Eficientní odhady a kompenzátor zobecněného bodového procesu

Petr Lachout

1 Konstrukce eficientních odhadů

Při odhadování parametrů zvoleného modelu je třeba umět nalézt odhad, který nejlépe vyhovuje dané situaci. Jedním z kritérií porovnávající různé odhady je jejich eficience. To znamená, že máme zadánu třídu vhodných odhadů a hledáme mezi nimi ten, který má nejmenší asymptotický rozptyl. Eficientní odhad zaručuje, že informace obsažená v datech bude využita, co nejhospodárněji. Otázkou je však, jak takové odhady získávat. Jedním z možných postupů pro vyhledávání eficientních odhadů je metodika vyvinutá v Coxově regresním modelu a zobecněná v článku Greenwood & Wefelmeyer (1992). Tato metoda je založena na správné volbě empirického procesu, tak aby kompenzátor souvisel přímo s odhadovaným parametrem. Tento postup vychází z následující situace.

Předpoklady: Pozorujeme zobecněný bodový proces $(T_1, X_1), (T_2, X_2), ...$, kde T_i je rostoucí posloupnost náhodných časů. $T_i \xrightarrow[i \to +\infty]{s.j.} +\infty$ a $X_i \in E$ jsou naměřené hodnoty (také náhodné) v těchto časech.

Zobecněný bodový proces určuje dva systémy σ-algeber

$$\mathcal{F}_t = \sigma(T_j I[T_j \le t], X_j I[T_j \le t], j = 1, 2, 3, ...) \text{ pro } t \ge 0\,, \tag{1}$$

$$\mathcal{G}_i = \sigma(T_j, X_j, j = 1, 2, ..., i) \text{ pro } i \in N. \tag{2}$$

Pravděpodobnostní rozdělení zobecněného bodového procesu $(T_i, X_i), i \in N$ budeme označovat P.

Zobecněné bodové procesy studoval Jacod(1975) a další použití lze nalézt v knize Jacod & Shiryaev(1987). Zejména je důležitý fakt, že umíme vypočíst kompenzátor tohoto procesu. Toho využívá Greenwood & Wefelmeyer

(1992) k odvození obecné metody pro hledání eficientních odhadů. Popišme v krátkosti jejich postup.

Uvažujeme některou charakteristiku zobecněného bodového procesu. Tato charakteristika je vyjádřena danou predikovatelnou funkcí $g(\omega, t, x)$; t.j. její hodnota závisí pouze na minulosti do času t. Pozorujeme tedy empirický proces $X_t g = \sum_{i=1}^{\infty} g(T_i, X_i) I[T_i \leq t]$ pro $t \geq 0$. Podle Jacod & Shiryaev můžeme vypočíst kompenzátor $Q_t g$ následovně.

Nejprve napočteme procesy ${}^i\varphi_t, {}^i\psi_t g$, tak že

$$ {}^i\varphi_t = E[I[T_i \geq t]/\mathcal{G}_{i-1}] \,, \; {}^i\psi_t g = E[g(T_i, X_i) I[T_i \leq t]/\mathcal{G}_{i-1}] \text{ s.j.} \tag{3} $$

a proces ${}^i\varphi_t$ je spojitý zleva a proces ${}^i\psi_t g$ spojitý zprava. Potom kompenzátor pro i-tý sčítanec je

$$ {}^iQ_t g = \int_{(T_{i-1}, T_i \wedge t]} \frac{1}{{}^i\varphi_t} d\,{}^i\psi_t g \,, \tag{4} $$

kde integrál je Lebesgue-Stieltjesův integrál pro každé $\omega \in \Omega$ zvlášť. Kompenzátor celého procesu $X_t g$ pak má tvar

$$ Q_t g = \sum_{i=1}^{\infty} {}^iQ_t g \,. \tag{5} $$

Metoda pro hledání eficientních odhadů navržená v článku Greenwood & Wefelmeyer vypadá takto. Je dána množina H omezených predikovatelných funkcí $h(\omega, t, x)$ a posloupnost čísel $r_n > 0$, $r_n \to +\infty$ tak, že je splněno:

(i) Množina H tvoří lineární prostor.

(ii) Pro každé $h \in H, \varepsilon > 0$ je

$$ \frac{1}{r_n^2} Q_n(h^2 I[|h| > \varepsilon r_n]) \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0 \,. $$

(iii) Pro každé $h, \tilde{h} \in H$ lze psát

$$ \frac{1}{r_n^2} Q_n(h\tilde{h}) \xrightarrow[n \to +\infty]{P} (h, \tilde{h}) \,, $$

kde $(h, \tilde{h})$ jsou vhodná reálná čísla.

Pro $h \in H$ definujeme defekt $d(h)$, jako limitu

$$\frac{1}{r_n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{0<{}^i\varphi_s} \frac{(\Delta^i\psi_s h)^2}{{}^i\varphi_s} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} d(h) , \tag{6}$$

kde $\Delta f(s) = f(s) - f(s-)$ pro zprava spojitou funkci f, a položme

$$V(h) = (h, h) - d(h) . \tag{7}$$

Hodnota $V(h)$ je vždy nezáporná; viz. Lachout (1993).

Označme si ještě jako H_0 množinu všech funkcí $h \in H$ s vlastností, že pro dostatečně velká n existuje pravděpodobnostní míra P^{nh} určená následující vlastností. Když se náhodná posloupnost (T_i^{nh}, X_i^{nh}) řídí rozdělením P^{nh}, pak proces $X_t^{nh}g = \sum_{i=1}^{\infty} g(T_i^{nh}, X_i^{nh}) I[T_i \leq t]$ má za kompenzátor přesně proces $Q_t(g + \frac{1}{r_n} gh)$, pro každou omezenou predikovatelnou funkci $g(\omega, t, x)$. Poznamenejme, že míra P^{nh} je podmínkou určena jednoznačně. Množinu H_0 nazýváme množinou lokální změny parametrů.

Naším úkolem je nalézt eficientní odhad pro kvantitu $r_n^{-2} Q_n f$ kde f je zadaná funkce z množiny H s $V(f) > 0$. Jako odhad používáme funkcionál S_n závisející pouze na datech naměřených do času n, t.j. předpokládáme jej ve tvaru $S_n h = S_n h(T_i I[T_i \leq n], X_i I[T_i \leq n], i \in N)$. Dále uvažujeme, že jde o "rozumný" odhad. Předpokládáme, že je regulární pro odhadovanou kvantitu $r_n^{-2} Q_n f$, což znamená, že

$$r_n \left(S_n^{nh} f - \frac{1}{r_n^2} Q_n (f + \frac{1}{r_n} fh) \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} L \tag{8}$$

pro každé $h \in H_0$, přičemž L na h nezávisí a $S_n^{nh} g = S_n g((T_i^{nh}, X_i^{nh}), i \in N)$; kde náhodná posloupnost (T_i^{nh}, X_i^{nh}) se řídí rozdělením P^{nh}. De facto jde o to, aby odhad byl schopen sledovat předepsanou lokální změnu odhadovaného parametru.

Greenwood & Wefelmeyer ukazují, že v případě, kdy zobecněný bodový proces nemá žádný pevný skok nebo naopak $T_i \equiv i$ pro všechna i zároveň, pak odhad $\hat{S}_n g = r_n^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} g(T_i, X_i) I[T_i \leq t]$ je eficientní ve třídě všech regulárních odhadů. To znamená, že má nejmenší asymptotický rozptyl ze všech regulárních odhadů. Navíc platí, že

$$r_n(\hat{S}_n f - \frac{1}{r_n^2} Q_n f) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} N(0, V(f)) . \tag{9}$$

Zdá se, že stejný výsledek bude platit obecněji. Funkce $h \in H$ by mohli být uvažovány i neomezené, ale s konečným čtvrtým momentem. Na funkci $f \in H$ bychom navíc ještě kladli podmínku existence konečného defektu $d(h)$; t.j. že limita v (6) existuje konečná. Zatím však jde pouze o hypotézu, která ještě nebyla dokázána.

2 Příklady použití

V této kapitole se zaměříme na předvedení teoretického odvozovacího postupu v některých konkrétních případech.

2.1 Nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny

Začněme nejjednodušším případem, a to nezávislými stejně rozdělenými náhodnými veličinami. To znamená, že $T_i \equiv i$ a $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené n.v. se společnou distribuční funkcí F. Volíme $r_n = \sqrt{n}$ a množinu H tak, že $h \in H$ je reprezentováno omezenou měřitelnou nenáhodnou funkcí $\hat{h}$ ve smyslu $h(\omega, t, x) = \hat{h}(x)$.

Pak okamžitě zjistíme, že

$$X_t h = \sum_{i=1}^{[t]} \hat{h}(X_i) \ , \ {}^i\varphi_t = I[t \le i] \ , \ {}^i\psi_t h = E\hat{h}(X) I[i \le t] \ ,$$

$${}^iQ_t h = E\hat{h}(X) I[t \ge i] \text{ a } Q_t h = [t] E\hat{h}(X) \ .$$

Dále

- Množina H je lineární prostor.
- Vezměme $h \in H$, $\varepsilon > 0$ a počítejme

$$\frac{1}{n} Q_n(h^2 I[|h| > \varepsilon\sqrt{n}]) = E\left[\hat{h}(X)^2 I[|\hat{h}(X)| > \varepsilon\sqrt{n}]\right] \le$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} E|\hat{h}(X)|^3 \longrightarrow 0 .$$

- Vezměme $h, g \in H$ a povšimněme si, že

$$\frac{1}{n} Q_n(hg) = E\hat{h}(X)\hat{g}(X) \stackrel{def}{=} (h, g) .$$

- Navíc ještě $\Delta^i \psi_t h = E\hat{h}(X)I[t = i]$ a tak $d(h) = \left(E\hat{h}(X)\right)^2$,
$V(h) = E\hat{h}(X)^2 - \left(E\hat{h}(X)\right)^2 = \operatorname{var} \hat{h}(X)$.

Ověřili jsme teoretické předpoklady a tak můžeme použít výsledků z práce Greenwood & Wefelmeyer. Vezmeme-li omezenou měřitelnou funkci f, $\operatorname{var} f(X) > 0$ pak odhad $\hat{S}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ je eficientní odhad pro střední hodnotu $Ef(X)$ a platí

$$\sqrt{n}\left(\hat{S}_n - Ef(X)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} N(0, \operatorname{var} f(X)) .$$

$\hat{S}_n$ je eficientní mezi všemi odhady regulárními pro $Ef(X)$, t.j. mezi všemi odhady $S_n(x_1, ..., x_n)$ s vlastností, že pro každou omezenou měřitelnou funkci g , $Eg(X) = 0$ platí

$$\sqrt{n}\left(S_n(X_1^{ng}, ..., X_n^{ng}) - Ef(X)(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g(X))\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} L$$

přičemž $X_1^{ng}, ..., X_n^{ng}$ jsou opět nezávislé stejně rozdělené, ale jejich rozdělení je změněno

$$F^{ng}(x) = \int_{(-\infty, x)} (1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g(x)) dF(x) .$$

2.2 Markovské řetězce

Nyní uvažujme nerozložitelný Markovský řetězec s konečnou množinou stavů I a pravděpodobnostmi přechodu $p(x, y)$. Takovýto řetězec má vždy jednoznačně určené stacionární rozdělení; označme jej π. Sledovaný proces je pak $T_i \equiv i$ a $X_0, X_1, X_2, ...$ je náš Markovský řetězec. Volíme $r_n = \sqrt{n}$ a množinu

H tak, že $h \in H$ je reprezentováno nenáhodnou funkcí $\hat{h} : I \times I \to R$ ve smyslu $h(\omega, t, x) = \hat{h}(X_{i-1}, x)$ pokud $i - 1 < t \leq i$.

Pak pro $h \in H$ zjišťujeme, že

$$X_t h = \sum_{i=1}^{[t]} \hat{h}(X_{i-1}, X_i) \ , \ {}^i\varphi_t = I[t \leq i] \ ,$$

$${}^i\psi_t h = \sum_{y \in I} \hat{h}(X_{i-1}, y) p(X_{i-1}, y) I[i \leq t] \ ,$$

$${}^i Q_t h = \sum_{y \in I} \hat{h}(X_{i-1}, y) p(X_{i-1}, y) I[i \leq t] \ ,$$

$$Q_t h = \sum_{i=1}^{[t]} \sum_{y \in I} \hat{h}(X_{i-1}, y) p(X_{i-1}, y) \ .$$

Dále

- Množina H je lineární prostor.
- Vezměme $h \in H$, $\varepsilon > 0$ a počítejme

$$\frac{1}{n} Q_n(h^2 I[|h| > \varepsilon\sqrt{n}]) \leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \frac{1}{n} Q_n(|h|^3) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{y \in I} |\hat{h}(X_{i-1}, y)|^3 p(X_{i-1}, y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} W^3 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ .$$

- Vezměme $h, g \in H$ a povšimněme si, že

$$\frac{1}{n} Q_n(hg) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{y \in I} \hat{h}(X_{i-1}, y) \hat{g}(X_{i-1}, y) p(X_{i-1}, y) \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.}$$

$$\sum_{x,y \in I} \hat{h}(x, y) \hat{g}(x, y) p(x, y) \pi(x) = E_{\pi,p} \hat{h}(Y_0, Y_1) \hat{g}(Y_0, Y_1) \stackrel{def}{=} (h, g) \ .$$

- Navíc ještě $\Delta^i\psi_t h = \sum_{y\in I}\hat{h}(X_{i-1},y)p(X_{i-1},y)I[t=i]$ a tak

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{y\in I}\hat{h}(X_{i-1},y)p(X_{i-1},y)\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.}$$

$$\sum_{x\in I}\left(\sum_{y\in I}\hat{h}(x,y)p(x,y)\right)^2\pi(x) = E_\pi(E_p[\hat{h}(Y_0,Y_1)/Y_0])^2 \stackrel{def}{=} d(h)\ ,$$

$$V(h) = \sum_{x\in I}\left(\sum_{y\in I}\hat{h}(x,y)^2p(x,y) - (\sum_{y\in I}\hat{h}(x,y)p(x,y))^2\right)\pi(x) =$$

$$= E_\pi \mathrm{var}_p[\hat{h}(Y_0,Y_1)/Y_0]\ .$$

Předpoklady teoretického výsledku jsou splněny a tak podle něj dostaneme. Vezmeme-li funkci $f: I\times I\to R$, $E_\pi\mathrm{var}_p[f(Y_0,Y_1)/Y_0] > 0$ pak odhad $\hat{S}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n f(X_{i-1},X_i)$ je eficientní odhad pro kvantitu $n^{-1}\sum_{i=1}^n\sum_{y\in I}f(X_{i-1},y)p(X_{i-1},y)$ a platí

$$\sqrt{n}\left(\hat{S}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{y\in I}f(X_{i-1},y)p(X_{i-1},y)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} N(0, E_\pi\mathrm{var}_p[f(Y_0,Y_1)/Y_0])\ .$$

Dále víme, že $\hat{S}_n$ je eficientní mezi všemi odhady regulárními pro kvantitu $n^{-1}\sum_{i=1}^n\sum_{y\in I}f(X_{i-1},y)p(X_{i-1},y)$, t.j. mezi všemi odhady $S_n(x_0,\dots,x_n)$ s vlastností, že pro každou funkci $g: I\times I\to R$ takovou, že pro každé $x\in I$ je $\sum_{y\in I}g(x,y)p(x,y) = E_p[g(Y_0,Y_1)/Y_0 = x] = 0$, platí

$$\sqrt{n}\left(S_n(X_0^{ng},\dots,X_n^{ng}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{y\in I}f(X_{i-1}^{ng},y)(1+\frac{1}{\sqrt{n}}g(X_{i-1}^{ng},y))p(X_{i-1}^{ng},y)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} L$$

přičemž $X_0^{ng},\dots,X_n^{ng}$ tvoří opět Markovský řetězec, ale s pravděpodobnostmi přechodu

$$p^{ng}(x,y) = (1+\frac{1}{\sqrt{n}}g(x,y))p(x,y)\ .$$

2.3 Poissonův proces

V obou předchozích případech jsou pozorované časy nenáhodné. Poissonův proces na $[0,+\infty)$ je již příkladem, kde jsou časy opravdu náhodné veličiny. To znamená, že $T_1, T_2-T_1, T_3-T_2, \ldots.$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s neznámou kladnou intenzitou λ a $X_i \equiv 1$. Pro zjednodušení zápisu budeme využívat konvenci $T_0 \equiv 0$. Volíme $r_n = \sqrt{n}$ a množinu H tak, že $h \in H$ je reprezentováno omezenou měřitelnou nenáhodnou funkcí $\hat{h} : [0,+\infty) \to R$ ve smyslu

$$h(\omega,t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{h}(t-T_{i-1}) I[T_{i-1} < t \le T_i] \,.$$

Pak pro $h \in H$ máme

$$X_t h = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{h}(T_i - T_{i-1}) I[T_i \le t] \;,\; {}^i\varphi_t = \exp\{-\lambda(t-T_{i-1})_+\} \;,$$

$${}^i\psi_t h = \lambda \int_0^{(t-T_{i-1})_+} \hat{h}(y) e^{-\lambda y} dy \;,\; {}^iQ_t h = \lambda \int_0^{(T_i \wedge t - T_{i-1})_+} \hat{h}(y) dy \;,$$

$$Q_t h = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{(T_i \wedge t - T_{i-1})_+} \hat{h}(y) dy =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{(T_j - T_{j-1})} \hat{h}(y) dy + \int_0^{(t-T_{i-1})} \hat{h}(y) dy \right] I[T_{i-1} < t \le T_i] \,.$$

Dále

- Množina H je lineární prostor.
- Vezměme $h \in H$, $\varepsilon > 0$ a počítejme

$$\frac{1}{n} Q_n(h^2 I[|h| > \varepsilon\sqrt{n}]) \le \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \frac{1}{n} Q_n(|h|^3) =$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \frac{1}{n} \lambda W^3 n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \,.$$

- Vezměme $h, g \in H$ a povšimněme si, že

$$\frac{1}{n}Q_n(hg) = \frac{1}{n}\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{(T_j - T_{j-1})} \hat{h}(y)\hat{g}(y)dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^{(n-T_{i-1})} \hat{h}(y)\hat{g}(y)dy \right] I[T_{i-1} < n \leq T_i] \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.}$$

$$\lambda^2 \int_0^{+\infty} \hat{h}(y)\hat{g}(y)e^{-\lambda y}dy \overset{def}{=} (h, g) \ .$$

- Navíc ještě $\Delta' \psi_t h \equiv 0$ a tak $d(h) = 0$,
  $V(h) = (h, h) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} \hat{h}^2(y)e^{-\lambda y}dy$.

Předpoklady, které vyžaduje teoretický postup Greenwood & Wefelmeyer, jsou splněny. Můžeme proto jejich výsledek použít a zjistíme následující. Vezmeme-li omezenou měřitelnou funkci $f : [0, +\infty) \to R$, která je nenulová na množině kladné Lebesgueovy míry, pak odhad

$$\hat{S}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} f(T_i - T_{i-1}) \ I[T_i \leq n]$$

je eficientní odhad pro kvantitu

$$\frac{1}{n}\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{(T_i \wedge n - T_{i-1})+} \hat{h}(y)dy$$

a platí

$$\sqrt{n} \left(\hat{S}_n - \frac{1}{n}\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{(T_i \wedge n - T_{i-1})+} \hat{h}(y)dy \right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} N(0, \lambda^2 \int_0^{+\infty} f^2(y)e^{-\lambda y}dy \ ) \ .$$

$\hat{S}_n$ je eficientní mezi všemi odhady regulárními pro danou kvantitu, t.j. mezi všemi odhady $S_n(t_i I[t_i \leq n], i \in N)$ s vlastností, že pro každou omezenou měřitelnou funkci $g : [0, +\infty) \to R$ platí

$$\sqrt{n} \left(S_n(T_i^{ng} I[T_i^{ng} \leq n], i \in N) - \frac{1}{n}\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{(T_i^{ng} \wedge n - T_{i-1}^{ng})+} \hat{h}(y)(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}g(y))dy \right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} L\,.$$

Přičemž $T_1^{ng}, T_2^{ng} - T_1^{ng}, ..., T_n^{ng} - T_{n-1}^{ng}$ jsou opět nezávislé stejně rozdělené, ale jejich rozdělení je

$$F^{ng}(t) = 1 - \exp\{-\lambda \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g(y))dy\}\,.$$

Pro zajímavost ještě doplňme, že

$$\hat{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \lambda^2 \int_0^{+\infty} f(y)e^{-\lambda y}dy\,.$$

Jiným rozumným odhadem je

$$\tilde{S}_n = \frac{n\hat{S}_n}{\sum_{i=1}^{\infty} I[T_i \le n]} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} f(T_i - T_{i-1})I[T_i \le n]}{\sum_{i=1}^{\infty} I[T_i \le n]}$$

s vlastnostmi

$$\tilde{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \lambda \int_0^{+\infty} f(y)e^{-\lambda y}dy\,,$$

$$\sqrt{n}\left(\tilde{S}_n - \lambda \int_0^{+\infty} f(y)e^{-\lambda y}dy\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}}$$

$$N\left(0, \lambda \int_0^{+\infty} f^2(y)e^{-\lambda y}dy - \lambda^2(\int_0^{+\infty} f(y)e^{-\lambda y}dy)^2\right)\,.$$

2.4 Markovský proces

V této kapitole si všimneme nerozložitelného Markovského procesu X na časovém intervalu $[0, +\infty)$ s konečnou množinou stavů I, maticí intenzit přechodu $Q = (q(x,y); x, y \in I)$. Prvky matice Q jsou nezáporné a pro každý stav $x \in I$ je $q(x,x) > 0$ a platí $\sum_{y \in I - \{x\}} q(x,y) = q(x,x)$. Připomeňme, že takovýto proces má jednoznačně určeno stacionární rozdělení, označme je π. T_i bude označovat čas i-tého přeskoku a pozorovanou hodnotou bude přeskok X_{T_i}. Pro zjednodušení zápisu budeme i zde používat konvence $T_0 \equiv 0$. Dále volíme $r_n = \sqrt{n}$ a množinu funkcí H tak, že predikovatelná funkce $h \in H$ je reprezentována nenáhodnou funkcí $\mathring{h} : I \times I \to R$ ve smyslu formule

$h(\omega,t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{h}(X_{T_{i-1}},x)I[T_{i-1} < t \leq T_i]$. Poznamenejme, že funkce $\hat{h}$ bude ohodnocovat přeskoky Markovského procesu. Nebude proto záležet na jejích hodnotách při shodných argumentech.

Rozdělení zobecněného bodového procesu $(0,X_0),(T_1,X_{T_1}),(T_2,X_{T_2}),\ldots$ je určeno rekurentně pomocí podmíněných rozdělení. Rozdělení X_0 má zadané počáteční rozdělení. Doba čekání na $i+1$ přeskok; t.j. $T_{i+1} - T_i$; má za podmínky $X_0,(T_1,X_{T_1}),\ldots,(T_i,X_{T_i})$ exponenciální rozdělení s intenzitou $q(X_{T_i},X_{T_i})$. Rozdělení $X_{T_{i+1}}$ za podmínky $X_0,(T_1,X_{T_1}),\ldots,(T_i,X_{T_i}),T_{i+1}$ závisí pouze na X_{T_i}, a to $P(X_{T_{i+1}} = x|X_{T_i}) = \frac{q(X_{T_i},x)}{q(X_{T_i},X_{T_i})}$ pro $x \in I$, $x \neq X_{T_i}$. Protože jde o přeskok, je vždy nutně $X_{T_{i+1}} \neq X_{T_i}$! Pro bližší seznámení s Markovskými procesy lze doporučit skripta Dupač & Dupačová(1980).

Pak pro $h \in H$ zjišťujeme, že

$$X_t h = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{h}(X_{T_{i-1}},X_{T_i})\ I[T_i \leq t]\ ,$$

$${}^i\varphi_t = \exp\{-q(X_{T_{i-1}},X_{T_{i-1}})(t-T_{i-1})_+\}\ ,$$

$${}^i\psi_t h = (1 - {}^i\varphi_t) \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} \hat{h}(X_{T_{i-1}},y)\frac{q(X_{T_{i-1}},y)}{q(X_{T_{i-1}},X_{T_{i-1}})}\ ,$$

$${}^iQ_t h = (T_i \wedge t - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} \hat{h}(X_{T_{i-1}},y)q(X_{T_{i-1}},y)\ ,$$

$$Q_t h = \sum_{i=1}^{\infty}(T_i \wedge t - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} \hat{h}(X_{T_{i-1}},y)q(X_{T_{i-1}},y)\ .$$

Dále

- Množina H je lineární prostor.
- Vezměme $h \in H$, $\varepsilon > 0$ a počítejme

$$\frac{1}{n}Q_n(h^2 I[|h| > \varepsilon\sqrt{n}]) \leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\frac{1}{n}Q_n(|h|^3) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}(T_i \wedge n - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} |\hat{h}(X_{T_{i-1}},y)|^3 q(X_{T_{i-1}},y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} W^3 \sum_{x \in I} q(x,x) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} n I[T_{i-1} < n \leq T_i] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

- Vezměme $h, g \in H$ a povšimněme si, že

$$\frac{1}{n} Q_n(hg) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} (T_i \wedge n - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} \hat{h}(X_{T_{i-1}}, y) \hat{g}(X_{T_{i-1}}, y) q(X_{T_{i-1}}, y)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} \sum_{x \in I} \sum_{y \in I - \{x\}} \hat{h}(x,y) \hat{g}(x,y) q(x,y) \pi(x) \overset{def}{=} (h,g) .$$

- Navíc ještě $\Delta^i \psi_t h \equiv 0$ a tak $d(h) = 0$,

$$V(h) = (h,h) = \sum_{x \in I} \sum_{y \in I - \{x\}} \hat{h}(x,y)^2 q(x,y) \pi(x) .$$

Předpoklady teoretického výsledku jsou splněny a tak podle něj dostaneme. Vezmeme-li funkci $f : I \times I \to R$, která je alespoň pro jednu dvojici $x, y \in I$, $x \neq y$ nenulová, pak $\hat{S}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} f(X_{T_{i-1}}, X_{T_i}) I[T_i \leq n]$ je eficientní odhad pro kvantitu
$n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (T_i \wedge n - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} f(X_{T_{i-1}}, y) q(X_{T_{i-1}}, y)$ a platí

$$\sqrt{n} \left(\hat{S}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} (T_i \wedge n - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} f(X_{T_{i-1}}, y) q(X_{T_{i-1}}, y) \right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} N(0, \sum_{x \in I} \sum_{y \in I - \{x\}} f(x,y)^2 q(x,y) \pi(x)) .$$

Dále víme, že $\hat{S}_n$ je eficientní mezi všemi odhady regulárními pro kvantitu $n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (T_i \wedge n - T_{i-1})_+ \sum_{y \in I - \{X_{T_{i-1}}\}} f(X_{T_{i-1}}, y) q(X_{T_{i-1}}, y)$, t.j. mezi všemi odhady $S_n(T_i I[T_i \leq n], X_{T_i} I[T_i \leq n], i \in N)$, které navíc splňují, že pro každou funkci $g : I \times I \to R$ s vlastností, že pro každé $x \in I$ je splněna rovnost $\sum_{y \in I - \{x\}} g(x,y) q(x,y) = g(x,x) q(x,x)$, platí

$$\sqrt{n} \left(S_n(X_0^{ng}, ..., X_n^{ng}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} (T_i^{ng} \wedge n - T_{i-1}^{ng})_+ \right.$$

$$\sum_{y\in I-\{X_{T_{i-1}}\}} f(X^{ng}_{T^{ng}_{i-1}}, y)(1+\frac{1}{\sqrt{n}}g(X^{ng}_{T^{ng}_{i-1}}, y))q(X^{ng}_{T^{ng}_{i-1}}, y)\Bigg)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} L$$

přičemž $(X^{ng}_t, t \geq 0)$ tvoří opět nerozložitelný Markovský proces s intenzitami přechodu

$$q^{ng}(x,y) = (1+\frac{1}{\sqrt{n}}g(x,y))q(x,y)\ .$$

References

[1] V. Dupač and J. Dupačová. *Markovovy procesy II.* skripta MFF UK, Praha, 1980.

[2] P.E. Greenwood and W. Wefelmeyer. *Optimality properties of empirical estimators for multivariate point processes.* Preprints in Statistics 137, Mathematical Institute, University of Cologne, September 1992.

[3] J. Jacod. Multivariate point processes: predictable projection. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 31:235–253, 1975.

[4] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[5] P.Lachout. A study on multivariate point processes. (*zasláno do Stochastic Processes and Their Applications*).