Asymptotické rozvoje rizikové a bayesovské rizikové funkce odhadů spolehlivosti v exponenciálním rozdělení

Aleš Linka

MFF UK Praha

1. Úvod

Nechť $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ je náhodný vektor s hustotou $f(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\theta})$ vzhledem k σ-konečné míře ν_n na (R_n, B_n), $\theta \in \Theta$ je parametr, $\Theta \subseteq R_k$, $\Theta \neq \emptyset$ a nechť $\mathcal{D}$ označuje množinu možných rozhodnutí o parametru θ na základě vektoru.

Definujme $L(\underset{\sim}{\theta}, d): \Theta \times \mathcal{D} \to R_1$ jako ztrátovou funkci, Rizikovou funkci $R(\underset{\sim}{\theta}, \delta)$ příslušnou odhadu $\delta(\underset{\sim}{x})$, je-li skutečn hodnota parametru $\underset{\sim}{\theta}$, definujme vztahem

$$R(\underset{\sim}{\theta}, \delta) = E(L(\underset{\sim}{\theta}, \delta(\underset{\sim}{x}))\,|\underset{\sim}{\theta}) = \int_{R_n} L(\underset{\sim}{\theta}, \delta(\underset{\sim}{x})) f(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\theta})\, d\nu_n(\underset{\sim}{x}) \ . \tag{1.1}$$

Při bayesovském přístupu předpokládáme, že parametr $\underset{\sim}{\theta}$ je náhodný vektor s hustotou $g(\underset{\sim}{\theta})$ vzhledem k σ-konečné míře τ na $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ a definujme bayesovskou rizikovou funkci odhadu $\delta(\underset{\sim}{x})$ za apriorní hustoty $g(\underset{\sim}{\theta})$ parametru $\underset{\sim}{\theta}$ jako

$$\rho(g, \delta) = E_g R(\underset{\sim}{\theta}, \delta) = \int_{\Theta}\int_{R_n} L(\underset{\sim}{\theta}, \delta(\underset{\sim}{x})) f(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{\theta})\, d\nu_n(\underset{\sim}{x})\, g(\underset{\sim}{\theta})\, d\tau(\underset{\sim}{\theta}) \ , \tag{1.2}$$

pro $\delta(\underset{\sim}{x}) = \{ d \in \mathcal{D},\ R(\underset{\sim}{\theta}, d) < +\infty \text{ pro } \forall \underset{\sim}{\theta} \in \Theta \}$ (viz Lehmann [4]).

Uvažujme nyní třídu exponenciálních rozdělení s hustotou

$$f(x,\theta) = \theta^{-1} \exp(-\theta^{-1})x), \quad \text{pro} \quad x > 0, \qquad (1.3)$$
$$= 0 \quad , \quad \text{jinak} \quad ,$$

kde θ je neznámý parametr. Nechť c je kladné číslo. Jestliže X je náhodná veličina s hustotou (1.3), pak odpovídající funkce spolehlivosti je

$$P\ (X > c) = \exp(-\theta^{-1} c), \tag{1.4}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme dále položit $c = 1$.

Uvažujme dále různé odhady (1.4) na základě náhodného výběru $X_1, X_2, \dots, X_n$. Nejlepší nestranný odhad můžeme psát ve tvaru

$$R_1 = \left(1 - \frac{1}{n\bar{X}}\right)^{n-1}, \quad \text{jestliže} \quad \bar{X} > \frac{1}{n}, \qquad (1.5)$$
$$= 0 \quad , \quad \text{jinak} \ ,$$

kde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ (viz Pugh [6]). Užijeme-li známého faktu, že $\bar{X}$ je maximálně věrohodný odhad parametru θ, pak maximálně věrohodný odhad (1.4) je

$$R_2 = \exp\left(-\frac{1}{\bar{X}}\right). \tag{1.6}$$

V bayesovském přístupu k odhadu (1.4) předpokládáme, že $\lambda = \theta^{-1}$ je náhodná veličina. Konjugovanému systému hustot odpovídá apriorní hustota

$$g(\lambda) = \frac{\alpha^p \lambda^{p-1}}{\Gamma(p)} \exp(-\alpha\lambda), \quad \text{jestliže} \quad \lambda > 0, \tag{1.7}$$

$$= 0 \quad , \quad \text{jinak} ,$$

kde α a p jsou (apriorní) parametry. Pak aposteriorní rozdělení je gamma rozdělení s parametry $\alpha + \sum x_i$, $p+n$, s hustotou

$$\bar{g}(\lambda | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left\{ (\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i)^{p+n} \lambda^{p+n-1} \exp\left[-\lambda(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i) \right] \right\} / \Gamma(p+n),$$

$$\text{jestliže} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

$$= 0, \quad \text{jinak}.$$

Bayesovský odhad (1.4) můžeme dostat jako střední hodnotu $\exp(-\lambda)$ vzhledem k aposteriornímu rozdělení,

$$R_3 = \int_0^\infty \exp(-\lambda) \bar{g}(\lambda | x_1, x_2, \ldots, x_n) \, d\lambda .$$

Po krátkém výpočtu dostaneme

$$R_3 = \left(\frac{n\bar{x} + \alpha}{n\bar{x} + \alpha + 1} \right)^{n+p} . \tag{1.8}$$

Takto získaný odhad je optimální vzhledem ke kvadratické ztrátové funkci. Pro jiné ztrátové funkce odhady uvádí Harris, Soms [1].

K ocenění kvality odhadu nám poslouží pro klasický přístup riziková funkce (1.1) a pro bayesovský přístup bayesovská riziková funkce (1.2). V následujícím odstavci se budeme zabývat klasickým přístupem.

2. Klasický přístup

Přímý výpočet rizikové funkce (1.1) pro různé typy odhadů spolehlivosti je dosti složitý. Často se proto spokojíme s nalezením asymptotického rozvoje rizikové funkce, který nám poskytuje jistou informaci o kvalitě odhadu.

Pro stanovení asymptotických rozvojů rizikových funkcí odhadů spolehlivosti R_1, R_2 a R_3 exponenciálního rozdělení použijeme následující větu.

Věta 1. Nechť $\{X(t)\}_{t \in T}$ je stochastický proces a $g(x,t)$ je reálná funkce definovaná na $R_1 \times T$. Předpokládejme, že platí

a) pro $\forall t \in T$ má g spojitou $(q+1)$ derivací pro $\forall x \in (\theta - \delta, \theta + \delta)$, kde $\delta > 0$ je konstanta, která je nezávislá na θ a t.

b) g je omezená na $R_1 \times T$.

c) derivace (vzhledem k první proměnné) $g'(\theta,t), \ldots, g^{(q)}(\theta,t)$ jsou omezené funkce v proměnné t a $g^{(q+1)}(\theta,t)$ je omezená na $(\theta - \delta, \theta + \delta) \times T$.

Jestliže $E|X(t) - \theta|^{q+1} \to 0$ pro $t \to t_0$, pak

$$Eg(X(t),t) = g(\theta,t) + \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!} g^{(j)}(\theta,t) E(X(t) - \theta)^j + O(E|X(t) - \theta|^{q+1}), \tag{2.1}$$

když $t \to t_0$.

Jestliže $E|X(t) - \theta|^{q+2} \to 0$ pro $t \to t_0$, pak

$$\operatorname{var} g(X(t),t) = \sum_{\substack{i=1\\ j+k\ \ q+1}}^{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{j!k!}\, g^{(j)}(\theta,t\ )g^{(k)}(\theta,t)\operatorname{cov}((X(t) - \theta)^j,(X(t) - \theta)^k) +$$

$$+ \ O(E|X(t) - \theta|^{q+2}), \tag{2.2}$$

když $t \to t_0$.

Důkaz. Viz Hurt [2].

Položme nyní v odhadech (1.5), (1.6) a (1.8) $T_n = \bar{X}$. Na základě věty 1 můžeme nyní určit asymptotické rozvoje pro rizikové funkce odhadů R_1, R_2 a R_3.

Věta 2. Pro rizikové funkce odhadů R_1, R_2 a R_3 platí

$$R(\theta,R_1) = \operatorname{var} R_1 = \frac{\varkappa^2}{n} \exp\ (-2\varkappa)(1 + \frac{1}{2n}(\varkappa - 2)^2 \ + \ O(n^{-\frac{5}{2}}) \tag{2.3}$$

$$R(\theta,R_2) = \frac{\varkappa^2}{n} \exp(-2\varkappa) \left\{1 + \frac{1}{2n}\left[\frac{7}{2}(\varkappa -2)^2 - 4\right]\right\} + O(n^{-\frac{5}{2}}) \tag{2.4}$$

$$R(\theta,R_3) = \frac{\varkappa^2}{n} \exp(-2\varkappa)\left\{1 + \frac{1}{2n}\left[5(\varkappa -2)^2 + 4(p-3) - 4\varkappa(p-1)+4\beta(\varkappa -2) + \right.\right.$$

$$+ \ 2(\varkappa + \beta - p - 1)^2 + O(n^{-\frac{5}{2}}), \tag{2.5}$$

kde $\varkappa = \frac{1}{\theta}$, $\beta = \frac{1}{\theta}$.

Důkaz. Uveden v Hurt [3].

Porovnání kvality odhadů je uvedeno v numerické studii v práci Hurt [3].

3. Baysovský přístup

Nechť parametr $\lambda = \theta^{-1}$ je náhodná veličina s hustotou (1.7). Budeme se zabývat otázkou nalezení asymptotických rozvojů bayesovské rizikové funkce (1.2) odhadů R_1, R_2 a R_3 s apriorní hustotou $g(\lambda)$.

LEMMA 3. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x|\theta) = \theta^{-1} \exp(-\theta^{-1}x), \quad \text{pro } x > 0,$$
$$= 0 \qquad\qquad , \text{ jinak.}$$

Nechť $\lambda = \theta^{-1}$. Pak $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ má hustotu

$$g(t|\lambda) = \frac{\lambda^n n^n}{\Gamma(n)}\, t^{n-1} \exp(-\lambda n t), \quad \text{pro } t > 0, \tag{3.1}$$
$$= 0 \qquad\qquad , \text{ jinak.}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá z reprodukční vlastnosti rozdělení gamma.
Pro bayesovské rizikové funkce odhadů R_1, R_2, a R_3 platí

$$\rho(R_1,g) = \int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}\left(\left(\frac{nt-1}{nt}\right)^{n-1} - \exp(-\lambda)\right)^2 \bar{g}(t|\lambda)g(\lambda)\,dt\,d\lambda \qquad (3.2)$$

$$\rho(R_1,g) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\exp(-t)-\exp(-\lambda)\right)^2 \bar{g}(t|\lambda)g(\lambda)\,dt\,d\lambda \qquad (3.3)$$

$$\rho(R_1,g) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{nt+\alpha}{nt+\alpha+1}\right)^{n+p} - \exp(-\lambda)\right)^2 \bar{g}(t|\lambda)g(\lambda)\,dt\,d\lambda \qquad (3.4)$$

Lemma 4. Nechť $h(t,\lambda) = \bar{g}(t|\lambda)g(\lambda) = \dfrac{\alpha^p n^n t^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\lambda^{n+p-1}\exp\left[-(nt+\alpha)\lambda\right]$.

Položme $I_j = \int_0^{\infty}\exp(-j\lambda)h(t,\lambda)\,d\lambda$, $j = 0,1,2$. Potom

$$I_j = \frac{\alpha^p n^n\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\,\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+j)^{n+p}}, \quad \text{pro } j=0,1,2. \qquad (3.5)$$

Důkaz.

$$I_j = \int_0^{\infty}\exp(-j\lambda)h(t,\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{\alpha^p n^n t^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\lambda^{n+p-1}\exp\left[-(nt+\alpha+j)\lambda\right]d\lambda =$$

$$= \frac{\alpha^p n^n\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\,\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+j)^{n+p}}.$$

Položme $Q(\alpha,p,n) = \dfrac{\alpha^p n^n\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}$. Použitím lemmatu 4 na vztahy (3.2),(3.3) a (3.4) dostaneme alternativní vyjádření

$$\rho(R_1,g) = Q(\alpha,p,n)\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}\left[\left(\frac{nt-1}{nt}\right)^{2(n-1)}\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha)^{n+p}} - 2\left(\frac{nt-1}{nt}\right)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+1)^{n+p}} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+2)^{n+p}}\right]dt \qquad (3.6)$$

$$\rho(R_2,g) = Q(\alpha,p,n)\int_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2}{t}\right)\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha)^{n+p}} + 2\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+1)^{n+p}} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+2)^{n+p}}\right]dt \qquad (3.7)$$

$$\rho(R_3,g) = Q(\alpha,p,n)\int_0^{\infty}\left(\frac{nt+}{nt+\alpha+1}\right)^{2(n-1)}\frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha)^{n+p}} - 2\left(\frac{nt+\alpha}{nt+\alpha+1}\right)^{n+p} \times$$

$$\times \quad \frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+1)^{n+p}} + \frac{t^{n-1}}{(nt+\alpha+2)^{n+p}} \Bigg] dt \; . \tag{3.8}$$

Nalézt asymptotické rozvoje pro (3.6),(3.7), a (3.8) bude zřejmě vyžadovat metodiku odlišnou od metodiky užité v případě porovnání odhadů na základě klasického přístupu, tj. na základě střední čtvercové odchylky. Hustota vyskytující se v uvedených výrazech je hustota F-rozdělení, jehož momenty nemají typ konvergence požadovaný ve větě 1. Numerická studie však ukazuje na následující hypotézu:

<u>Hypotéza:</u> Pro bayesovské riziko odhadů R_1, R_2 a R_3 platí

$$p(R_i, g) = \frac{a(\alpha, p)}{n} + \frac{b_i(\alpha, p)}{n^2} + O(n^{-3}) \tag{3.9}$$

pro $n \to \infty$, kde $a(\alpha, p), b_i(\alpha, p)$ jsou funkce α a p, $i=1,2,3$.

Pokusíme se hypotézu ověřit numerickou cestou.

4 Numerická studie

Pomocí Gaussovy kvadraturní formule byly spočítány intergrály ve vztazích (3.6)-(3.8) a byly vypočteny hodnoty $\rho(R_i, g)$, $i=1,2,3$ pro různé hodnoty α, p a $n=2,\ldots,32$. Na základě získaných výsledků byly odhadovány parametry regresního modelu

$$\frac{1}{(R_i, g)} = c_i + d_i n \; , \tag{4.1}$$

pro $i=1,2,3$. Výsledky potvrdily dobrou shodu mezi modelem a daty. Koeficienty determinace D^2 jsou uvedeny v tabulce 1.

<u>Tabulka 1</u>.

	$p=2$, $\alpha=4$	$p=2$, $\alpha=5$	$p=2$, $\alpha=6$	$p=3$, $\alpha=6$
D^2 pro $\rho(R_1, g)$	0,9989	0,9992	0,9995	0,9992
D^2 pro $\rho(R_2, g)$	0,9991	0,9993	0,9995	0,9996
D^2 pro $\rho(R_3, g)$	0,9995	0,9970	0,9999	1,0000

Použijeme-li proto tento model pro stanovení asymptotického rozvoje dostáváme

$$\rho(R_1, g) = \frac{1}{nd_i} \cdot \frac{1}{1+\frac{c_i}{d_i n}}$$

a dále

$$\rho(R_i, g) = \frac{1}{d_i n} - \frac{c_i}{d_i^2 n^2} + O(n^{-3}) \; , \tag{4.2}$$

pro $i=1,2,3$. Odhady c_i a d_i závisí na α a p. Potom pro odhady $a_i(\alpha, p).b_i(\alpha, p)$ ze vztahu (3.9) dostáváme

$$\hat{a}_i(\alpha,p) = \frac{1}{d_i},$$

$$\hat{b}_i(\alpha,p) = -\frac{c_i}{d_i^2},$$

i=1,2,3. Vypočtené hodnoty odhadů $\hat{a}_i(\alpha,p)$, $\hat{b}_i(\alpha,p)$ pro různé hodnoty α,p jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 2.

	p=2, α=4	p=2, α=5	p=2, α=6	p=3, α=6
$\hat{a}_1(\alpha,p)$	0,0725	0,0617	0,0528	0,0805
$\hat{b}_1(\alpha,p)$	0,0669	0,0608	0,0524	0,0518
$\hat{a}_2(\alpha,p)$	0,0734	0,0626	0,0537	0,0816
$\hat{b}_2(\alpha,p)$	0,0710	0,0760	0,0760	0,0600
$\hat{a}_3(\alpha,p)$	0,0718	0,0610	0,0523	0,0794
$\hat{b}_3(\alpha,p)$	-0,1215	-0,1150	-0.1115	-0,2465

5. Závěr

Numerická studie potvrdila hypotézu vyslovenou v odstavci 3. Teoretické odvození asymptotických rozvojů je předmětem dalšího výzkumu. Aktuální je též otázka odvození obdobných rozvojů pro další rozdělení a některé typy cenzorování (viz Lawless [5]).

Literatura

[1] Harris,B., Soms,A.: Sensitivity and asymptotic properties of Bayesian reliability estimates. Statistics & Decisions 6, 33-47 (1988).

[2] Hurt,J.: Asymptotic expansions for moments of functions of stochastic processes adn their applications. Statistics & Decisions 4, 252-271 (1986).

[3] Hurt,J.: On estimation of reliability in the exponencial case. Aplikace matematiky 21, 263-272 (1976).

[4] Lehmann,E.,L.: Theory of Point Estimation, Wiley, New York (1982).

[5] Lawless,J.,P.: Statistical Models and Methods for Lifetime data. Wiley, New York (1982).

[6] Pugh,E., L.,: The best estimate of reliability in exponential case. Oper. Res. 11/17, 57-61 (1963).