SPOLEHLIVOST SYSTÉMŮ SE SPOČETNĚ MNOHA PRVKY

PETR VESELÝ

Jak jenom básníci jejich půvabu
mohou odolat?
Zmínku o nich ve sbírkách veršů
marně jsem hledala
po celý rok.

Li Čching-Čao

1. ÚVOD

Významnou část teorie spolehlivosti tvoří analýza dvoustavových systémů (základní informace lze nalézt například v [1]). Studium těchto systémů se přitom vždy omezuje na systémy složené z konečně mnoha prvků. Cílem tohoto příspěvku je ukázat, že může být užitečné a zajímavé uvažovat systémy složené z nekonečně (přesněji spočetně) mnoha prvků a konečné systémy považovat za jejich zvláštní případ. Důvody vedoucí k takovému přístupu jsou následující:

(1) Množina nekonečných systémů je přirozeným zúplněním množiny konečných systémů. To umožňuje snažší a elegantnější zvládnutí řady důkazů. Navíc se některé vlastnosti konečných systémů objeví v novém světle (viz odstavec 4).

(2) Nekonečné systémy mohou být vhodným nástrojem pro studium limitních vlastností konečných systémů (viz například tvrzení 5.2) a pro modelování systémů s extrémně velkým počtem prvků (takovým systémem může být třeba krystalová mříž, kde prvky rozumíme jednotlivé atomy mříže).

Většina pojmů a vlastností konečných systémů se přenáší i na nekonečné systémy. Zobecnění jiných vyžaduje jistou opatrnost. Například standardní definice koherentních systémů nemá v nekonečném případě smysl (viz [3]). Naopak, u nekonečných systémů se objevují některé kvalitativně nové vlastnosti, které u konečných systémů nemají obdobu.

Tento příspěvek obsahuje stručný přehled některých vlastností nekonečných systémů a má pouze informativní ráz. Všechny výsledky jsou proto uvedeny bez důkazu (zájemci najdou některé z nich v článcích [2,4] nebo se mohou obrátit přímo na autora). Kromě [3] neví autor bohužel o žádných publikovaných pracích v tomto směru.

2. Popis modelu a základní definice

Nejprve připomeňme obvyklý dvoustavový model. Uvažujme nějaký systém složený z prvků $U_1, \ldots, U_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. U každého prvku rozlišujme pouze dva možné stavy:
stav 1: prvek plní svou funkci (je neporouchaný);
stav 0: prvek neplní svou funkci (je porouchaný).
Rovněž u celého systému rozlišujme pouze tyto dva stavy (systém buď funguje nebo nefunguje). Závislost stavu systému na stavech jeho jednotlivých prvků se popisuje tzv. strukturní funkcí $\Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, kde $\{0,1\}^n$ je množina všech možných konfigurací stavů prvků. Stav prvků v daném časovém okamžiku popisují 0-1 náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$. Stav systému v daném časovém okamžiku je tedy 0-1 náhodná veličina $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$.

V tomto článku budeme dále předpokládat, že systém je složen z nekonečné posloupnosti prvků $U_1, U_2, \ldots$. Všechny možné konfigurace stavů jednotlivých prvků jsou nyní popsány množinou $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Strukturní funkce definujeme následujícím způsobem:

2.1. Definice. Zobrazení $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ se nazývá strukturní funkce, jestliže je měřitelné vzhledem k součinové σ-algebře $\mathcal{B} = \bigotimes_1^\infty \sigma\{0,1\}$. Řekneme, že strukturní funkce Φ je konečná, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ platí implikace $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \;\Rightarrow\; \Phi(x) = \Phi(y)$.

Tento model v sobě zahrnuje strukturní funkce konečných systémů jako speciální případ. Skutečně, každá konečná strukturní funkce $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ popisuje nějaký systém složený z konečného počtu prvků. Je-li naopak $\Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, obvyklá strukturní funkce, pak funkce Φ_∞ definovaná jako

$$\Phi_\infty(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\,,$$

je strukturní funkcí ve smyslu definice 2.1 a přitom popisuje stejný systém jako daná funkce Φ. Všechna tvrzení uvedená v tomto příspěvku tudíž platí i pro obvyklé strukturní funkce $\Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Příklad. Následující zobrazení $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ jsou strukturní funkce:

$$\Phi_1(x) \equiv 0\,, \quad \Phi_2(x) \equiv 1\,,$$
$$\Phi_3(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1 \text{ nebo } x_4 x_5 = 1\,,$$
$$\Phi_4(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; card\{\, i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0 \,\} < \infty\,,$$
$$\Phi_5(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2}{3}\,,$$
$$\Phi_6(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{1}{4}\,.$$

Strukturní funkce Φ_1, Φ_2 a Φ_3 jsou konečné.

Nyní přejděme k definici spolehlivosti systému:

2.3. Definice. Nechť Φ je strukturní funkce a nechť P je pravděpodobnostní míra na $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Hodnotu $h(\Phi, P) = P(\Phi^{-1}(1))$ budeme nazývat spolehlivostí systému Φ.

Poznamenejme, že míru P chápeme jako sdružené rozdělení náhodných veličin X_1, $X_2, \ldots$ popisujících stavy jednotlivých prvků. Můžeme proto také psát $h(\Phi, P) = E\Phi(X_1, X_2, \ldots)$.

Jsou-li všechny prvky navzájem nezávislé a spolehlivost i-tého prvku je rovna p_i (tj. p_i je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X_i je rovna 1), pak budeme sdružené rozdělení náhodných veličin X_1, $X_2, \ldots$ označovat symbolem $\lambda_{(p_i)}$. Je-li $p_i = p$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, pak budeme užívat symbolu λ_p. Formálně:

$$\lambda_{(p_i)} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (1-p_i)\varepsilon_0 + p_i\varepsilon_1 \,, \quad \lambda_p = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (1-p)\varepsilon_0 + p\varepsilon_1 \,,$$

kde ε_0 a ε_1 jsou atomické míry nesené prvky 0 a 1.

3. Vlastnosti monotónních struktur

Důležitou třídu strukturních funkcí představují monotónní strukturní funkce. Tyto funkce slouží k popisu takových sytémů, u nichž nahrazení vadného prvku fungujícím prvkem nemůže v žádném případě zhoršit funkci systému. Přirozené rozšíření tohoto známého pojmu na nekonečný případ je obsahem následující definice:

3.1. Definice. Na prostoru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definujme uspořádání $\leq$ předpisem

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \mathbb{N} : x_i \leq y_i$$

pro všechna $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Řekneme, že strukturní funkce Φ je monotónní, jestliže pro všechna $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ platí implikace $x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$.

3.2. Příklad. Strukturní funkce Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 a Φ_6 definované v příkladu 2.2 jsou monotónní.

Jedním z důležitých problémů je popis stárnutí (opotřebovávání) prvků. Uvažujme dva stejné systémy S_1, S_2 lišící se pouze svým stářím (tj. dobou, po kterou už jsou v provozu). Označme jako M_1, M_2 množiny prvků, z nichž jsou tyto systémy složeny. Dále označme jako P a Q pravděpodobnostní míry popisující spolehlivost prvků v okamžiku, kdy oba systémy sledujeme. Protože uvažujeme stejné systémy, obsahují obě množiny M_1, M_2 prvky stejného typu, prvky jedné z těchto množin jsou však opotřebovanější. Vlastnost systému "mít opotřebovanější prvky než jiný systém stejného typu" zřejmě nezávisí na struktuře systému, ale pouze na mírách P a Q. Charakterizuje-li míra P opotřebovanější prvky než míra Q, pak budeme psát $P \preccurlyeq Q$. Monotónní systém s méně opotřebovanými prvky bude mít jistě vyšší spolehlivost než stejný monotónní systém s více opotřebovanými prvky bez ohledu na tvar strukturní funkce. Přesné zavedení této relace je obsahem následující definice:

3.3. Definice. Nechť P, Q jsou pravděpodobnostní míry na prostoru $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ a nechť pro každou monotónní strukturní funkci Φ platí $h(\Phi, P) \leq h(\Phi, Q)$. Potom budeme psát $P \preccurlyeq Q$.

3.4. Tvrzení. Relace $\preccurlyeq$ je (nelineární) uspořádání na třídě všech pravděpodobnostních měr prostoru $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Atomické pravděpodobnostní míry nesené posloupnostmi $\{1\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{0\}_{i=1}^{\infty}$ jsou největším a nejmenším prvkem při tomto uspořádání.

Největší a nejmenší prvek třídy všech pravděpodobnostních měr charakterizují dva extrémní případy: všechny prvky absolutně spolehlivé/nespolehlivé.

3.5. Tvrzení. Nechť P, Q jsou pravděpodobnostní míry na $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Potom $P \preccurlyeq Q$ tehdy a jen tehdy, když $h(\Phi, P) \leq h(\Phi, Q)$ pro každou *konečnou* monotónní strukturní funkci Φ.

3.6. Důsledek. $\lambda_{\{p_i\}} \preccurlyeq \lambda_{\{q_i\}}$ právě tehdy, když $p_i \leq q_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$.

Nyní přejděme k "dynamickému" popisu stárnutí prvků v daném časovém intervalu:

3.7. Definice. Nechť $T \subseteq [0, \infty]$ je neprázdný uzavřený interval a nechť P_t, $t \in T$, jsou takové pravděpodobnostní míry na $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, že pro všechna $t_1, t_2 \in T$ platí implikace $t_1 \leq t_2 \Rightarrow P_{t_1} \succcurlyeq P_{t_2}$. Potom řekneme, že $(P_t; t \in T)$ je monotónní systém pravděpodobnostních měr.

3.8. Tvrzení. Pro každý monotónní systém pravděpodobnostních měr $(P_t; t \in T)$, $T = [a, b]$, platí:

(a) pro každé $t \in T$ existují jednoznačně určené pravděpodobnostní míry P_t^-, P_t^+ takové, že pro všechny posloupnosti $a \leq v_n \leq t \leq w_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\lim_{n \to \infty} v_n = t \;\Rightarrow\; P_{v_n} \xrightarrow{W} P_t^- \,, \quad \lim_{n \to \infty} w_n = t \;\Rightarrow\; P_{w_n} \xrightarrow{W} P_t^+ \,;$$

(b) pro všechna $t, v, w \in T$, $v \leq t \leq w$, platí $P_v \succcurlyeq P_t^- \succcurlyeq P_t \succcurlyeq P_t^+ \succcurlyeq P_w$;

(c) existuje nejvýše spočetně mnoho bodů $t \in T$ takových, že neplatí $P_t^- = P_t = P_t^+$.

3.9. Tvrzení. Nechť $(P_t; t \in T)$ je monotónní systém pravděpodobnostních měr na $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ a nechť Φ je *libovolná* strukturní funkce. Potom je funkce $h(\Phi, P_t)$ borelovsky měřitelná na T.

3.10. Tvrzení. Nechť $(P_t; t \in T)$ je monotónní systém pravděpodobnostních měr na $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ a nechť Φ je monotónní strukturní funkce. Potom existuje taková posloupnost konečných monotónních strukturních funkcí $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $\lim_{n \to \infty} h(\Phi_n, P_t) = h(\Phi, P_t)$ v každém bodě spojitosti $t \in T$ funkce $h(\Phi, P_t)$. Navíc, je-li funkce $h(\Phi, P_t)$ spojitá na T, pak $h(\Phi_n, P_t)$ konverguje stejnoměrně k $h(\Phi, P_t)$ na T.

Na závěr tohoto odstavce poznamenejme, že v našem modelu s nekonečně mnoha prvky se nabízí ještě jiná definice monotónních struktur. Někdy může být totiž užitečné uvažovat na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ místo uspořádání zavedeného v definici 3.1 následující uspořádání:

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; card\{\, i \in \mathbb{N} \mid x_i > y_i \,\} < \infty \,.$$

Lze ukázat, že vzhledem k dost "velké" třídě pravděpodobnostních měr mají monotónní strukturní funkce definované pomocí tohoto uspořádání stejné vlastnosti, jako obvyklé monotónní strukturní funkce definované v 3.1.

4. Popis množiny všech funkcí spolehlivosti

V tomto odstavci se budeme zabývat případem nezávislých stejně spolehlivých prvků. To znamená, že náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ (X_i je 0-1 náhodná veličina udávající stav i-tého prvku) jsou nezávislé a stejně rozdělené. Je-li spolehlivost prvků rovna p (tj. $X_i = 1$ s pravděpodobností p), pak spolehlivost daného systému Φ budeme, jak je zvykem, označovat $h_\Phi(p)$ (tedy $h_\Phi(p)$ je totéž co $h(\Phi, \lambda_p)$).

Položme si nyní otázku, jak charakterizovat množiny všech funkcí spolehlivosti

$$H = \{\, h_\Phi \mid \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\} \text{ strukturní funkce} \,\} \,,$$
$$H_M = \{\, h_\Phi \mid \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\} \text{ monotónní strukturní funkce} \,\} \,.$$

Poznamenejme, že podle tvrzení 3.10 a důsledku 3.6 jsou tyto množiny uzávěry (ve smyslu bodové konvergence) množin

$$H' = \{\, h_\Phi \mid \Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}, n \in \mathbb{N} \,\} \,,$$
$$H'_M = \{\, h_\Phi \mid \Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}, n \in \mathbb{N}, \text{ monotónní strukturní funkce} \,\} \,.$$

Tento problém můžeme zformulovat i následujícím způsobem: jak pro danou funkci $h : (0,1) \to [0,1]$ poznat, zda existuje (monotónní) strukturní funkce Φ taková, že $h(p) = h_\Phi(p)$ pro všechna $p \in (0,1)$? Řešení je obsahem tvrzení 4.1 a 4.2.

4.1. Tvrzení. Funkce $h : (0,1) \to [0,1]$ je funkcí spolehlivosti nějaké strukturní funkce Φ tehdy a jen tehdy, když je borelovsky měřitelná.

Toto tvrzení ukazuje překvapivou bohatost binárních struktur: jejich funkce spolehlivosti se mohou chovat (z praktického hlediska) téměř libovolně divoce. Důkaz je obsažen v [4].

Než uvedeme odpověď na druhou část našeho problému, zavedeme ještě následující značení: pro každou funkci $h : (0,1) \to [0,1]$ nechť $\mathcal{M}h$ značí funkci $(0,1) \to [0,1]$ definovanou předpisem

$$\mathcal{M}h(p) = 1 - L_p^{-1}(1 - h(p)) \,, \quad p \in (0,1) \,,$$

kde L_p^{-1} je inverzní funkce k distribuční funkci

$$L_p(x) = \lambda_p([0,x]) , \quad x \in [0,1]$$

(zde zřejmým způsobem ztotožňujeme prostor $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ s intervalem $[0,1]$ a jeho borelovskou σ-algebrou). Snadno se lze přesvědčit, že platí

$$L_p(x) = \frac{1-p}{p} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} , \quad x \in [0,1] ,$$

kde $x_1, x_2, \ldots$ je binárního rozvoj čísla x (je zřejmé, že má-li číslo x dva možné binární rozvoje, pak pro oba obdržíme stejnou hodnotu). Transformace $\mathcal{M}$ je vzájemně jednoznačná, tj. pro každou funkci $g : (0,1) \to [0,1]$ existuje právě jedna funkce $h : (0,1) \to [0,1]$ s vlastností $\mathcal{M}h = g$. Poznamenejme, že numerický výpočet transformované funkce $\mathcal{M}h$ je snadný a rychlý (počítač AT 286 vypočte během jedné sekundy několik desítek hodnot funkce $\mathcal{M}h$ s přesností na deset desetinných míst).

4.2. Tvrzení. Funkce $h : (0,1) \to [0,1]$ je funkcí spolehlivosti nějaké monotónní strukturní funkce Φ tehdy a jen tehdy, když je funkce $\mathcal{M}h$ neklesající na $(0,1)$.

Je dobře známo, že funkce spolehlivosti monotónních struktur jsou neklesající. Podle tvzení 4.2 však tato vlastnost není určující. Rozhodující je, zda je neklesající její $\mathcal{M}$ transformace.

4.3. Důsledek. Nechť Φ je monotónní strukturní funkce. Pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ platí

$$h_\Phi(p) \le 1 - L_p(1 - \mathcal{M}h_\Phi(\alpha)) \quad \text{pro všechna} \quad p \in (0,\alpha] ,$$
$$h_\Phi(p) \ge 1 - L_p(1 - \mathcal{M}h_\Phi(\alpha)) \quad \text{pro všechna} \quad p \in [\alpha,1) .$$

Tyto nerovnosti poskytují netriviální odhad pro zkoumanou funkci spolehlivosti h_Φ, neboť funkce $1 - L_p(1 - \mathcal{M}h_\Phi(\alpha))$ je rostoucí, spojitá a pro $p = \alpha$ je rovna $h_\Phi(\alpha)$.

4.4. Důsledek. Nechť $f : (0,1) \to [0,1]$ a nechť je funkce $\mathcal{M}f$ nerostoucí. Pak pro každou monotónní strukturní funkci Φ je funkce $sgn(f(p) - h_\Phi(p))$ neklesající (sgn je funkce signum).

Zvolíme-li $f(p) = p$, pak $\mathcal{M}f \equiv \frac{1}{2}$ je nerostoucí funkce. Dostáváme tak známou vlastnost konečných monotónních strukturních funkcí s alespoň dvěma relevantními prvky: jejich funkce spolehlivosti protínají diagonálu $f(p) = p$ nejvýše jednou a pokud ji protínají, tak "zdola". Tuto vlastnost má ovšem podle důsledku 4.4 velká třída funkcí, například všechny funkce $f(p) = p^c$, kde $c \in (0,1)$.

5. Duální struktury a sytémy se dvěma duálními typy poruch

Definice duálních strukturních funkcí je v případě nekonečně mnoha prvků stejná jako v konečném případě:

5.1. Definice Duální strukturní funkce ke strukturní funkci Φ je zobrazení $\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1-x)$, kde $1 - x = \{1 - x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Lze snadno ukázat, že tato definice je korektní, tj. Φ^D je měřitelné zobrazení. Rovněž není těžké ověřit řadu známých vlastností duálních strukturních funkcí. Například platí, že Φ^D je monotónní právě tehdy, když Φ je monotónní.

S duálními srukturními funkcemi úzce souvisí systémy se dvěma duálními typy poruch. U každého prvku takového systému rozlišujeme, zda je ovladatelný, nebo je trvale mimo provoz (přerušení), nebo je trvale v činnosti (zkrat). Systém je v pořádku, je-li ovladatelný. Přesnou definici a základní vlastnosti lze nalézt např. v [1]. I u těchto systémů je zajímavé zkoumat jejich rozšíření na nekonečně mnoho prvků. Zde uvedeme pouze jedno tvrzení pro konečné strukturní funkce, jehož důkaz (viz [2]) tohoto rozšíření využívá:

5.2. Tvrzení. Nechť $\{U_i, i \in I\}$ je neprázdná množina nezávislých prvků s pravděpodobnostmi zkratu a přerušení p_i a q_i, $i \in I$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní: (a) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $J \subseteq I$ a monotónní strukturní funkce $\Phi : \{0,1\}^J \to \{0,1\}$ tak, že spolehlivost systému Φ je alespoň $1 - \varepsilon$; (b) existuje nejvýše spočetná množina $K \subseteq I$ s vlastností $\prod_{i \in K} [\sqrt{p_i(1-q_i)} + \sqrt{(1-p_i)q_i}] = 0$.

Literatura

1. A. Kaufmann, D. Grouchko, R. Cruon, *Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems*, Academic Press, New York - San Francisko - London, 1977.
2. A. Lešanovský, P. Veselý, *Existence of an arbitrarily reliable system with two dual modes of failure - a necessary and sufficient condition*, připraveno k publikaci.
3. J. Montero, *Reducible systems and irrelevant components*, EURO XI, Aachen, 1991.
4. P. Veselý, *Bernoulli sequences and Borel measurability in (0,1)*, Comment. Math. Univ. Carolinae (v tisku).

MFF UK, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8, E-mail: PVESELY@CSPGUK11.BITNET