D-seminorm g-inverziu* matice R, t.j. $R = RR_D^-R$ a $DR_D^-R = (R_D^-A)'D$, pričom $D = Q'\Sigma_0Q$). Potom sa dá ukázať, že $\mathcal{L}_G = \{L : LQM_{R'} = GM_{R'}\}$. Odtiaľ ľahko vidieť, že $\mathcal{L}_G \neq \emptyset$ práve keď $\mathrm{R}(M_{R'}G') \subseteq \mathrm{R}(M_{R'}Q'QM_{R'})$.

Aj v prípade neúplných parametrických ohraničení pri hľadaní tvaru Θ-MILE funkcie $G\vartheta$ využijeme vzťah medzi MILE a bayesovskými odhadmi pri najhoršom apriórnom rozdelení na množine Θ, (navyše sa však obmedzujeme na triedu lineárnych odhadov $L \operatorname{vec} zz'$, $L \in \mathcal{L}_G$).

Nech $\mu \in \mathcal{P}_\Theta$ je apriórne rozdelenie na množine Θ. Potom *bayesovský lineárny odhad* $L_\mu \operatorname{vec} zz'$, $L_\mu \in \mathcal{L}_G$, funkcie $G\vartheta$ je daný nasledovne:

$$L_\mu \operatorname{vec} zz' = \inf_{L\in\mathcal{L}_G} \int_\Theta r_G(L,\vartheta)\, d\mu(\vartheta), \tag{11}$$

kde $\int_\Theta r_G(L,\vartheta)\,d\mu(\vartheta) = \mathrm{tr}(L\Sigma_0L') + \mathrm{tr}((LQ - G)R_D^-N_\nu(R_D^-)'(LQ - G)') = r_G(L, N_\nu)$. $(q \times q)$-matica $N_\nu = \int_\Omega \omega\omega'\,d\nu(\omega)$ je momentová matica apriórneho rozdelenia $\nu = \mu^R$ na množine Ω, (vzor rozdelenia μ v zobrazení R). Označme ako $\mathcal{N}$ množinu momentových matíc všetkých apriórnych rozdelení na Ω.

N. Gaffke a B. Heiligers v prácach [1] a [2] dokázali, že pre apriórne rozdelenie reprezentované momentovou maticou $N \in \mathcal{N}$ existuje v triede lineárnych odhadov $L \in \mathcal{L}_G$ jednoznačne určený bayesovky lineárny odhad $L_N \operatorname{vec} zz'$ funkcie $G\vartheta$, pričom

$$
\begin{aligned}
L_N \operatorname{vec} zz' &= L_0 \operatorname{vec} zz' + S_{\tilde{N}} \operatorname{vec} zz', && (12)\\
L_0 \operatorname{vec} zz' &= G(M_{R'}Q'\Sigma_0^- Q M_{R'})^+ Q'\Sigma_0^- \operatorname{vec} zz', && (13)\\
S_{\tilde{N}} \operatorname{vec} zz' &= G\tilde{N}Q'(Q\tilde{N}Q' + \Sigma_0)^+ \operatorname{vec} zz' \\
&= G\tilde{N}\left((Q'\Sigma_0^- Q)^+ + \tilde{N}\right)^+ (Q'\Sigma_0^- Q)^+ Q'\Sigma_0^- \operatorname{vec} zz', && (14)
\end{aligned}
$$

kde $\tilde{N} = R_D^- N(R_D^-)'$. Pritom odhad $L_0 \operatorname{vec} zz'$ je ker(R)-BLUE v modeli (5) a odhad $S_{\tilde{N}} \operatorname{vec} zz'$ je bayesovsky lineárny odhad funkcie $G\vartheta$ na kompaktnej parametrickej množine $\tilde{\Theta} = R_D^-(\Omega)$ s apriórnym rozdelením reprezentovaným momentovou maticou $\tilde{N} = R_D^- N(R_D^-)'$, $N \in \mathcal{N}$.

Za doplňujúceho predpokladu o normalite rozdelenia y, (platí $\Sigma_0 Q = 2Q$), máme:

$$
\begin{aligned}
L_0 \operatorname{vec} zz' &= G(M_{R'}KM_{R'})^+ q, && (15)\\
S_{\tilde{N}} \operatorname{vec} zz' &= G\tilde{N}\left((2K)^+ + \tilde{N}\right)^+ K^+ q, && (16)
\end{aligned}
$$

kde K je kriteriálna matica a q je MINQE(U,I) vektor kvadratických foriem.

Ďalej podľa [2] platí: Odhad $L^* \operatorname{vec} zz'$ je Θ-MILE funkcie $G\vartheta$ v modeli (5) práve vtedy, keď $L^* = L_0 + S^*$, pričom $L_0 \operatorname{vec} zz'$ je ker(R)-BLUE a $S^* \operatorname{vec} zz'$ je $\tilde{\Theta}$-MILE funkcie $G\vartheta$, $\tilde{\Theta} = R_D^-(\Omega)$. $S^* \operatorname{vec} zz' = S_{\tilde{N}^*} \operatorname{vec} zz'$, kde $\tilde{N}^*$ reprezentuje najnevhodnejšie apriórne rozdelenie na množine $\tilde{\Theta}$, (t.j. minimaxný odhad vypočítame ako bayesovský odhad s najnevhodnejšom apriórnym rozdelením).

Vo všeobecnosti nie je jednoduché určiť explicitný tvar momentovej matice najnevhodnejšieho apriórneho rozdelenia parametrov $\vartheta \in \tilde{\Theta}$. Niektoré dôležité špeciálne prípady sú uvedené v poslednej časti.

3.1. Θ-MILE v špeciálnych prípadoch

Prípad I. Lineárne ohraničenia. Normalita rozdelenia; odhadovaná funkcia: $G\theta = G(\vartheta - \vartheta_0)$, $G \in \mathrm{R}(K + RR')$; parametrická množina $\Theta = \{\theta : R\theta = 0\}$; R je typu $q \times p$, $q < p$. (Keďže $\Omega = \emptyset$ potom aj $\tilde{\Theta} = R_D^-(\Omega) = \emptyset$, a teda Θ-MILE funkcie $G\theta$ $L^* \operatorname{vec} zz' = L_0 \operatorname{vec} zz'$). Θ-MILE funkcie $G\theta$ je daný vzťahom:

$$L^* \operatorname{vec} zz' = G(M_{R'}KM_{R'})^+ q. \qquad (17)$$

Prípad II. Úplné eliptické ohraničenia. Normalita rozdelenia; odhadovaná funkcia: $g'\theta = g'(\vartheta - \vartheta_0)$, $g \in \mathrm{R}(K)$; parametrická množina $\Theta = \{\theta : \theta' H\theta \leq 1\}$, H je $(p \times p)$-pozitívne definitná matica: Θ-MILE funkcie $g'\theta$ je daný vzťahom:

$$L^* \operatorname{vec} zz' = g'(H + K)^{-1} q. \qquad (18)$$

Prípad III. Neúplné eliptické ohraničenia. Normalita rozdelenia; odhadovaná funkcia: $\theta = (\vartheta - \vartheta_0)$; parametrická množina $\Theta = \{\theta : \theta' R' R\theta \leq 1\}$, R je typu $q \times p$, $q < p$; kriteriálna matica K má plnú hodnosť p. Ak matica N daná vzťahom

$$N = \frac{2 + \operatorname{tr}(RK^{-1}R')}{\operatorname{tr}(RK^{-2}R')^{1/2}} (RK^{-2}R')^{1/2} - RK^{-1}R' \qquad (19)$$

je pozitívne semidefinitná, potom Θ-MILE funkcie θ je daný vzťahom:

$$L^* \operatorname{vec} zz' = (M_{R'}KM_{R'})^+ q + N^* \left(K^{-1} + N^*\right)^{-1} K^{-1} q, \qquad (20)$$

kde $N^* = R_D^- N(R_D^-)'$, pričom $R_D^- = K^{-1}R'(RK^{-1}R')^{-1}$ je tu jednoznačne určená g-inverzia matice R.

Použitá literatúra

[1] N. Gaffke and B. Heiligers. Bayes, admissible, and minimax linear estimators in linear models wil restricted parameter space. *Statistics*, 20(4):487–508, 1989.

[2] B. Heiligers. Linear Bayes and minimax estimation in linear models with partially restricted parametr space. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 36(2-3):175–184, 1993.

[3] J. Pilz. Minimax linear regression estimation with symmetric parameter restrictions. *Journal o Statistical Planning and Inference*, 13:297–318, 1986.

[4] C. R. Rao. Estimation of heteroscedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistic Association, Theory and Methods Section*, 329(63):161–172, 1970.

[5] C. R. Rao. Estimation of variance and covariance components — MINQUE theory. *Journal of Mult variate Analysis*, 1:257–275, 1971.

[6] J. Volaufová. A brief survey on the linear methods in variance-covariance components model. In W. G Müller, H. P. Wynn, and A. A. Zhigljavsky, editors, *Model-Oriented Data Analysis*, pages 185–19 St. Petersburg, Russia, May 1993. Physica- Verlag Heidelberg.

[7] J. Volaufová and V. Witkovský. Štatistické vlastnosti MNŠ odhadov variančných komponentov v zmiešanom lineárnom modeli. In *ROBUST'90*, pages 182–191, Liblice, 1990. JČSMaF.

[8] J. Volaufová and V. Witkovský. Least squares and minimum MSE estimators of variance components in mixed linear models. *Biometrical Journal*, 33(8):923–936, 1991.

[9] J. Volaufová and V. Witkovský. Estimation of variance components in mixed linear model. *Application of Mathematics*, 37(2):139–148, 1992.

[10] V. Witkovský. *Lokálne opimálne odhady a testy vo všeobecnom lineárnom modeli s variančnými kovariančnými komponentami.* Kandidátska dizertačná práca, Ústav merania SAV, Matematický ústa SAV, Slovenská akadémia vied, Bratislava, február 1993.

[11] V. Witkovský and M. Bognárová. Porovnanie dvoch testov kovariančnej štruktúry v multivariátnom modeli. In J. Antoch and G. Dohnal, editors, *ROBUST'92*, pages 236–244, Herbertov, Septembe 1992. JČSMaF.