USEKNUTÉ ODHADY V MODELU NELINEÁRNÍ REGRESE

B.Procházka

MSP SZÚ, Šrobárova, 48 Praha 10

Zpráva o výsledcích kandidátské práce

Školitel: doc.RNDr.J.Jurečková, DrSc. MFF UK Praha

Jedním z prvních problémů, kterým se zabývala matematická statistika od počátku své existence, je regresní model. Při řešení praktických problémů se však často setkáváme s nutností zabývat se nejen modely lineárního vztahu sledovaných veličin, ale často i se složitějšími modely. Práce se zabývá nelineárním regresním modelem, ve tvaru $y=g(x,\theta)+\varepsilon$, kde y je závisle proměnná, x je nezávisle proměnná, θ neznámý parametr, ε náhodná chyba a $g(,)$ regresní funkce známého analytického tvaru, nelineární v parametru θ. V principu mohou nastat dva případy :

1/ existuje transformace regresní funkce na lineární tvar (jako příklad můžeme uvést model s regresní funkcí $e^{\theta x}$). V praxi se tento model řeší často právě touto transformací. Dále bývají většinou používány metody odhadu v lineárním regresním modelu. Je však nutné si uvědomit, že touto transformací se dopouštíme závažného zkreslení chyby ε a jejího rozložení, je tedy nutno odhadovat parametry v původním regresním modelu.

2/ Neexistuje transformace regresní funkce na lineární tvar (jako příklad můžeme uvést model s regresní funkci $e^{\theta(1)x} - e^{\theta(2)x}$). Pak máme situaci v rozhodování o volbě metody jednodušší - je nutno v každém případě použít některou z metod nelineární regrese.

Běžnými požadavky, kladenými na regresní model, přesněji řečeno na náhodnou chybu ε jsou předpoklady :

1/ Chyby $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené.

2/ Rozdělení ε_i je symetrické okolo 0.

3/ Rozdělení ε_i je normální s nulovou střední hodnotou a s konečným rozptylem.

Samozřejmě je možno diskutovat o všech těchto předpokladech. První předpoklad je nejméně omezující a je často přijímán, ale o druhé předpokladu je již možno v praxi často polemizovat. Třetí předpoklad je ještě více omezující. Za tohoto předpokladu je bezpochyby nejvhodnější odhad metodou nejmenších čtverců. Často se však setkáváme s problémem odhadu parametrů v modelu kde není splněn třetí nebo dokonce ani druhý předpoklad. Bývá to způsobeno buď tím, že chyba ε nemá normální rozložení (často se jedná o rozložení s těžkými chvosty) nebo se jedná o veličinu, která je kontaminována nějakým jiným rozdělením. Nemusí se dokonce ani jednat o symetrické rozložení.

K řešení tohoto problému v modelu parametru polohy a v regresním modelu byly navrženy různé robustní metody.

Práce se zabývá jednak konstrukcí ale i statistickými vlastnostmi regresních α-kvantilů a odhadů založených na těchto regresních α-kvantilech. K důkazu jsou použity různé teoretické výsledky, především související s prací D.Pollarda [18] o vlastnostech empirických procesů indexovaných množinami (Vapnik-Červoněnkisvy třídy).

Mějme nelineární regresní model

$$y_i = g(x_i,\theta) + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (1)$$

kde $g(x,\theta)$ je spojitá funkce vektorových parametrů $x\in X\subset R^q_+$, $\theta=(\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_p)'\in\Theta\subset R^{p+1}$, kde Θ je kompaktní množina.

Protože uvažujeme model s aditivní chybou ε je pro konstrukci kvantilů nutné aby regresní model obsahoval také aditivní neznámý parametr. Pokud tomu tak není je nutno pro konstrukci regresních kvantilů tento parametr přidat k regresní funkci.

Přistupme nyní k vlastnímu problému. Podobně jako R.Koenker a G.Bassett [12] v lineárním modelu definujeme regresní kvantil v modelu (1) (viz. Procházka [20]).

Nejprve označme funkci $\rho_\alpha(.)$:

$$\rho_\alpha(z) = \begin{cases} \alpha\, z & \text{pro } z \ge 0 \\ (\alpha - 1)\, z & \text{pro } z < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

a její derivaci zprava

$$\psi_\alpha(z) = \begin{cases} \alpha & \text{pro } z \ge 0 \\ (\alpha - 1) & \text{pro } z < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Definujme nyní regresní kvantil :

DEFINICE 1.:

Pro $\alpha\in(0,1)$ nazveme regresním α-kvantilem v modelu nelineární regrese (1) vektor $\hat\theta_{\alpha,n}$, který minimalizuje

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_\alpha(y_i-g(x_i,T)) \qquad \text{pro } T\in\Theta.$$

Pro takto definované regresní kvantily je v práci odvozena asymptotická lineární representace a z ní plynoucí asymptotická normalita.

Definice regresních kvantilů pak přímo nabízí zobecnění na odhad lineární kombinace regresních kvantilů:

DEFINICE 2.:

Mějme pevné k, konstanty $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k<1$ a váhy $w_1,\ldots,w_k$, takové, že $w_i \geq 0$ a $\sum w_i = 1$. Pak odhadem θ lineární kombinací regresních kvantilů nazveme odhad :

$$\hat{\theta}^L = \sum_{i=1}^{k} w_i \hat{\theta}_{\alpha_i} .$$

Dále se zabývejme možností definice useknutého odhadu. Použijme myšlenku z článku Procházky [20]. Tato definice je zobecněním useknutého odhadu, který zavedli v lineárním modelu Koenker a Bassett [12] na nelineární regresní model. K tomuto účelu použijeme regresní kvantily. Useknutý odhad v modelu nelineární regrese charakterizujeme jako řešení minimalizace :

$$\sum_{i=1}^{n} I_{[g(x_i,\hat{\theta}_\alpha) \leq y_i \leq g(x_i,\hat{\theta}_{1-\alpha})]}(y_i - g(x_i,T))^2 \tag{4}$$

Vzhledem k $T\in\Theta$.

Tento odhad je již zaveden v článku Procházky [20], ale není zde studováno jeho asymptotické chování. Nejdříve však označme diagonální matici A_n řádu $n*n$ jejíž i-tý diagonální prvek je

$$a_{n,i,i} = I_{[g(x_i,\theta)+F^{-1}(\alpha) \leq y_i \leq g(x_i,\theta)+F^{-1}(1-\alpha)]}$$

a matici $\hat{A}_n$, jejíž diagonální prvky jsou :

$$\hat{a}_{n,i,i} = I_{[g(x_i,\hat{\theta}_\alpha) \leq y_i \leq g(x_i,\hat{\theta}_{1-\alpha})]}$$

Řešení minimalizace výrazu (4) je zřejmě řešením soustavy rovnic

$$D'_n\hat{A}_n(\underline{y} - \underline{g}(T)) = 0, \tag{5}$$

kde $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_n)'$ a $\underline{g}(z) = (g(x_1,z),\ldots,g(x_n,z))'$.

Soustava rovnic (5) může obecně mít více kořenů. Práce ukazuje, že existuje alespoň jeden kořen, který je $n^{1/2}$ konzistentním odhadem θ; pro libovolný takový kořen je odvozena jeho asymptotická representace a asymptotická normalita.

V této souvislosti definujeme α-useknutý odhad :

DEFINICE 3.:

Nechť $\hat{\theta}_\alpha$ a $\hat{\theta}_{1-\alpha}$ jsou regresní kvantily. Pak α-useknutým odhadem v modelu nelineární regrese nazveme libovolný kořen $\hat{\theta}^T_{n\alpha}$ soustavy rovnic (5), který vyhovuje

$$n^{-1/2}\|\hat{\theta}^T_{n\alpha} - \theta\| = O_p(1) \text{ při } n \longrightarrow \infty$$

Dříve než přistoupíme k formulaci jednotlivých vět, je nutné klást jisté požadavky na model. Aby vůbec mělo smysl model uvažovat je nutné zajistit aby plán experimentu nebyl degenerovaný:

A1 Nechť pro každých $p+1$ navzájem různých bodů $(y_1,x_1),\ldots,(y_{p+1},x_{p+1})$ existuje nejvýše jedno $\theta\in\Theta$, takové, že $y_1=g(x_1,\theta),\ldots,y_{p+1}=g(x_{p+1},\theta)$.

Dále je bezpochyby nutné požadovat aby neznámé parametry regresní funkce byly jednoznačně odhadnutelné

A2 $g(x,z)$ ryze monotoní v každé složce z, s parciálními derivacemi, jak prvého, tak i druhého řádu, omezenými konstantou K stejnoměrně x $x\in\mathfrak{X}$.

Ikdyž tyto odhady jsou konstruovány jako robustní vzhledem k rozdělení chyb, je samozřejmě nutné uvažovat jistá minimální omezení tohoto rozdělení. podobně jako v lineárním modelu předpokládejme tedy:

A3 ε_i, $i=1,\ldots,n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s hustotou $0 < f(x) < K^*$ pro $x\in R^1$ a se symetrickou distribuční funkcí $F(x)$. Takovou, že existuje $k>0$ a $K>0$ taková, že $k<f'(x)<K$ na nějakém δ-okolí bodu $F^{-1}(\alpha)$, $\delta>0$.

Předpoklad symetrie rozložení však není zdaleka nutný, je použit pouze pro zjednodušení jednotlivých tvrzení.

Další předpoklad na regresní funkci, často používaný v nelineárním regresním modelu i u odhadu metodou nejmenších čtverců (např. Prakasa Rao [23]), zajišťuje jednoznačnost existence odhadu.

A4 Existují konstanty k_1,k_2 tak, že pro každé $n>n_0$ a $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ je :

$$k_1\|\theta_1-\theta_2\|^2\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i,\theta_1)-g(x_i,\theta_2)]^2\le k_2\|\theta_1-\theta_2\|^2.$$

Poslední předpoklad zajišťuje společně s předpokladem A1 nedegeneronanost plánu experimentu, je to obdoba předpokladu běžně používaného v lineárním regresním modelu při konstrukci useknutých odhadů (např. Jurečková [9]) :

A5 Existuje pozitivně definitní matice Q taková, že :

$$Q = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial g(x_i,\tau)}{\partial\tau_j}\right)_{\tau=\theta}\left(\frac{\partial g(x_i,\tau)}{\partial\tau_k}\right)_{\tau=\theta}\right)_{\substack{j=0,\ldots,p\\ k=0,\ldots,p}}$$

Nejprve se věnujme regresním kvantilům. Zvolme tedy nějaké pevné $\alpha\in(0,1)$. Pak lze dokázat tuto větu o konzistenci odhadu regresního α-kvantilu :

V Ě T A 4.:

Nechť v modelu (1) platí A1 až A5 pak je

$$\hat{t}_n = \hat{\theta}_{\alpha,n} - \theta_\alpha = o_p(1) \qquad \text{při } n \longrightarrow \infty,$$

kde

$$\theta_\alpha = (\theta_0 + F^{-1}(\alpha), \theta_1, \dots, \theta_p)'.$$

Označme podobně jako Pollard [18]

$$E_{i,\alpha} = \varepsilon_i - F^{-1}(\alpha)$$

$$D_n = n^{-1/2}\left(\left(\frac{\partial g(x_i, \theta+\tau)}{\partial \tau_j}\right)_{\tau=0}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=0,\dots,p}} \quad \text{matici } n \times (p+1)$$

$$\Psi(\alpha) = \left(\psi_\alpha(E_{i,\alpha})\right)_{i=1,\dots,n}, \quad W_n(\alpha) = D_n'\Psi(\alpha) \quad \text{a} \quad P_n = D_n'D_n$$

Následující věta nám již dává asymptotickou representaci regresních α-kvantilů v modelu (1).

V Ě T A 5.:

Nechť v modelu (1) jsou splněny předpoklady A1 až A5. Pak při $n \longrightarrow \infty$ platí asymptotická representace

$$n^{1/2}\left(\hat{\theta}_{\alpha,n} - \theta_\alpha\right) = \frac{1}{f(F^{-1}(\alpha))} P_n^{-1} W_n(\alpha) + o_p(1).$$

Důsledkem této věty je však i asymptotická normalita odhadů regresních α-kvantilů :

V Ě T A 6.:

Nechť v modelu (1) platí A1 až A5; pak

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(\alpha) - \theta_n(\alpha)\right)$$

má asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou 0 a kovarianční maticí :

$$\text{var } \hat{\theta}_\alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(F^{-1}(\alpha))} Q^{-1} \qquad \text{kde } Q = \lim D_n'D_n$$

Tyto věty nám poskytují možnost odvození asymptotických vlastností různých odhadů parametrů θ konstruovaných pomocí regresních kvantilů. Pro nejjednoduší z nich, $l_1$odhad (regresní medián), lze tyto věty použít přímo a navíc je to odhad kterým se zabývali i jiní autoři.

Následující věta popisuje asymptotické rozdělení $\hat{\theta}^L$:

V Ě T A 7.:

Nechť v modelu (1) platí A1 až A5. Pak má $\hat{\theta}^L$ asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou

$$E\,\hat{\theta}^L = \left(\theta_0 + \sum_{i=1}^{k} w_i F^{-1}(\alpha_i), \theta_1, \ldots, \theta_p\right)'$$

a s varianční maticí :

$$\operatorname{var} \hat{\theta}^L = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{w_i w_j (\alpha_i \wedge \alpha_j - \alpha_i \alpha_j)}{f(F^{-1}(\alpha_i)) f(F^{-1}(\alpha_j))}\, Q^{-1}$$

V praxi se někdy v modelu parametru polohy nebo v lineárním regresním modelu používá Gastwirthův odhad (viz. např kniha D.Hampla a kol. [4]). Pokud bychom chtěli tento odhad zobecnit na obecný regresní model, tak se nám přímo nabízí použití regresních kvantilů. Sestrojíme tedy $\hat{\theta}^G$ zobecněný Gastwirthův odhad parametru θ nelineárního regresního modelu (1) který definujeme :

$$\hat{\theta}^G = 0.3\,\hat{\theta}_{1/3} + 0.4\,\hat{\theta}_{1/2} + 0.3\,\hat{\theta}_{2/3}$$

Podle věty 7 má za předpokladu A1 až A5 $\hat{\theta}^G$ asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou θ a kovarianční maticí :

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_\alpha = \kappa\, Q^{-1}$$

$$\text{kde } \kappa = \frac{0.02}{f^2(F^{-1}(1/3))} + \frac{0.04}{f^2(F^{-1}(1/2))} + \frac{0.02}{f^2(F^{-1}(2/3))} +$$

$$+ \frac{0.02}{f(F^{-1}(1/3))f(F^{-1}(1/2))} + \frac{0.02}{f(F^{-1}(1/2))f(F^{-1}(2/3))} +$$

$$+ \frac{0.01}{f(F^{-1}(1/3))f(F^{-1}(2/3))}$$

Zabývejme se konečně useknutým odhadem $\hat{\theta}^T_{n\alpha}$ zavedeným v definici 3 k formulování vět o asymptotickém chování odhadu bude nejprve potřeba zavést následující označení:

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \;,\; \underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' \;,\; \underline{g}(z) = (g(x_1, z), \ldots, g(x_n, z))'$$

a funci $\varphi_\alpha(\underline{\varepsilon}) = (\varphi_\alpha(\varepsilon_1), \ldots, \varphi_\alpha(\varepsilon_n))'$,kde $\varphi_\alpha(x)$ je funkce Hubrova typu:

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} x & F^{-1}(\alpha) \le x \le F^{-1}(1-\alpha) \\ F^{-1}(1-\alpha) & x > F^{-1}(1-\alpha) \\ F^{-1}(\alpha) & x < F^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Nyní již konečně můžeme formulovat následující větu:

VĚTA 8.:

Nechť $\hat{\theta}^T_{\alpha n}$ je α useknutý odhad v modelu (1) z definice 3. Pak za předpokladů A1 až A5 při $n \longrightarrow \infty$ je :

$$n^{1/2}\{\hat{\theta}^T_{\alpha n} - \theta\} = \frac{1}{1-2\alpha} Q^{-1}D'_n\, \varphi_\alpha(\underset{\sim}{\varepsilon}) + o_p(1)$$

a tedy $n^{1/2}\{\hat{\theta}^T_{\alpha n} - \theta\}$ má asymptoticky normální rozdělení

$$N_{p+1}(\,0\,, \sigma^2_T(\alpha,F)Q^{-1}\,)$$

kde $$\sigma^2_T = \frac{1}{(1-2\alpha)^2}\left\{\int_{F^{-1}(\alpha)}^{1-F^{-1}(\alpha)} x^2 dF(x) + 2\alpha(F^{-1}(\alpha))^2\right\}$$

Za zmínku stojí i to, že v speciálním případě lineární regrese tato věta poskytuje asymptotickou representaci useknutého odhadu metodou nejmenších čtverců stejnou jako v lineárním modelu (viz. Ruppert a Carroll [26]).

Další možnost definice useknutého odhadu by mohla být založena na zobecnění definice L-odhadu použité v práci Serflinga (44) pro parametr polohy a jejího zobecnění na lineární regresní model, které navrhl Koenker a Portnoy(13).

Tento odhad lze definovat jako integrál regresních kvantilů vzhledem k vhodné míře na podmnožinách intervalu [0,1], což je možno chápat jako zobecnění lineární kombinace konečně mnoha regresních kvantilů na nekonečně mnoho.

Navržené odhady, především odhady regresních kvantilů a useknuté odhady mají uplatnění všude tam, kde se vyskytuje nelineární regresní model a kde je nutno počítat s výskytem odlehlých pozorování, nebo s jiným než normálním rozdělením chyb. K ilustraci jejich vlastností je možno použít jednak simulací nebo reálných dat. Chování těchto odhadů na simulovaných datech v modelu line8rn9 kombinace dvou exponenciel je ukázáno v článku Procházky [21]. V práci [22] byly použity příklady z lékařského výzkumu, a to jednak výsledky testu ELISA, který vede na model logistické závislosti tvaru :

$g(\theta,x) = \theta_0+1/(1+\exp(-\theta_1+\theta_2 x))$,

dále dva farmakokinetické modely, jednak šíření teofylinu v krvi :

$g(\theta,t)=\theta_0+\theta_1\exp(-\theta_2 t)-\theta_3\exp(-\theta_4 t)$

a podobný model vylučování izotopu manganu z těla potkanů.

Na závěr si ještě ukážeme data i výsledky jednoho z praktických modelů použitých v práci a to případu logistické regrese. V následujících dvou tabulkách jsou zobrazeny jednak použitá data ale i hodnoty různých odhadů parametru θ. Použité odhady jsou:

l_2 - odhad metodou nejmenších čtverců l_1- odhad metodou nejmenších absolutních odchylek ('regresní medián'), TLS - useknutý odhad metodou nejmenších čtverců a Q(.1), Q(.9) regresní kvantily. Hodnoty S jsou hodnoty minimalizačního kritéria.

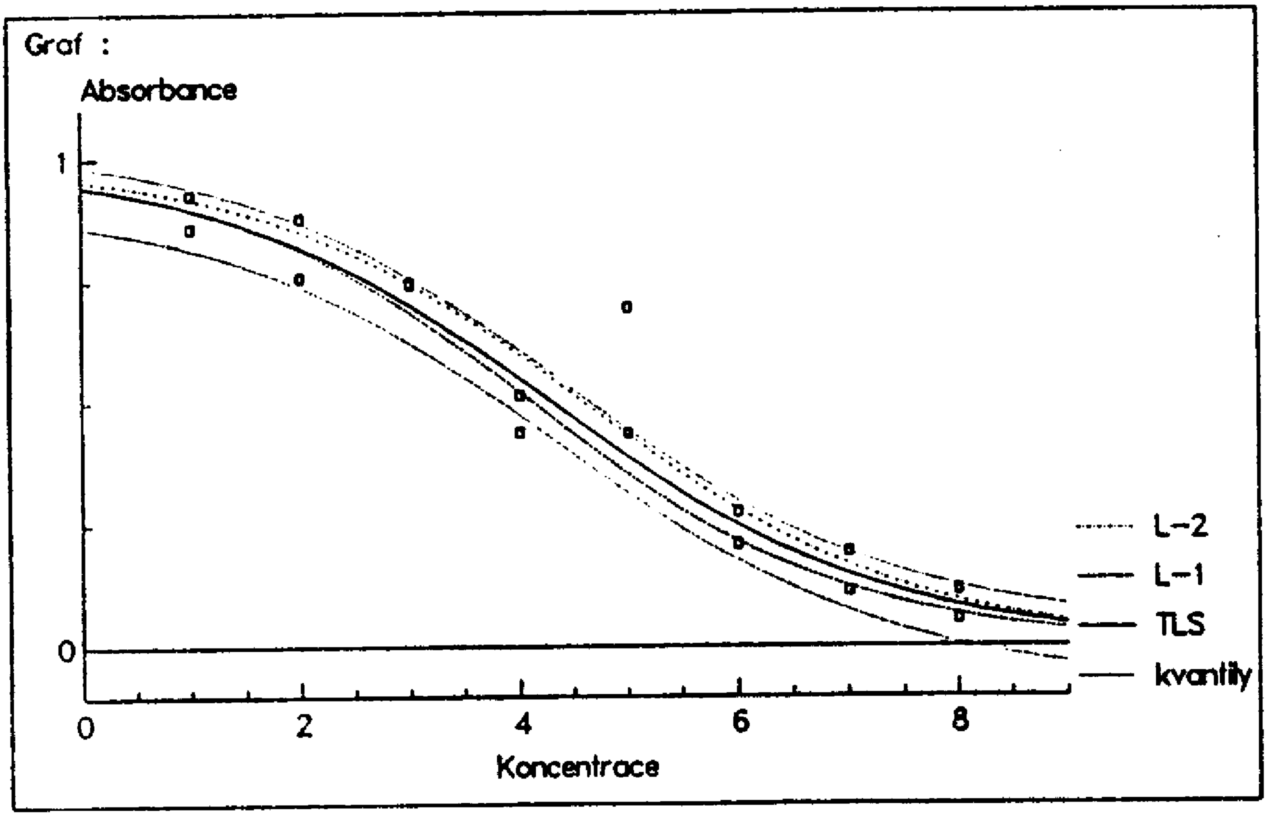
Data :

Ředění	Absorbance	
1	0.920	0.852
2	0.872	0.752
3	0.742	0.736
4	0.433	0.510
5	0.689	0.431
6	0.204	0.271
7	0.106	0.187
8	0.049	0.109

Odhady parametrů :

odhad	S	θ_2	θ_1	θ_0
l_2	0.1279	0.6689	3.0775	
l_1	0.5080	0.6902	2.8503	
TLS	0.0208	0.6518	2.8119	
Q(.1)	0.1845	0.6430	2.8032	-0.0825
Q(.9)	0.3078	0.6576	2.9287	0.0455

Tyto naměřené hodnoty a odhadnuté regresní funkce jsou zobrazeny v následujícím grafu.



V grafu je zřetelně vidět, že l_2-odhad je výrazně vychýlen pozorováním v koncentraci 5, dokonce tak, že se blíží odhadu horního regresního kvantilu. ostatní odhady již nejsou zdaleka tak citlivé.

L I T E R A T U R A :

[1] D.W.K.Andrews : *Consistency in Nonlinear Econometric Models : a Generic Uniform Law of Large Numbers*. Econometrica 55 (1987).

[2] Y.Bard:*Nonlinear Parameter Estimation*. AcademicPress,N.York 1974

[3] S.van de Geer : *Regression Analysis and Empirical Processes*. doktorská disertační práce-Leiden (1987)

[4] F.R.Hampel, E.M.Ronchetti, P.J.Rousseeuw and W.A.Stahel : *Robust Statistics:The Approach Based on Influence Function*. J.Wiley, 1986

[5] S.Heiler and R.Willers : *Asymptotic Normality of R-Estimates in the Linear Model*. Statistics 19 (1988), 2, 173 -184.

[6] A.V.Ivanov : *Asymptotičeskoje razloženije dlja raspredelenija oceňky najmeňšich kvadratov parametra neliňéjnoj regresii*. Těorija věrojatnostěj i jeje priměnění ja 21 (1976), 571-583.

[7] J.Jurečková : *Asymptotic Relations of M-Estimates of Location*. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics 11 (1980) 1 61.

[8] J.Jurečková : *Trimmed Polynomial Regression*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 24, 4, (1983), 579-607.

[9] J.Jurečková : *Regression Quantiles and Trimmed Least Squares Estimator under a General Design*. Kybernetika 20 (1984),5.

[10] J.Jurečková : *Asymptotic Representation of L-estimators and their Relations to M-estimators*. Sequential Analysis, 5 (1986),4,

[11] R.I.Jenrich : *Asymptotic Properties of Non-linear Least Squares Estimators*. The Annals of Mathematical Statistics 40 (1969), 2.

[12] R.Koenker & G.Bassett:*Regression Quantiles*.Econometrica 46(1978)

[13] R.Koenker and S.Portnoy : *L-estimation for Linear Models*. American Statistical Association 82 (1987), 339, 851-857.

[14] H.Läuter : *Note on the Strong Consistency of the Least Squares Estimator in Nonlinear Regression*. Statistics, 20, (1989) 2.

[15] F.Leise and I.Vajda : *M-estimators in Regression with i.i.d. Errors*. V tisku. [16] W.Oberhofer : *The Consistency of Nonlinear Regression Minimizing the* l_1*-norm*. The Annals of Statistics 10 (1982), 1, 316-319.

[17] D.Pollard : *Asymptotics for Least Absolute Deviation Regression Estimators*. J.Amer.Statist.Assoc. 82 (1987), 851-857.

[18] D.Pollard : *Empirical Processes Theory and Applications*. IMS Lecture Notes (1989).

[19] J.L.Powell : *Least absolute deviations estimation for the censored regression model*. Journal of Econometrics 25 (1984].

[20] B.Procházka : *Regression Quantiles and Trimmed Least Squares Estimatimator in the Nonlinear Regression Model*. Computational Statistics & Data Analysis 6 (1988) 358-391.

[21] B.Procházka : *Useknuté odhady v modelu nelineární regrese*. ROBUST 86 JČSMF.

[22] B.Procházka : *Useknuté odhady v modelu nelineární regrese*. Kandidátská disertační práce MFF UK Praha 1992.

[23] B.L.S.Prakasa Rao : *Asymptotics Theory of Statistical Inference*. New York, J.Wiley 1987.

[24] G.D.Richardson : *Consistent* l_1*-estimators in Nonlinear Regression for Noncompact Parameter Space*. Sankhya: The Indian Journal of Statistics 49 Series A (1987) 3 377-387.

[25] R.J.Serfling : *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York, J.Wiley 1980.

[26] D.Ruppert and R.J.Carroll : *Trimmed Least-squares Estimation in the Linear Model*. J.Amer.Statist.Assoc. 75 (1980), 828-838.

[27] Andrew A. Weiss : *Estimating Nonlinear Dynamic Models Using Least Absolute Error Estimation*. Econoemeric theory 7 (1991).

[28] K.Zvára : *Regresní Analýza*. Academia Praha (1989).