JAK NEHODNOTIT ZMĚNU STAVU

Jan Klaschka, Výzkumný ústav Psychiatrický, Praha

Příspěvek je určitou zkouškou robustnosti konference ROBUST, neboť jeho předmětem není statistika. Statistická je práce jen ve dvou ohledech: za prvé je inspirována zkušeností (aktuálně jednoho, potenciálně mnohého) praktického statistika, za druhé se uplatňuje statistický způsob nazírání problémů.

Doufám, že mi čtenář odpustí, že výklad mnohdy pozbývá stylu odborné stati a stává se útvarem spíše epickým. Neodolal jsem pokušení alespoň naznačit, co pro mne bylo možná zajímavější, než výsledky: tápání, které jim předcházelo (a také po nich následovalo).

1. Krize jednoho systému

Kvantifikace úspěšnosti metod psychiatrického léčení se často opírá o různé "umělé" pomůcky. Jednou z nich je tzv. index terapeutické účinnosti navržený Rakúsem [1]; zde se přidržíme "folklórního" označení **Rakúsův index**.

Co je Rakúsův index: Momentální stav pacienta je charakterizován tíží N různých příznaků choroby. Tíže každého z těchto příznaků je ohodnocena celočíselným skórem v rozmezí od 1 (optima) do 7 (pessima). Počátečnímu stavu (nerozlišujeme dále reálný stav a jeho číselnou reprezentaci) $\mathbf{s} = ({}^1s, {}^2s, \ldots, {}^Ns)$ a konečnému stavu $\mathbf{t} = ({}^1t, {}^2t, \ldots, {}^Nt)$ $(1 \le {}^is, {}^it \le 7,\ i = 1, \ldots, N)$ je přiřazeno jako míra zlepšení či zhoršení číslo mezi -1 a $+1$ (přičemž lepší = vyšší) podle vzorce

$$\mathbf{RI}(\mathbf{s},\ \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{I}({}^is,\ {}^it)/\ N\ , \tag{1}$$

kde $\mathbf{I}$ je index změny jednotlivého příznaku definovaný jako

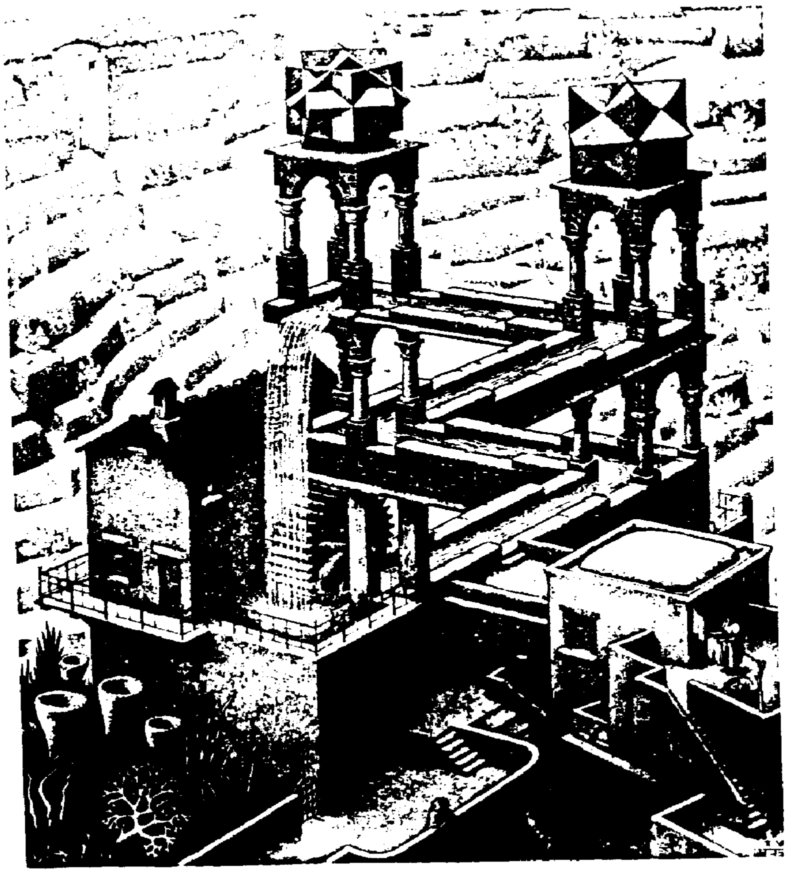
$$\mathbf{I}({}^is,\ {}^it) = \begin{cases} ({}^is - {}^it)/({}^is - 1) & {}^is > {}^it, \\ 0 & {}^is = {}^it, \\ ({}^is - {}^it)/(7 - {}^is) & {}^is < {}^it. \end{cases} \tag{2}$$

(Ve skutečnosti je Rakúsova definice složitější, ale zjednodušení nemá vliv na hodnoty pro argumenty použité v příkladech.)

Index změny jednotlivého příznaku I udává poměr mezi počtem bodů, o který se tíže příznaku změnila, a počtem bodů, o který se maximálně změnit mohla. Podivné ovšem je, že se jako největší možná změna uvažuje jednou největší možné zlepšení (dojde-li ke skutečnému zlepšení), a podruhé maximálně možné zhoršení (v případě skutečného zhoršení). Tento "dvojí metr" vyvolává podezření, že Rakúsův index bude někdy "čarovat" - a skutečně netřeba hledat dlouho: např. $\mathbf{I}(3,\ 2) = 1/2 > \mathbf{I}(6,\ 5) = 1/5$, ale $\mathbf{I}(2,\ 3) = -1/5 > \mathbf{I}(5,\ 6) = -1/2$, tedy opakem velkého (resp. malého) zlepšení příznaku je malé (resp. velké) zhoršení.

Takové pozorování samo o sobě nemusí ještě na uživatele Rakúsova indexu působit dostatečně skličujícím dojmem, nicméně provokuje ke konstrukci sugestivnějšího odstrašujícího příkladu: Uvažujme jen 2 příznaky. Přechod ze stavu (2, 2) do stavu (1, 6) je hodnocen **RI** = +0.1, tj. jako zlepšení (kladné hodnoty lze takto jistě interpretovat, protože setrvání v libovolném stavu je hodnoceno nulou), stejně tak přechod ze stavu (1, 6) do (3, 3) (**RI** = +2/15). Pacient, který vykoná postupně oba uvedené přechody, se tedy dvěma úspěšnými kroky dostane do horšího stavu, než v jakém byl na počátku (přechod (2, 2) → (3, 3) je hodnocen **RI** = -0.2) - viz obr.2.

Rakúsův index jakožto umělý systém podávání zpráv o změnách stavu odvádí, jak patrno z příkladu, zajímavou práci: Jím zprostředkované informace vytvářejí obraz choroby (zrcadlově) podobný scenérii Escherova Vodopádu (obr. 1), kde voda teče shora dolů, aby dospěla z nejnižšího do nejvyššího bodu své dráhy. Tak se v psychiatrickém výzkumu objevuje nová kvalita - harmonie formy a obsahu.



Obr. 1. M. C. Escher: Vodopád (litografie, 1961). Reprodukováno z [2].

2. Poučení

Pozorované podivné vlastnosti Rakúsova indexu bychom měli negovat nějakým kritériem "rozumnosti" funkce, jejíž hodnoty mají vyjadřovat míru zlepšení stavu. Přitom bychom se měli vymanit z úzkého psychiatrického kontextu.

Něco definic nezbytných k dalšímu výkladu: **Stavy** budeme nazývat prvky nějaké konečné množiny, tzv. **stavového prostoru**. (V zájmu obecnosti nepředpokládáme žádnou vnitřní strukturu stavů, např. že by se stav měl skládat z příznaků.) **Ohodnocení stavů** je reálná funkce definovaná na stavovém prostoru. Protože chceme modelovat i situace, kdy přechod mezi některými stavy není možný, budeme **přechody** nazývat ty uspořádané dvojice stavů (první stav chápeme jako počáteční, druhý jako konečný), které jsou prvky **přechodové relace (přechodového grafu)** - binární relace na stavovém prostoru. **Index změny** je reálná funkce definovaná na přechodovém grafu. Je-li S stavový prostor, $G \subseteq S \times S$ přechodová relace a H index změny definovaný na G, budeme podle potřeby někdy indexem změny nazývat nejen funkci H, ale i trojici $\langle S, G, H \rangle$.

Jak tedy definovat "rozumnost" indexu změny H? Mohli bychom např. začít sepisovat různé podmínky typu

$$[H(s, t) > 0, H(t, u) > 0, H(s, u) \text{ definováno}] \Rightarrow H(s, u) > 0$$

nebo

$$[H(s, t) \leq H(u, v), H(t, s), H(v, u) \text{ definováno}] \Rightarrow H(t, s) \geq H(v, u) .$$

Není bohužel snadné rozpoznat, kolik a jakých podmínek je třeba, aby definice "rozumnosti" byla "rozumná".

Jinou možností je prohlásit index změny H za "rozumný" právě tehdy, je-li realizovatelný pomocí ohodnocení stavů, tj. lze-li jej vyjádřit (v jeho definičním oboru) jako

$$H(s, t) = Q(t) - Q(s) , \tag{3}$$

popř. obecněji jako

$$H(s, t) = F(Q(t) - Q(s)) , \tag{4}$$

kde Q je ohodnocení stavů a F je transformace (reálná funkce reálné proměnné) s určitými vlastnostmi. Takové pojetí "rozumnosti" by ovšem nebylo příliš přirozené: Neexistuje-li pro daný index změny H funkce Q splňující (3) (popř. funkce Q a F splňující (4)), připustíme snadno, že "nerozumnost" H *s tím souvisí* - těžko však, že *v tom spočívá*.

Při hledání kritéria se ještě jednou vrátíme k Rakúsovu indexu. Proti příkladu, na němž jsme demonstrovali "nerozumnost" RI se kupodivu dá nalézt argument, obsažený ostatně už v (kompletní, zde neuvedené) Rakúsově definici [1]. Postupné změny stavu se Rakúsovým indexem hodnotí tak, že se stav při každém vyšetření počínaje druhým srovnává (pomocí vzorců (1) a (2)) jedině se stavem při vyšetření prvním. Dynamika popsaná přechody $(2, 2) \rightarrow (1, 6) \rightarrow (3, 3)$ je pak chápána jako příznivá do druhého vyšetření ($(2, 2) \rightarrow (1, 6)$, RI = +0.1) a nepříznivá do třetího vyšetření ($(2, 2) \rightarrow (3, 3)$, RI = -0.2); přechod $(1, 6) \rightarrow (3, 3)$ mezi stavy při druhém a třetím vyšetření se Rakúsovým indexem prostě nehodnotí (obr. 3). Tím je rozpor mezi hodnotami RI cenzurován a zdánlivě mizí.

Nemůže-li moc cenzury zlomit jednotlivec, je třeba rozpory demonstrovat hromadně. Mějme (mysleme si) dva soubory po dvou pacientech. V prvém souboru přejde jeden pacient ze stavu (2, 2) do stavu (1, 6), druhý z (1, 6) do (3, 3); ve druhém souboru se uskuteční přechody $(2, 2) \rightarrow (3, 3)$ a $(1, 6) \rightarrow (1, 6)$. Rozdělení počátečních stavů je v obou souborech stejné (50% (2, 2), 50% (1, 6)), totéž platí o rozdělení konečných stavů (50% (1, 6), 50% (3, 3)), tedy změny v souborech jsou v jistém smyslu (např. z pohledu epidemiologa, který rozdělení stavů v souboru v dané chvíli chápe jako momentální "stav souboru") rovnocenné. Přesto jsou z jiného hlediska - *z hlediska Rakúsova indexu* - změny v prvním souboru (hodnocené vesměs kladným **RI**) jednoznačně příznivější než změny ve druhém souboru (hodnocené vesměs **RI** nekladným). Původní rozpor "stav pacienta se dvakrát zlepšil, čímž se zhoršil" je tedy transformován do podoby "dva soubory se mění stejně, ale jeden lépe" (obr. 4).

$$\begin{tikzcd}(2,\ 2) \arrow[r, "+0.1"] \arrow[rr, bend right, "-0.2"'] & (1,\ 6) \arrow[r, "+0.133"] & (3,\ 3)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] & t_2 \arrow[r, dash] & t_3 \arrow[r] & \text{čas}\end{tikzcd}$$

Obr. 2. Postupné zlepšování stavu, jehož výsledným efektem je zhoršení.

$$\begin{tikzcd}(2,\ 2) \arrow[r, "+0.1"] \arrow[rr, bend right, "-0.2"'] & (1,\ 6) & (3,\ 3)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] & t_2 \arrow[r, dash] & t_3 \arrow[r] & \text{čas}\end{tikzcd}$$

Obr. 3. Situace obr. 2 po cenzurním zásahu (přechod (1, 6) → (3, 3) se nehodnotí).

1. soubor:

$$(2,\ 2) \xrightarrow{+0.1} (1,\ 6)$$

$$(1,\ 6) \xrightarrow{+0.133} (3,\ 3)$$

$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] & t_2 \arrow[r] & \text{čas}\end{tikzcd}$$

2. soubor:

$$(2,\ 2) \xrightarrow{-0.2} (3,\ 3)$$

$$(1,\ 6) \xrightarrow{0} (1,\ 6)$$

$$\begin{tikzcd} t_1 \arrow[r, dash] & t_2 \arrow[r] & \text{čas}\end{tikzcd}$$

Srovnání:

$$\{\ (2,\ 2),\ (1,\ 6)\ \} \xrightarrow[\text{2.)}\ (-0.2,\ 0)]{\text{1.)}\ (+0.1,\ +0.133)} \{\ (1,\ 6),\ (3,\ 3)\ \}$$

Obr. 4. **Dva soubory se mění stejně (rozdělení počátečních i konečných stavů je v obou stejné), ale jeden lépe než druhý (podle dosažených hodnot Rakúsova indexu dochází v jednom souboru vesměs ke zlepšením, zatímco ve druhém souboru se nelepší nikdo).**

Kritériem "rozumnosti" bude nadále tzv. **regularita** - vlastnost indexu změny spočívající v absenci právě uvedeného rozporu. Upřesněme to.

Souborem velikosti n budeme rozumět uspořádanou n-tici přechodů (každý z těchto přechodů modeluje vývoj stavu jednoho pacienta). Dva **soubory** jsou **marginálně rovnocenné,** jsou-li v obou jak stejná rozdělení (tj. stejné relativní četnosti) počátečních stavů, tak stejná rozdělení konečných stavů.

Index změny H je **regulární**, jestliže neexistuje dvojice marginálně rovnocenných souborů téže velikosti takových, že H je (resp. hodnoty H jsou, resp. rozdělení hodnot H je) v jednom souboru *větší* než ve druhém. Predikát "*větší*" konkretizujeme několika různými způsoby a podle jeho významu rozlišujeme několik typů regularity. Pro dosud studované typy regularity je význam tvrzení "H je v souboru $A = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ a větší než v souboru $B = (g'_1, g'_2, \dots, g'_n)$" následující.

A. Kardinální regularita: $\sum_{i=1}^{n} H(g_i) > \sum_{i=1}^{n} H(g'_i)$. (U kardinálně regulárního indexu změny je tedy rozdělením počátečních a konečných stavů jednoznačně dán aritmetický průměr hodnot v souboru.) Celou třídu příbuzných typů regularity lze definovat nahrazením "obyčejné" aritmetické sumy součtem v nějaké jednoduše uspořádané grupě (např. součinem - pak je rozdělením počátečních a konečných stavů dán geometrický průměr hodnot indexu změny); těmito variacemi na téma kardinální regularity se zde nebudeme zabývat.

B. Ordinální regularita: Pro hodnoty $H(g_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ uspořádané podle velikosti jako $H_{(1)} \le H_{(2)} \le \dots \le H_{(n)}$ a hodnoty $H(g'_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ uspořádané podle velikosti jako $H'_{(1)} \le H'_{(2)} \le \dots \le H'_{(n)}$ platí vesměs $H_{(i)} \ge H'_{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, přičemž aspoň v jednom případě je nerovnost ostrá. (Jde de facto o non-stochastickou analogii vztahu "být stochastcky větší".)

C. Slabá ordinální regularita: $H_{(i)} > H'_{(i)}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ (při značení z bodu B).

Posuzovat "rozumnost" indexu změny H podle kritéria kardinální regularity je namístě tehdy, chápeme-li H jako veličinu intervalového typu (u níž polohu hodnot v souboru charakterizuje aritmetický průměr). Podle kritéria ordinální regularity náleží hodnotit "rozumnost" indexu změny chápaného jako veličina ordinální. Zavedení slabé ordinální regularity je pak aktem milosrdenství vůči indexu změny $H(i, j) = \mathrm{sign}(j - i)$, kde i, j jsou pořadová čísla kategorií ordinální veličiny; tento index (který slabě ordinálně regulární je), se totiž chtěl nějak odlišit od Rakúsova indexu (který ani v tomto smyslu regulární není).

3. Několik vět

Věta o kardinální regularitě. Nechť $\langle S, G, H\rangle$ je index změny. Nechť

1.) $(s, s) \in G$ pro všechny stavy s takové, že pro nějaké stavy t a u je $(t, s) \in G$ a $(s, u) \in G$,

2.) $H(s, s) = 0$ pro každý stav s, pro který $(s, s) \in G$.

Potom H je kardinálně regulární, právě když na G platí

$$H(s, t) = Q(t) - Q(s),$$

kde Q je ohodnocení stavů.

Dvojvěta o ordinální a slabé ordinální regularitě. Nechť $\langle S, G, H\rangle$ je index změny. Nechť

1.) $(s, s) \in G$ pro všechny stavy s takové, že pro nějaké stavy t a u je $(t, s) \in G$ a $(s, u) \in G$,

2.) $H(s, s) = c$ (konstanta) pro každý stav s, pro který $(s, s) \in G$.

Potom H je ordinálně (resp. slabě ordinálně) regulární, právě když na G platí

$$H(s, t) = F(Q(t) - Q(s)),$$

kde Q je ohodnocení stavů a F je rostoucí (resp. neklesající) reálná funkce reálné proměnné.

V tvrzení vět se nám oknem vrátila realizovatelnost pomocí ohodnocení stavů, kterou jsme dříve dveřmi vyhnali z definic. Věty konstatují, že "rozumné" hodnocení přechodů mezi stavy je založeno na hodnocení stavů čísly na intervalové škále - a to i v případě, že změny mají být "měřeny" jen na škále ordinální.

Věty znamenají také praktický imperativ: Chcete-li konstruovat regulární index změny, jen pořádně OHODNOŤTE STAVY! Cokoli složitějšího (viz RI - (1),(2)) je špatně! (V této interpretaci vět je ovšem špetka demagogie - konstrukce regulárního indexu změny musí *garantovat existenci* příslušného ohodnocení stavů, nikoli nutně *jím začínat*.)

Předpoklad věty i dvojvěty o přechodové relaci je velmi slabý, vyžaduje o něco méně než reflexivitu (lze-li do nějakého stavu vstoupit a také z něj vystoupit, lze v něm i zůstat); garantuje, že množina souborů marginálně rovnocenných s pevně zvoleným souborem je dostatečně bohatá (viz "rakúsovský" příklad transformace přechodů $(2, 2) \to (1, 6) \to (3, 3)$ na srovnání dvou souborů, kde jsme si přidali "statistu" ve stavu (1, 6)).

Předpoklad o nulovém, resp. konstantním ohodnocení přechodů (s, s) má svůj význam z hlediska interpretace hodnot indexu změny: je-li splněn, je jasné, čemu říkat zlepšení. Je to nicméně předpoklad omezující - jistě si lze představit, v medicíně zvláště, situaci, kdy udržení v relativně dobrém stavu je větší úspěch než setrvání ve stavu špatném, což by se mělo také odrazit v nestejném hodnocení indexem změny. Následující tvrzení pamatuje i na tento případ, jako ostatně na všechno - je tak obecné, že nepotřebuje žádné předpoklady.

Trojvěta o kardinální, ordinální a slabé ordinální regularitě. Nechť <S, G, H> je index změny. **H** je kardinálně, resp. ordinálně, resp. slabě ordinálně regulární, právě když
na G platí

$$H(s, t) = F(Q_2(t) - Q_1(s)),$$

kde Q_1 a Q_2 jsou ("výstupní" a "vstupní") ohodnocení stavů a F je identická ($F(x) = x$), resp. rostoucí, resp. neklesající reálná funkce reálné proměnné.

Čtenář snadno nahlédne, že věta i dvojvěta jsou jednoduchými důsledky trojvěty. Autor se při vzpomínce na pot prolitý při "přímé zteči" (bez trojvěty) obává, že věta a dvojvěta i se svými pečlivě minimalizovanými předpoklady vypadají ve světle trojvěty jako laciný pokus o prodloužení referátu o výsledcích.

4. Milníky života

Memoárovou část práce využiji hlavně k vyřizování osobních účtů.

Bádání o regularitě by zřejmě bývalo zašlo v kolébce, kdyby se jej nebyl zúčastnil - nejintenzivněji na začátku - **Doc. Dr. Petr Vopěnka, DrSc.** Jen nerad plním jeho přání, abych článek napsal pouze svým jménem. V každém případě mu patří poděkování za obětavou a trpělivou spolupráci, připomínající mnohdy dílo Nedonošený si hraje s donošeným [5].

Počátky studia regularity byly romantické: Nebylo vůbec jasné, kam téma zařadit; měl jsem sice nařízeno provést rešerši, ale ta se jevila úkolem typu "Jdi tam - nevím kam, přines to - nevím co", takže nezbylo, než tvořit (což nejméně vadilo doc. Vopěnkovi). Tak postupně vykrystalizovaly definice, byla dokázána věta o kardinální regularitě (přímo, bez trojvěty) a objevila se věta (vlastně polovina dvojvěty) o ordinální regularitě - coby hypotéza. Odolávající.

Romantické období ukončil **MUDr. Petr Karen, CSc.**, muž mnoha umění. Byv seznámen s jakousi algebraickou mutací hypotézy o ordinální regularitě, pravil: "To nebude platit, to připomíná hypotézu, že komparativní pravděpodobnost lze vždy reprezentovat pravděpodobnostní mírou, ta taky neplatí, viz protipříklad v Modré knize [3]." Hypotéza se zatřásla, leč nepadla, i přivolán na pomoc v Modré knize citovaný Scott [5]. Scottův článek se však vedle komparativní pravděpodobnosti zabývá také jiným problémem, tzv. problémem uspořádaných rozdílů, a ten má k ordinální regularitě teprve co říci: Scottovo řešení je důkazem (poloviny dvoj-)věty o ordinální regularitě pro $G = S \times S$ (kde S je stavový prostor a G přechodová relace); zesílení pak už není obtížné. Od Scotta byl převzat i aparát použitý k důkazu všech částí trojvěty. A u Scotta učiněn konečně i "objev", že pracujeme na teritoriu teorie měření. Rešerše konečně mohla začít!

Petr Karen si tedy jistě zaslouží poděkování za to, že výzkum regularity (nepřímo) obdaroval poznatkem, důkazovým aparátem a kontextem. Přesto mu chci zejména poděkovat za něco jiného - za nevšední racionální i estetický zážitek, který mi poskytl svým počinem hodným tak všestranného vědeckého a uměleckého talentu, když pomohl hypotézu proměnit ve větu protipříkladem.

5. Doznání

"Vynálezem" (25 let staré!) Scottovy práce [4] počínaje se bádání o regularitě zařazuje do kontextu teorie měření: s ordinální regularitou těsně souvisí tzv. měření rozdílu (difference measurement) a společné měření (conjoint measurement).

V teorii měření rozdílu se studuje struktura $\langle S, G, \preceq \rangle$, kde S je (konečná či nekonečná) množina, $G \subseteq S \times S$ a $\preceq$ je uspořádání na $G \times G$ (tedy kvaternární relace na S). Centrálním problémem je formulace (co nejslabších) podmínek zaručujících existenci reálné funkce Q definované na S reprezentující relaci $\preceq$ v tom smyslu, že pro $s, t, u, v \in S$, $(s, t), (u, v) \in G$ platí

$$(s, t) \preceq (u, v) \quad \text{iff} \quad Q(t) - Q(s) \le Q(v) - Q(u) \,. \tag{3}$$

Scott [4] např. podává vyčerpávající řešení pro S konečnou a $G = S \times S$. Předpoklad $G = S \times S$ se vyskytuje ve většině dosud prostudovaných prací; obecnější relaci G uvažují např. Doignon a Falmagne [7].

Měření rozdílu představuje speciální partii teorie společného měření (viz např. monografii [6]), kde se studuje uspořádání na kartézském součinu dvou ne nutně stejných množin S_1, S_2 a jeho realizovatelnost pomocí součtu (rovnocenně: rozdílu) funkcí Q_1 a Q_2 definovaných na S_1 a S_2. Není bez zajímavosti, že do teorie společného měření zasáhl (a nikoli okrajově) J. W. Tukey [8].

Pod tíhou indicií je třeba přiznat, že dosavadní výzkum regularity stěží přináší něco matematicky nového a současně hodnotného. V literatuře se sice zatím (při značně kusém pátrání) nepodařilo nalézt výsledky do detailu shodné se zde uvedenými, ale v každém případě nejtěžší práci odvedl Scott [4], a co je nad to, na Fieldsovu medaili asi stačit nebude.

Čím se studium regularity zřetelně liší od dosud prostudovaných prací teorie měření, je přístup k problematice hodnocení změny. Dosazení regularity za kritérium "rozumnosti" je motivováno statisticky. Pro teorii měření je typický přístup "algebraický"; v teorii měření rozdílu se např. "rozumný systém měření" axiomatizuje pomocí různých n-árních podmínek - typickou ukázkou je podmínka čtveřic (quadruplet condition)

$$(s, t) \preceq (u, v) \Rightarrow (s, u) \preceq (v, t).$$

Regularita se v pracích teorie měření neobjevuje jako předpoklad; jestliže Scott [4] formuluje vlastnost relace $\preceq$ odpovídající ordinální regularitě, pak je tato vlastnost důsledkem jiných předpokladů, není nijak pojmenovaná, vyjadřuje se formulí (jejíž souvislost s regularitou je třeba trochu luštit)

$$\forall\, n > 0 \;\forall\, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in S \;\forall\, \pi, \sigma \text{ permutace } (1, \dots, n)$$

$$\Big[\,[\, \forall\, i \; (x_i, y_i) \preceq (x_{\pi(i)}, y_{\sigma(i)}) \,] \Rightarrow (x_{\pi(1)}, y_{\sigma(1)}) \preceq (x_1, y_1) \Big] ,$$

a Scott ji chápe jako nekonečné klubko (bundle) podmínek, jež nelze na konečný počet podmínek redukovat.

Eventuální originalita pohledu na problematiku hodnocení změny stavu jistě nepřidává práci nic na matematické hodnotě. Mám nicméně za to, že smysluplnost dosavadního studia regularity s matematickou původností nestojí ani nepadá: i znovuobjevování výsledků teorie měření mělo svůj význam v situaci, kdy bylo prakticky jedinou cestou, jak se o těchto výsledcích dozvědět. (A snad mi čtenář odpustí, že jsem považoval za zajímavější předložit mu toto vyprávění, a ne jen bibliografický přehled teorie měření.)

Druhý bod doznání: Rakúsův index vyprovokoval studium regularity tím, že byl podezřelý na první pohled. Definovali jsme několik kritérií a Rakúsův index podle všech "propadl". Výklad se až dosud nesl v duchu optimistické představy, že kritéria jsou dobrá, a co je rozumné, se pozná podle toho, co "propadne" a co ne. Představme si ale, že by býval v psychiatrickém výzkumu místo Rakúsova indexu zdomácněl třeba index **PPPP** (průměrný poměrný pokles příznaků) definovaný pro tytéž argumenty jako **RI** (1), (2) (při stejném značení) jako

$$\mathbf{PPPP}(s,\ t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} {}^{i}s/{}^{i}t.$$

Tento index změny už vypadá daleko "rozumněji" než **RI** a žádné studium regularity by nejspíš nepodnítil. Přesto, jak si může čtenář ověřit, dopadá dříve uvedený "protirakúsovský" odstrašující příklad přechodů (2, 2) → (1, 6) → (3, 3) při aplikaci **PPPP** co do srovnání s hraniční hodnotou zlepšení 1 (= **PPPP**(s, s)) stejně zle jako samotný index **RI**. Indexy **PPPP** a **RI** jsou tedy z hlediska všech kritérií regularity zcela rovnocenné - podle všech "propadnou" ruku v ruce. Přitom jediný hřích indexu **PPPP** z hlediska ordinální regularity je, že se z poměrů ${}^{i}s/{}^{i}t$ počítá aritmetický, a ne geometrický průměr.

Závěr z tohoto pozorování zatím není jasný. Má-li regularita být věrohodným kritériem "rozumnosti", měla by rozlišit "téměř rozumné" od "zcela nerozumného". Spíše než ještě jemnější kvalitativní rozlišení různých typů regularity bude možná východiskem zavedení kvantitativních měr porušení regularity.

Kdo by stál ještě o další doznání, nechť se zamyslí, zda byly uvedeny dost pádné argumenty pro aplikaci toho či onoho kritéria regularity v různých situacích; zapírat nebudu.

6. Co chceme

Bude vhodné se při dalším výzkumu zbavit předpokladu o konečném stavovém prostoru (a tím dohonit a předhonit teorii měření) - budiž uveden aspoň tento jeden za všechny matematické náměty.

Nejzávažnějším úkolem ovšem zřejmě bude vyjasnit roli regularity při kvantifikaci zlepšení stavu - obecně nebo v užším kontextu. Lze oprávněně na regularitě absolutně trvat? (Pak potřebujeme aparát pro nalezení v nějakém smyslu nejlepší regulární aproximace daného indexu změny.) Nebo existují vlastnosti indexů změny, kvůli nimž je vhodné regularitu mírně porušit? (Pak potřebujeme míry porušení regularity a metody konstrukce optimálního kompromisního indexu změny.) A neexistují snad vlastnosti indexů změny, jež stojí za to, aby kritérium regularity bylo úplně ignorováno?

Podmíněné důsledky v závorkách představují matematické (možná dávno vyřešené) úkoly. Samotné otázky však nejsou (vůbec, nebo z větší části) matematické; odpověď závisí do značné míry na způsobu a úspěchu manipulace (odborným) veřejným míněním.

7. Souhrnná prognóza

Všechno začalo setkáním s Rakúsovým indexem, který byl podezřelý a člověku se nechtělo takové transformace počítat a výsledky statisticky hodnotit. Je ovšem třeba oprostit se od emocí a myslet především na budoucnost. Možná se myšlenka regularity ukáže neperspektivní, možná, že nebude dostatek sil obstát s teoretickými výsledky ve tvrdé světové konkurenci. Určitou jistotu do budoucna pak dává zatím vcelku setrvalý zájem o výpočet Rakúsova indexu. Fortranský program je vždy připraven.

Literatura

[1] Rakús A. et al.: Matematičeskije aspekty klinikofarmakokinetičeskoj predikcii effektivnosti terapii. Z. nevropatologii i psichiatrii *84* (1984), 406 - 410.

[2] Hofstadter D. R.: Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. Penguin Books, Harmondsworth 1987.

[3] Havránek T. et al.: Matematika pro biologické a lékařské vědy. Academia, Praha 1981.

[4] Scott D.: Measurement structures and linear inequalities. J. Math. Psychology *1* (1964), 233 - 247.

[5] Katalog 1. neveřejné vernisáže obrazů a artefaktů Bedřicha Bobše. In: Vodňanský J., Skoumal P.: S úsměvem Donkichota. Supraphon 1 13 1567, Praha 1974.

[6] Pfanzagl J.: Theory of measurement. Physica - Verlag, Würzburg - Wien 1973.

[7] Doignon J. P., Falmagne J. C.: Difference measurement and simple scalability with restricted solvability. J. Math. Psychology *11* (1974), 473 - 499.

[8] Luce R. D., Tukey J. W.: Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement. J. Math. Psychology *1* (1964), 1 - 27.