VÝPOČET BAYESOVSKÉHO RIZIKA

Aleš Linka, Miroslav Brzezina
KMA VŠST Liberec

Abstrakt. Výpočet bayesovského rizika pro nejlepší nestranný odhad, maximálně věrohodný odhad a bayesovský odhad spolehlivosti v exponenciálním rozdělení na základě asymptotického rozvoje. Porovnání odhadů pomocí výpočtu asymptotických deficiencí vzhledem k bayesovskému riziku.

1 Úvod

Uvažujme klasickou situaci, kdy výsledkem experimentu je úplný náhodný výběr $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ z *exponenciálního rozdělení* s hustotou

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}), & \text{pro } x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{1}$$

kde $\theta \in \Theta \subseteq I\!R$ je neznámý parametr. Nechť c je kladné číslo. Jestliže X je náhodná veličina s hustotou (1), pak odpovídající *funkce spolehlivosti* má tvar

$$R(c) = R(c,\theta) = P(X > c) = \exp\left(-\frac{c}{\theta}\right). \tag{2}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme položit $c = 1$. Tedy (2) má tvar

$$R = R(1,\theta) = \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right). \tag{3}$$

Nechť dále $\mathcal{D}$ označuje množinu možných odhadů parametrické funkce $R(1,\theta)$ na základě náhodného výběru $\mathbf{X}$. Definujme měřitelnou funkci

$$L(R(1,\theta), d) : \Theta \times \mathcal{D} \to I\!R \tag{4}$$

jako *ztrátovou funkci. Rizikovou funkci* příslušnou odhadu $\delta(\mathbf{X})$, je-li skutečná hodnota parametrické funkce $R(1,\theta)$, definujeme vztahem

$$R^*(R, \delta(\mathbf{X})) = E(L(R(1,\theta), \delta(\mathbf{X})|\theta) = \int_{R} L(R(1,\theta), \delta(\mathbf{X}))\, f(x,\theta)\, dx. \tag{5}$$

Nyní předpokládejme, že parametr θ je náhodná veličina s hustotou $q(\theta)$, a definujme *bayesovské riziko* odhadu $\delta(\mathbf{X})$

$$\varrho(q, \delta(\mathbf{X})) = E_q R^*(R, \delta(\mathbf{X})) = \int_{\Theta}\int_{R} L(R(1,\theta), \delta(\mathbf{X}))\, f(x,\theta)\, dx\, q(\theta)\, d\theta, \tag{6}$$

pro $\delta(\mathbf{X}) = \{d \in \mathcal{D}; R^*(R(1,\theta), d) < \infty, \forall\theta \in \Theta\}$.

V další části článku budeme předpokládat, že:

- $L(R(1,\theta),d)$ je *kvadratická ztrátová funkce*, tj.

$$L(R(1,\theta),d) = (R(1,\theta) - d)^2.$$

- $\lambda = \theta^{-1}$ je náhodná veličina. Obvyklý konjugovaný systém je systém *gamma rozdělení* $\Gamma(a,p), a > 0, p > 0$. Tedy *apriorní hustota* λ je

$$q(\lambda) = \begin{cases} \frac{a^p \lambda^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-a\lambda}, & \text{jestliže } \lambda > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{7}$$

  kde a a p jsou apriorní parametry. Potom *aposteriorní rozdělení* je gamma rozdělení $\Gamma(a + \sum_{j=1}^{n} x_j, p + n)$ s hustotou

$$g(\lambda | x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\left(a+\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{p+n} \lambda^{p+n-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda\left(a+\sum_{j=1}^{n} x_j\right)}, & \\ & \text{je-li } x_1, \ldots, x_n > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{8}$$

Na základě toho náhodného výběru $\mathbf{X}$ z rozdělení s hustotou (1) provedeme odhad spolehlivosti (3). Budeme studovat tři různé odhady.

- *Nejlepší nestranný odhad*

$$\hat{R}_1 = \begin{cases} (1 - \frac{1}{nT_n})^{n-1}, & \text{jestliže } T_n > \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{9}$$

  kde $T_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i$, viz Pugh (1963).

- *Maximálně věrohodný odhad*
  Užijeme-li dobře známého faktu, že T_n je maximálně věrohodný odhad θ. Pak pro maximálně věrohodný odhad (3) dostáváme

$$\hat{R}_2 = \exp(\frac{1}{T_n}). \tag{10}$$

- *Bayesovský odhad*
  V bayesovském přístupu k odhadu předpokládáme, že $\lambda = \theta^{-1}$ je náhodná veličina s hustotou (7). Bayesovský odhad pak dostaneme jako střední hodnotu $\exp(-\lambda)$ vzhledem k aposteriornímu rozdělení. Tedy

$$\hat{R}_3 = \left(\frac{nT_n + a}{nT_n + a + 1}\right)^{n+p}. \tag{11}$$

2 Asymptotický rozvoj pro bayesovské riziko

V tomto odstavci stanovíme asymptotické rozvoje pro bayesovské riziko odhadů uvedených v úvodu. Nejprve uvedeme lemma pro usnadnění výpočtu bayesovského rizika.

Lemma 2.1 *Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou (1). Položme $\lambda = \theta^{-1}$. Potom náhodná veličina*

$$T_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i$$

má hustotu

$$h(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n n^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda n t}, & \text{jestliže } t > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{12}$$

Důkaz: Tvrzení plyne z reprodukční vlastnosti gamma rozdělení. □

Použijeme-li lemma 2.1 a zřejmých úprav, dostáváme pro bayesovská rizika (6) odhadů (9), (10) a (11) dostáváme následující vyjádření:

- *Bayesovské riziko nejlepšího nestranného odhadu.*

$$\begin{aligned} \varrho(q, \widehat{R}_1) &= \int_0^\infty \int_{\frac{1}{n}}^\infty \left[\left(\frac{n\,t-1}{n\,t} \right)^{n-1} - e^{-\lambda} \right]^2 h(t,\lambda)\, q(\lambda)\, dt\, d\lambda = \\ &= \frac{a^p\, n^n\, \Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_{\frac{1}{n}}^\infty \left[\left(\frac{n\,t-1}{n\,t} \right)^{2(n-1)} \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a)^{n+p}} - 2 \left(\frac{n\,t-1}{n\,t} \right)^{n-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+1)^{n+p}} + \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+2)^{n+p}} \right] dt = \\ &= \frac{a^p\, \Gamma(n+p)}{n^p\, \Gamma(n)\, \Gamma(p)} \int_0^\infty \left[\frac{x^{p-1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \left(1+\frac{x(a+1)}{n}\right)^{n+p}} + \frac{x^{p-1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{x(a+3)}{n}\right)^{n+p}} \right] dx - \\ &\quad -2\, \frac{a^p}{(a+2)^p}. \end{aligned} \tag{13}$$

- *Bayesovské riziko maximálně věrohodného odhadu.*

$$\begin{aligned} \varrho(q, \widehat{R}_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[e^{-\frac{1}{t}} - e^{-\lambda} \right]^2 h(t,\lambda)\, q(\lambda)\, dt\, d\lambda = \\ &= \frac{a^p\, n^n\, \Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{2}{t}} \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a)^{n+p}} - 2\, e^{-\frac{1}{t}} \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+1)^{n+p}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+2)^{n+p}} \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^p\Gamma(n+p)}{n^p\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^\infty \left[e^{-2x} \frac{x^{p-1}}{\left(1+\frac{ax}{n}\right)^{n+p}} - 2\,e^{-x} \frac{x^{p-1}}{\left(1+\frac{(a+1)x}{n}\right)^{n+p}} \right] dx +$$

$$+ \left(\frac{a}{a+2}\right)^p. \tag{14}$$

- *Bayesovské riziko bayesovského odhadu*

$$\varrho(q,\hat{R}_3) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(\frac{n\,t+a}{n\,t+a+1}\right)^{2(n-1)} - e^{-\lambda} \right]^2 h(t,\lambda)\, q(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{a^p\, n^n\, \Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_0^\infty \left[\left(\frac{n\,t+a}{n\,t+a+1}\right)^{2(n+p)} \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a)^{n+p}} - \right.$$

$$\left. -2 \left(\frac{n\,t+a}{n\,t+a+1}\right)^{n+p} \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+1)^{n+p}} + \frac{t^{n-1}}{(n\,t+a+2)^{n+p}} \right] dt =$$

$$= \left(\frac{a}{a+2}\right)^p - \frac{a^p\,\Gamma(n+p)}{n^p\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(1+\frac{ax}{n}\right)^{n+p}}{\left(1+\frac{(a+1)x}{n}\right)^{2(n+p)}}\, dx. \tag{15}$$

Nyní využijeme tato vyjádření ke stanovení asymptotických rozvojů pro bayesovská rizika odhadů $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ a $\hat{R}_3$ pro $n \to \infty$. Princip nalezení asymptotických rozvojů spočívá v nalezení Taylorových rozvojů integrandů v integrálech (13), (14) a (15) podle $1/n$ v bodě 0.

Věta 2.1 *Nechť*

$$\varrho_1(q,R_1) := \frac{a^p\,(p+1)\,p}{(a+2)^{p+2}} \tag{16}$$

$$\varrho_2(q,R_1) := \frac{a^p\,p\,(1+p)\,(6+8\,a+4\,a^2-3\,p-4\,a\,p+p^2)}{2\,(2+a)^{4+p}}, \tag{17}$$

$$\varrho_1(q,R_2) := \frac{a^p\,(p+1)\,p}{(a+2)^{p+2}}, \tag{18}$$

$$\varrho_2(q,R_2) := \frac{a^p\,p\,(1+p)\,(10+24\,a+20\,a^2-21\,p-28\,a\,p+7\,p^2)}{4\,(2+a)^{4+p}}, \tag{19}$$

$$\varrho_1(q,R_3) := \frac{a^p\,(p+1)\,p}{(a+2)^{p+2}}, \tag{20}$$

$$\varrho_2(q,R_3) := -\frac{a^p\,p\,(1+p)\,(-2+2\,a^2+5\,p+4\,a\,p+2\,a^2\,p+p^2)}{2\,(2+a)^{4+p}}. \tag{21}$$

Potom pro $n \to \infty$ platí

$$\varrho(q,R_i) = \frac{\varrho_1(q,R_i)}{n} + \frac{\varrho_2(q,R_i)}{n^2} + o(n^{-2}), \quad i = 1,\,2,\,3. \tag{22}$$

Důkaz: Vzhledem k technické náročnosti a rozsáhlosti důkazu, nebudeme důkaz provádět. Důkaz je možné nalézt v práci Linka, Brzezina (1994). □

Vzhledem k tomu, že odhady $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2$ a $\widehat{R}_3$ jsou silně asymptoticky eficientní vzhledem k střední kvadratické odchylce, věta potvrzuje hypotézu, že asymptotické rozvoje bayesovského rizika pro odhady $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2$ a $\widehat{R}_3$ budou mít tvar (22), tj. koeficient u $1/n$ je pro všechny odhady stejný, a tedy můžeme odhady porovnat na základě asymptotické deficience.

3 Asymptotická deficience odhadů

Pro detailní porovnání $\widehat{R}_i$ můžeme užít deficienci (viz Hodges, Lehmann (1970)). Zhruba řečeno deficience znamená o kolik více (nebo méně) pozorování vyžaduje odhad B, má-li mít stejnou čtvercovou odchylku jako odhad A založený na výběru rozsahu n. V praxi se obvykle užívá asymptotická deficience pro $n \to \infty$. Jestliže označíme $\varrho_n(A,n), \varrho_n(B,n)$ bayesovská rizika odhadů a platí

$$\varrho_n(A,q) = \frac{a}{n^r} + \frac{b}{n^{(r+1)}} + o(n^{-(r+1)}), \tag{23}$$

$$\varrho_n(B,q) = \frac{a}{n^r} + \frac{c}{n^{(r+1)}} + o(n^{-(r+1)}), \tag{24}$$

pak asymptotická deficience B vzhledem k A je rovna

$$d_\varrho^{BA} = \frac{c-b}{ar}. \tag{25}$$

Věta 3.1 *Pro asymptotickou deficienci odhadů $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2$ a $\widehat{R}_3$ (vzhledem k bayesovskému riziku) platí*

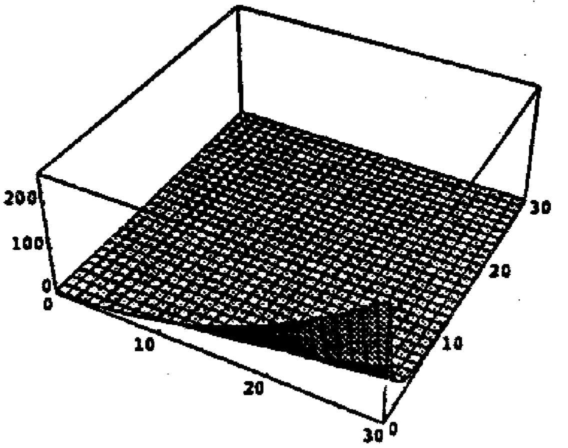
$$d_\varrho^{\widehat{R}_3\widehat{R}_2}(p,a) = \frac{-6-24\,a-24\,a^2+11\,p+20\,a\,p-4\,a^2\,p-9\,p^2}{4\,(a+2)^2}, \tag{26}$$

$$d_\varrho^{\widehat{R}_3\widehat{R}_1}(p,a) = \frac{-2-4\,a-3\,a^2-p-a^2\,p-9p^2}{(a+2)^2}, \tag{27}$$

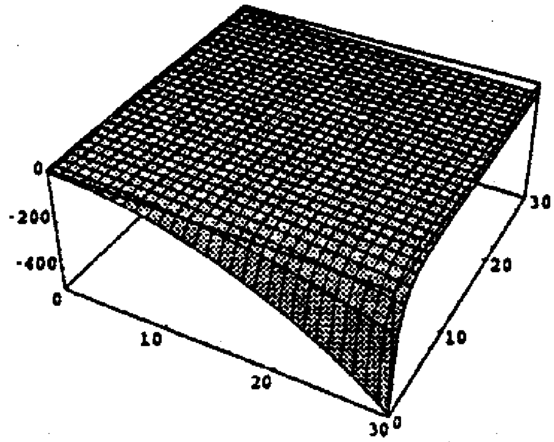
$$d_\varrho^{\widehat{R}_2\widehat{R}_1}(p,a) = \frac{-2+8\,a+12\,a^2-15\,p-20\,a\,p+5\,p^2}{4\,(a+2)^2}. \tag{28}$$

Důkaz: Tvrzení věty plyne bezprostředně po dosazení do vztahů (16) - (21) do vztahu (25). □

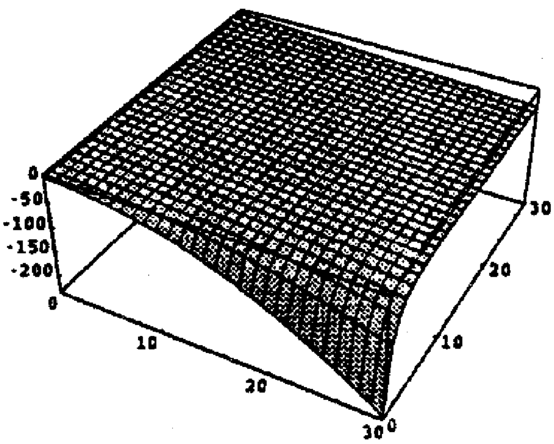
Nyní ukážeme grafické srovnání odhadů $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2$ a $\widehat{R}_3$ pomocí asymptotických deficiencí. Následující grafy znázorňují asymptotické deficience (26), (27) a (28) pro $p \in (0,30)$ a $a \in (0,30)$.



Obr.1 $d_{\varrho}^{\widehat{R}_2\widehat{R}_1}(p,a)$



Obr.2 $d_{\varrho}^{\widehat{R}_3\widehat{R}_1}(p,a)$



Obr.3 $d_{\varrho}^{\widehat{R}_3\widehat{R}_2}(p,a)$

Z grafů vyplývá, že odhady jsou „rovnocenné" ve smyslu bayesovského rizika při „rozumné" volbě apriorních parametrů p a a. Získané teoretické výsledky jsou ve shodě s numerickou studií uvedenou v práci Linka (1992).

Poznámka 3.1 Obdobnou problematikou asymptotických rozvojů, ale pro riziko uvedených odhadů $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2$ a $\widehat{R}_3$ se zabývají práce Hurt (1976) a Chao (1981) (pro kvadratickou ztrátovou funkci) a Harris, Soms (1988) (pro atypické ztrátové funkce).

PODĚKOVÁNÍ. Tento článek vznikl během pobytu na Universidad Polytecnica Valencia a na Matematickém ústavu Erlangenské univerzity. Pobyt ve Valencii byl uskutečněn v rámci projektu Tempus JEP 2194. Pobyt v Erlangen byl financován Ostravskou univertzitou. Za všestrannou pomoc a podporu při vzniku této práce děkují autoři Jaromíru Antochovi.

Literatura

Harris, B., Soms, A. (1988). Sensitivity and asymtotic properties of Bayesian reliability estimates. Statistics Decisions, 33-47.

Chao, A. (1981). Approximate Mean Squard Error of Estimators of Reliaability for k-out-of-m Systems in the Independent Exponencial Case. JASA 375, 720-724.

Hurt, J. (1976): On estimation of reliability in exponencial case. Aplikace matematiky 21, 263-272.

Hodges, J. L., Lehmannn, E. L. (1970). Deficiency. Ann. Math. Stat. 41, 783-801.

Linka A. (1992) Asymptotické rozvoje rizikových funkcí odhadů spolehlivosti. Sborník letní školy JČMF Robust 92, 109-115.

Linka, A., Brzezina, M. (1994) On Bayes risk. VŠST Liberec. (Preprint.)

Pugh, E.. L. (1963). The best estimate of reliability in exponencial case. Oper. Res. 11/17, 57-61.

Aleš Linka, Miroslav Brzezina
katedra matematiky VŠST
Hálkova 6
461 17 Liberec