LINEÁRNE MODELY S PODMIENKAMI

Lubomír Kubáček
Matematický ústav SAV, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava

9.1.1990

ÚVOD

Lineárny model$(Y, X\beta, \Sigma(\vartheta))$ je charakterizovaný triedou distribučných funkcií $\{F_{\beta,\vartheta}(\cdot) : \beta \in \mathcal{V},\ \underline{\vartheta}\}$, ktoré sú definované na $\mathcal{R}^n$ (n-rozmerný Euklidov priestor) a pre ktoré platí

$$E(Y|\beta) = \int_{\mathcal{R}^n} u dF_{\beta,\vartheta}(u) = X\beta,\ \beta \in \mathcal{V},\ \vartheta \in \underline{\vartheta} \subset \mathcal{R}^p$$

(nezávislosť strednej hodnoty na ϑ), a

$$Var(Y|\vartheta) = \int_{\mathcal{R}^n} (u - X\beta)(u - X\beta)' dF_{\beta,\vartheta}(u) = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i V_i,$$

$\beta \in \mathcal{V},\ \vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_p)' \in \underline{\vartheta} \subset \mathcal{R}^p$ (nezávislosť kovariančnej matice na β).

Tu Y je n-rozmerný náhodný vektor s distribučnou funkciou $F_{\beta,\vartheta}(\cdot)$, X je daná $n \times k$ matica a $V_1, \dots, V_p$ sú dané $n \times n$ symetrické matice. Vektor β je neznámy parameter prvého rádu, ϑ je neznámy parameter druhého rádu. O množine $\underline{\vartheta}$ budeme predpokladať, že obsahuje otvorenú guľu v $\mathcal{R}^p$. Pre $\mathcal{V}$ budeme rozlišovať dva prípady: 1. $\mathcal{V} = \mathcal{R}^k$, 2. $\mathcal{V} = \{u : u \in \mathcal{R}^k,\ b + Bu = 0\}$, kde b je q-rozmerný vektor s vlastnosťou $b \in \mathcal{M}(B)$ (stĺpcový priestor matice B) a B je daná $q \times k$ matica.

Prvý prípad označíme LM (lineárny model) alebo $(Y, X\beta, \beta \in \mathcal{R}^k, \Sigma(\vartheta), \vartheta \in \underline{\vartheta})$. Druhý prípad označíme LMC (lineárny model s podmienkou) alebo $(Y, X\beta, \beta \in \mathcal{V}, \Sigma(\vartheta), \vartheta \in \underline{\vartheta})$.

Cieľom príspevku je analyzovať niektoré analógie medzi odhadmi v LM a v LMC.

1 APOSTERIÓRNA A APRIÓRNA PODMIENKA

Nech v LM je $r = R[\Sigma(\vartheta)]$ (hodnosť matice $\Sigma(\vartheta)$) $< n$. Potom existuje $n \times r$ matica J a $n \times (n-r)$ matica N s vlastnosťou

$$\begin{pmatrix} J' \\ N' \end{pmatrix} \Sigma(\vartheta)(J, N) = \begin{pmatrix} I, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

kde I je identická $r \times r$ matica. Z toho vyplýva $P\{N'Y = N'X\beta|\beta, \vartheta\} = 1$. Ak teda realizujeme vektor Y vektorom y, potom vznikne aposteriórna podmienka na vektor β. Určenie $\vartheta - LBLUE$ (locally best linear unbiased estimator) funkcie $g(\beta) = g'\beta$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, ktorá je nevychýlene odhadnuteľná, tzn. $g \in \mathcal{M}(X')$, môžme v tomto prípade vyjadriť viacerými vzťahmi:

$$\widehat{g'\beta} = g'[X'\Sigma^-(\vartheta)X]^- X'\Sigma^-(\vartheta)y, \quad \text{ak} \quad \mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(\Sigma(\vartheta)) \tag{1}$$

$$\widehat{g'\beta} = g'\{X'[\Sigma(\vartheta) + XX']^- X\}^- X'[\Sigma(\vartheta) + XX']^- y, \quad \text{ak} \quad \mathcal{M}(X) \not\subset \mathcal{M}(\Sigma(\vartheta)). \tag{2}$$

$$\widehat{g'\beta} = g'[(X')^-_{m(\Sigma(\vartheta))}]'y. \tag{3}$$

$$\widehat{g'\beta} = g'\{(X'JJ'X)^{-1} - (X'JJ'X)^{-1}X'N[N'X(X'JJ'X)^{-1}X'N]^{-1}N'X(X'JJ'X)^{-1}\} \tag{4}$$

$$X'JJ'y + (X'JJ'X)^{-1}X'N[N'X(X'JJ'X)^{-1}X'N]^{-1}N'y \quad \text{ak matica} \quad X'JJ'X \quad \text{je regulárna}$$

atď.

Uvedené vzťahy sú zovšeobecnením vzťahu

$$\widehat{g'\beta} = g'[X'\Sigma^{-1}(\vartheta)X]^{-1}X'\Sigma^{-1}(\vartheta)y$$

pre $\vartheta - LBLUE$ známeho z regulárneho Aitkenovho modelu (tzn. $R(X) = k < n$ a $R[\Sigma(\vartheta)] = n$). Symbol $(X')^-_{m(\Sigma)}$ znamená minimum Σ-seminorm zovšeobecnenú inverziu matice X' (podrobnejšie v [4]). Podrobnejšou analýzou by sme zistili, že podmienka $N'y = N'X\beta$ nemení

triedu lineárnych nevychýlene odhadnuteľných funkcií parametra β

triedu lineárnych nevychýlených odhadov funkcie parametra β,

podmienku lokálnej efektívnosti na štatistiku $L'Y$ atď.

(podrobnejšie v ďalšej časti príspevku).

Pri vyjadrení odhadu $\widehat{g'\beta}$ podľa (4) sa apostriórna podmienka síce prejaví výrazne ($\Sigma(\vartheta)$ regulárna $\Rightarrow N$ neexistuje a J je regulárna, $JJ' = \Sigma^{-1}(\vartheta)$), ale v (1),(2) a (3) ju netreba pri výpočte uvažovať. Preto sa týmto typom podmienky v ďalšom nezaoberáme.

Kvalitatívne iná situácia je v LMC. Dokumentuje to nasledujúci príklad: Uvažujme druhý regulárny model (Aitkenov model,[1], str. 146), tzn. $E(Y|\beta) = X\beta$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, $Var(Y|\vartheta) = \vartheta V$, $\vartheta \in (0,\infty)$, kde hodnosť $R(X) = k < n$ a $R(V) = n$, a piaty regulárny model;([1], str.146), tzn. $E(Y|\beta) = X\beta$, $\beta \in \{u : u \in \mathcal{R}^k, b + Bu = 0\} = \mathcal{V}$, $Var(Y|\vartheta) = \vartheta V$, kde platí $b \in \mathcal{M}(B)$, $R(B) = q < k$.

Je známe, že v druhom regulárnom modeli $UBLUE$ (uniformly best linear unbiased estimator) parametra β je ([1],str.148)

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

kým v piatom regulárnom modeli je $UBLUE$ parametra β daný vzťahom ([1],str.152)

$$\hat{\hat{\beta}} = \{(X'V^{-1}X)^{-1} - (X'V^{-1}X)^{-1}B'[B(X'V^{-1}X)^{-1}B']^{-1}B(X'V^{-1}X)^{-1}\}X'V^{-1}Y -$$

$$-(X'V^{-1}X)^{-1}B'[B(X'V^{-1}X)^{-1}B']^{-1}b$$

(porovnaj (4)).

Význam apriórnej podmienky vynikne veľmi názorne pri geometrickom prístupe. Odhad $\hat{\hat{\beta}}$ vznikne z $\hat{\beta}$ cez akúsi projekciu. Presne vyjadrené

$$\hat{\hat{\beta}} = P_{Ker(B)}^{(X'V^{-1}X)^{-1}}(\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0,$$

kde β_0 je ľubovoľný element variety $\mathcal{V}$ a $P_{Ker(B)}^{(X'V^{-1}X)^{-1}}$ je projekčná matica na $Ker(B)$ v k-rozmernom lineárnom priestore $\mathcal{L}$, v ktorom je definovaný skalárny súčin pomocou vzťahu $< u, v >= u'(X'V^{-1}X)^{-1}v$, $u, v \in \mathcal{L}$; $Ker(B) = \{u : Bu = 0\}$.

2 FORMULÁCIA PROBLÉMU

Problémy v LM je nutné formulovať vhodným spôsobom, aby v úvode spomínamé analógie bolo možné skúmať. Budeme vychádzať z Raovej unifikovanej teórie [5]. V nej nepredpokladáme regularitu modelu, tzn. nemusí byť splnená podmienka $R(X) = k < n$ a $R[\Sigma(\vartheta)] = n$. Strata regularity vedie k vzniku neprázdnej triedy lineárnych funkcií parametra $\beta \in \mathcal{R}^k$, ktoré nie sú nevychýlene odhadnuteľné. To je potrebné rešpektovať v základných tvrdeniach lineárnej teórie odhadu v univerzálnom LM, ktoré sú v ďalšom uvedené. Z týchto tvrdení možno vychádzať pri riešení všetkých v praxi sa vyskytujúcich problémov odhadov.

LR_1: Funkcia $h(\beta) = h'\beta$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, je lineárne nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy ak $h \in \mathcal{M}(X')$.

LR_2: Ak $h_0(\beta) = 0$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, potom trieda lineárnych nevychýlených odhadov funkcie $h_0(\cdot)$ je $\mathcal{U}_0 = \{L_0'Y : L_0 \in \mathcal{M}(M_X)\}$, kde $M_X = I - X(X'X)^-X'$.

LR_3: Štatistika $L'Y$ je $\vartheta_0 - LBLUE$ svojej strednej hodnoty práve vtedy, ak $M_X\Sigma(\vartheta_0)L = 0$.

LR_4: Štatistika $L'Y$ je $UBLUE$ svojej strednej hodnoty práve vtedy, ak $L \in Ker(\sum_{i=1}^p V_iM_XV_i)$.

LR_5: Funkcia $h(\beta) = h'\beta$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, má $UBLUE$ práve vtedy, ak $h \in \mathcal{M}[X'Ker(\sum_{i=1}^p V_iM_XV_i)]$.

Dôkazy LR_1 a LR_2 sú elementárne; LR_3 je dôsledkom Raovej fundamentálnej lemy z teórie lokálne najlepších odhadov [6] str. 257, dôkazy LR_4 a LR_5 pozri v [1], Theorem 5.7.1 a Theorem 5.7.2.

Na pr. z LR_3 vyplýva, že $h'[(X')^-_{m(\Sigma(\vartheta_0))}]'Y$ je $\vartheta_0 - LBLUE$ funkcie $h(\beta) = h'\beta$, $\beta \in \mathcal{R}^k$, ak $h \in \mathcal{M}(X')$ (LR_1).

Úlohou ďalšej časti príspevku je ukázať, ako sa pravidlá $LR_1, \ldots, LR_5$ v LM zmenia v LMC.

Problematika kvadratických odhadov v LM je v porovnaní s problematikou lineárnych odhadov zložitejšia. Preto a aj pre obmedzený rozsah príspevku sa s analógiami pravidiel pre určenie kvadratických odhadov v LM resp. LMC nezaoberáme. Niektoré predbežné výsledky z tejto oblasti pozri v [2].

3. LINEÁRNE ODHADY PARAMETROV PRVÉHO RÁDU

LMC možno zapísať tromi ekvivalentnými spôsobmi:

$$(Y, X\beta, \ \beta \in \ \{u : \ b + Bu = 0\}, \Sigma(\vartheta), \ \vartheta \in \underline{\vartheta}), \tag{5}$$

$$(Y - X\beta_0, \ XK_B\gamma, \ \gamma \in \mathcal{R}^{k-R(B)}, \ \Sigma(\vartheta), \ \vartheta \in \underline{\vartheta}, \ \beta = \beta_0 + K_B\gamma), \tag{6}$$

$$\left(\begin{pmatrix} Y \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}\beta, \ \beta \in \{u : \ b + Bu = 0\}, \ \begin{pmatrix} \Sigma(\vartheta), & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \ \vartheta \in \underline{\vartheta}\right), \tag{7}$$

kde β_0 je ľubovoľný zafixovaný prvok z $\mathcal{V}$ a K_B je $k \times [k - R(B)]$ matica s vlastnosťou $\mathcal{M}(K_B) = Ker(B)$.

V ďalšom sa ukáže, že zápis (7) je vhodný pre štúdium spomínaných analógií. Ukážeme to na LR_1. Pretože (6) je LM, platí LR_1 v nasledujúcej podobe:

Lema 3.1. Funkcia $f(\beta) = f'\beta$, $\beta \in \{u : \ b + Bu = 0\}$, je nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy, ak $K_B'f \in \mathcal{M}(K_B'X')$.

Dôkaz: Pretože $\beta = \beta_0 + K_B\gamma$, $\gamma \in \mathcal{R}^{k-R(B)}$, môžme funkciu $f(\cdot)$ uvažovať v tvare $f(\beta) = f'\beta_0 + f'K_B\gamma$. Táto funkcia je nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy, ak existuje vektor $L \in \mathcal{R}^n$ a číslo $l \in \mathcal{R}^1$ s vlastnosťou $\forall\{\gamma \in \mathcal{R}^{p-R(B)}\}$ $E(L'Y + l|\beta_0, \gamma) = L'X(\beta_0 + K_B\gamma) + l = f'K_B\gamma \Leftrightarrow K_B'f = K_B'X'L$ & $l = f'\beta_0 - L'X\beta_0$, č.b.t.d.

Ekvivalencia
$$\forall\{\gamma \in \mathcal{R}^{k-R(B)}\}\ L'XK_B\gamma = f'K_B\gamma \Leftrightarrow K_B'f = K_B'X'L$$
vyplýva zo skutočnosti, že vektor γ prebieha celý priestor $\mathcal{R}^{k-R(B)}$. Pretože v LMC $\beta \in \{u : b + Bu\} \neq \mathcal{R}^k$, nemôže v (5) platiť analógia tejto ekvivalencie. Platí však (7) v nasledujúcej podobe:

Veta 3.2. V LMC je funkcia $f(\beta) = f'\beta$, $\beta \in \mathcal{V}$, nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy, ak $f \in \mathcal{M}(X', B')$.

Dôkaz: Vzhľadom na Lemu 3.1 stačí ukázať ekvivalenciu $f \in \mathcal{M}(X', B') \Leftrightarrow K_B'f \in \mathcal{M}(K_B'X')$. Nech $f = X'u + B'v$. Potom $K_B'f = K_B'X'u$ a teda $K_B'f \in \mathcal{M}(K_B'X')$. Nech naopak $K_B'f = K_B'X'u$. Potom $f \in \{X'u + z - (K_B')^- K_B' z : z \in \mathcal{R}^k\}$ pretože $X'u$ je partikulárne riešenie pre neznámy vektor f v rovnici $K_B'f = K_B'X'u$. Pretože $\mathcal{M}[I - (K_B')^- K_B'] = \mathcal{M}(B')$ je vektor $z - (K_B')^- K_B' z$ elementom $\mathcal{M}(B')$ a teda $f = X'u + B'v$, č.b.t.d.

Dokázali sme vlastne ekvivalenciu
$$\forall\{\beta \in \{u : b + Bu = 0\}\}\ E[L_1'Y + L_2'(-b)|\beta] = (L_1', L_2')\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}\beta = f'\beta \Leftrightarrow f \in \mathcal{M}(X', B').$$

Z poslednej úvahy je zrejmé, že LMC v podobe (7) sa vo vzťahu k LR_1 správa ako LM s maticou plánu $\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}$.

Otázkou je, či sa takto správa aj vo vzťahu k $LR_2, \ldots, LR_6$. Odpoveď je prekvapujúco (aspoň pre autora) kladná, ako ukazujú ďalej uvedené tvrdenia.

Veta 3.3. Trieda všetkých lineárnych nevychýlených odhadov funkcie $h_0(\beta) = 0$, $\beta \in \mathcal{V}$, v (7) je $\mathcal{U}_0 = \{L_{01}'Y + L_{02}'(-b) : L_{01}', L_{02}')' \in \mathcal{M}(M_{\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}})\}$.

Veta 3.4. Štatistika $L_1'Y + L_2'(-b)$ v modeli (7) je $\vartheta_0 - LBLUE$ svojej strednej hodnoty práve vtedy, ak
$$M_{\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \Sigma(\vartheta_0), & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veta 3.5. Štatistika $L_1'Y + L_2'(-b)$ v modeli (7) je $UBLUE$ svojej strednej hodnoty práve vtedy, ak
$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \in Ker\left(\sum_{i=1}^{p}\begin{pmatrix} V_i, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} M_{\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} V_i, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Veta 3.6. Funkcia $f(\beta) = f'\beta$, $\beta \in \mathcal{V}$, s vlastnosťou $f \in \mathcal{M}(X', B')$ má $UBLUE$ práve vtedy, ak
$$f \in \mathcal{M}\{(X', B')Ker[\sum_{i=1}^{p}\begin{pmatrix} V_i, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} M_{\begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} V_i, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}]\} = \mathcal{N}.$$

Ďalej platí
$$\mathcal{N} = \mathcal{M}(X'Ker\{\sum_{i=1}^{p} V_i[I - X(X'X + B'B)^- X']V_i\}, B').$$

Namiesto ostatných dôkazov naznačíme pre jednoduchosť len dôkaz vety 3.4 (podrobnosti a dôkazy ostatných tvrdení pozri v [2]). Najprv však budeme potrebovať nasledujúcu lemu:

Lema 3.7: Nech W je $n \times n$ pozitívne semidefinitná (p.s.d.) matica, nech $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(W)$ a nech V je ľubovolná p.s.d. $q \times q$ matica s vlastnosťou $\mathcal{M}(B'VB) = \mathcal{M}(B')$. Potom
$$P_{XK_B}^W = X(X'WX + B'VB)^- X'W -$$
$$-X(X'WX + B'VB)^- B'[B(X'WX + B'VB)^- B']^- B(X'WX + B'VB)^- X'W.$$

Dôkaz. Pretože $\mathcal{M}(XK_B) = \mathcal{M}(XM_{B'})$, kde $M_{B'} = I - B'(BB')^- B$, možno projekčnú maticu $P_{XK_B}^W$ napísať v tvare
$$P_{XK_B}^W = P_{XM_{B'}}^W = XM_{B'}(M_{B'}X'WXM_{B'})^+ M_{B'}X'W =$$
$$= XM_{B'}[M_{B'}(X'WX + B'VB)M_{B'}]^+ M_{B'}X'W =$$
$$= X[M_{B'}(X'WX + B'VB)M_{B'}]^+ X'W =$$
$$= X\{(X'WX + B'VB)^-$$
$$-(X'WX + B'VB)^- B'[B(X'WX + B'VB)^- B']^- B(X'WX + B'VB)^-\}X'W,$$
č.b.t.d.

V dôkaze sme využili nasledovné vzťahy
$\mathcal{M}(B') \subset \mathcal{M}(X'WX + B'VB)$ (pre podpriestor na pravej strane inklúzie totiž platí $\mathcal{M}(X'WX + B'VB) = \mathcal{M}(X'WX, B'VB)$, čo vyplýva z [4] str. 122; ďalej sme predpokladali $\mathcal{M}(B') = \mathcal{M}(B'VB)$); ďalej
$$[M_{B'}(X'WX + B'VB)M_{B'}]^+ = (X'WX + B'VB)^+ -$$

$$-(X'WX+B'VB)^{+}B'[B(X'WX+B'VB)^{+}B']^{+}B(X'WX+B'VB)^{+}$$

(tento vzťah dokážeme ako priamy dôsledok definície Moorovej-Penroseovej zovšeobecnej inverzie matice) a konečne $[\mathcal{M}(X')\subset\mathcal{M}(X'WX+B'VB)\ \&\ \mathcal{M}(B')\subset\mathcal{M}(X'WX+B'VB)]\Rightarrow[X(X'WX+B'VB)^{+}X'=X(X'WX+B'VB)^{-}X'\ \&\ X(X'WX+B'VB)^{+}B'=X(X'WX+B'VB)^{-}B'$ pre ľubovoľnú zovšeobecnenú inverziu $(X'WX+B'VB)^{-}]$.

Dôkaz vety 3.4. V LMC možno LR_2 vysloviť takto: štatistika $L_1'(Y-X\beta_0)+f'\beta_0$ je $\vartheta_0-LBLUE$ funkcie $f(\beta)=f'\beta,\ \beta\in\mathcal{V}$, kde $K_B'f=K_B'X'L_1$ ($\Rightarrow E[L_1'(Y-X\beta_0)+f'\beta_0|\beta]=L_1'(X\beta-X\beta_0)+f'\beta_0=L_1'XK_B\gamma+f'\beta_0=f'(K_B\gamma+\beta_0)=f'\beta,\beta\in\mathcal{V}$ práve vtedy, ak

$$M_{XK_B}\Sigma(\vartheta_0)L_1=0 \tag{8}$$

V LMC (7) to isté pravidlo by sa malo dať vyjadriť nasledovne: Štatistika $L_1'Y+L_2'(-b)$ je $\vartheta_0-LBLUE$ tej istej funkcie $f(\beta)=f'\beta,\ \beta\in\mathcal{V}$, kde $f=X'L_1+B'L_2$ (pozri vetu 3.2) ($\Rightarrow E[L_1Y+L_2'(-b)|\beta]=L_1X\beta+L_2B\beta=f'\beta,\ \beta\in\mathcal{V}$) práve vtedy, ak

$$M_{\begin{pmatrix}X\\B\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\Sigma(\vartheta_0), & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Nech platí (9), tzn.

$$\begin{pmatrix}I-X(X'X+B'B)^{-}X', & -X(X'X+B'B)^{-}B'\\ -B(X'X+B'B)^{-}X', & I-B(X'X+B'B)^{-}B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma(\vartheta_0), & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}[I-X(X'X+B'B)^{-}X']\Sigma(\vartheta_0)L_1\\ -B(X'X+B'B)^{-}X'\Sigma(\vartheta_0)L_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Nech platí (8), tzn. (lema 3.7, kde $W=I,\ V=I$) $\{I-X(X'X+B'B)^{-}X'+X(X'X+B'B)^{-}B'[B(X'X+B'B)^{-}B']^{-}B(X'X+B'B)^{-}X'\}\Sigma(\vartheta_0)L_1=0$. Nech $C=I-X(X'X+B'B)^{-}X'$, $D=X(X'X+B'B)^{-}B'[B(X'X+B'B)^{-}B']^{-}B(X'X+B'B)^{-}X'$. Pretože matice C a D sú symetrické a p.s.d. máme:

$$(8)\Leftrightarrow\Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(C+D)\Leftrightarrow\Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(C,D)\Leftrightarrow\Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(C)\ \&\ \Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(D)\Leftrightarrow(9),$$

č.b.t.d.

Ekvivalencia $\Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(C+D)\Leftrightarrow\Sigma(\vartheta_0)L_1\perp\mathcal{M}(C,D)$ vyplýva z [4] str.122. Implikácia (9)$\Rightarrow$(8) je zrejmá.

4 PRÍKLAD

Uvažujme model (podrobnejšie v [3], odsek 2.4): $E\left[Y|\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\right]=X\beta_1,\ \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}: b+Bu_1+Cu_2=0\right\}=\mathcal{V}$, $Var(Y|\vartheta)=\sum_{i=1}^{p}\vartheta_iV_i$. Tento model môžme zapísať ako LMC (7) $E\left[\begin{pmatrix}Y\\-b\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}X, & 0\\ B, & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\in\mathcal{V},\ var\left[\begin{pmatrix}Y\\-b\end{pmatrix}|\vartheta\right]=\sum_{i=1}^{p}\vartheta_i\begin{pmatrix}V_i, & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}$.

Ak podľa vety 3.2 funkcia $h(\beta_1,\beta_2)=p_1'\beta_1+p_2'\beta_2,\ \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\in\mathcal{V}$, má vlastnosť

$$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}\begin{pmatrix}X', & B'\\ 0, & C'\end{pmatrix},$$

potom z vety 3.4 dostávame, že $\vartheta_0-LBLUE$ funkcie $h(\cdot)$ je

$$\widehat{p_1'\beta_1+p_2'\beta_2}=(p_1',p_2')\left[\begin{pmatrix}X', & B'\\ 0, & C'\end{pmatrix}^{-}_{m\begin{pmatrix}\Sigma(\vartheta_0), & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}}\right]'\begin{pmatrix}Y\\-b\end{pmatrix}.$$

V prípade regularity tohto modelu dostávame ([3], vzťah (2.4.18))

$$\widehat{p_1\beta_1+p_2\beta_2}=(p_1',p_2')\left[\begin{pmatrix}(X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)X)^{-1}\\0\end{pmatrix}X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)Y-\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}(X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)X)^{-1}B'Q_{11}\\Q_{21}\end{pmatrix}(b+B(X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)Y\right),$$

kde

$$\begin{pmatrix}Q_{11}, & Q_{12}\\ Q_{21}, & Q_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(X'\Sigma^{-1}(\vartheta_0)X)^{-1}B', & C\\ C', & 0\end{pmatrix}^{-1}.$$

References

[1] Kubáček,L: Foundation of estimation theory. Elsevier, Amsterdam - Oxford - New York - Tokyo, 1988.

[2] Kubáček,L.: Equivalent algorithms for estimation in linear model with condition (zaslané do Mathematica Slovaca).

[3] Kubáčková,L: Základné metódy optimálneho vyhodnotenia experimentálnych údajov, Veda,Bratislava (v tlači).

[4] Rao,C.R.,Mitra,S.K.: Generalized Inverse of matrices and its application. J.Wiley, New York 1971.

[5] Rao,C.R.: Unified theory of linear estimation. Sankhya A 33,1971, 37o-396.

[6] Rao,C.R.: Linear statistical inference and its application. J.Wiley. New York 1965.