Robustnost a bayesovská statistika I.

Jan Hanousek, MFF UK Praha

V naší statistické literatuře se velmi málo používá k statistické interpretaci dat bayesovský přístup. Tento přístup je třeba chápat jako určitý statistický model a na základě toho jej používat v opodstatněných situacích.

Všimněme si, že řada statistických předpokladů může mít nejen bayesovskou interpretaci, ale lze v nich nalézt skrytý bayesovský přístup. Vezměme například předpoklad normality - ten může být chápán tak, že rozdělení náhodné veličiny patří do nějakého systému rozdělení F (jenž obsahuje normální rozdělení) a pro konstrukci odhadů volíme za apriorní rozdělení na tomto systému Diracovo rozdělení; $\pi(f) = \delta_{\phi}(f)$, s hodnotou jedna pro $f = \phi$.

Stejně tak může být chápán i Huberův M-odhad, budeme-li uvažovat nejméně příznivé rozdělení na systému

$$F_{\varepsilon_0} = \{\ f:\ f = (1-\varepsilon).\text{Normální} + \varepsilon.\text{Dvojitě exp.},\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\},$$

které je opět Diracovo $\delta_{\varepsilon_0}(x)$. Zároveň si uvědomme, že Huberův M-odhad je maximálně věrohodný odhad vzhledem k tomuto rozdělení.

Bayesovská statistika často velmi výhodně využívá předešlých znalostí a dává zajímavé pohledy na význam některých předpokladů a na strukturu statistických odhadů. Problémem často bývá požadavek explicitního tvaru apriorního rozdělení (tj. určení subjektivního pravděpodobnostního rozdělení). V mnoha případech však máme alespoň částečnou znalost tohoto rozdělení, například známe některé jeho charakteristiky (medián, kvartily,...) popř. můžeme předpokládat další vlastnosti apriorního rozdělení (unimodální, symetrické,...). Bylo by proto dobré mít představu o vlivu některých typů apriorních rozdělení na výsledné vlastnosti bayesovských odhadů. Na základě takovéto analýzy můžeme usuzovat na vhodnost či nevhodnost použití určitého apriorního rozdělení a posuzovat robustnost bayesovských odhadů z různých hledisek. Možný přístup k této problematice budeme ilustrovat na příkladech.

Nejčastěji bývá v literatuře posuzována tzv. *aposteriorní_robustnost*, která popisuje citlivost bayesovských odhadů vzhledem k použitému apriornímu rozdělení, viz Berger(1980,1982,1984), množství dalších referencí lze nalézt v Berger(1986). V následujícím příkladu se zaměříme na porovnání dvou extrémních situací: budeme volit za apriorní rozdělení Cauchyho a normální rozdělení. Pro jednoduchost zvolme kvadratickou ztrátovou funkci (bayesovský odhad je potom roven aposteriorní střední hodnotě) a uvažujme odhady založené na jediném pozorování.

Příklad 1.

Nechť náhodná veličina má normální rozdělení $\mathcal{N}(\theta,1)$, kde θ je neznámý parametr polohy. Předpokládejme, že apriorní rozdělení $\pi(\theta)$ má medián roven nule a horní resp. dolní kvartil roven 1 resp. -1.

Těmto parametrům odpovídá např.:

Cauchyho rozdělení $\mathcal{C}(0,1)$, které označme π_C

a

Normální rozdělení $\mathcal{N}(0,2.19)$, označme jej π_N.

Aposteriorní střední hodnota $\delta_\pi(x)$ je definována jako

$$(1) \qquad \delta_\pi(x) = \frac{\int t.\exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2}\right\}\pi(t)\,dt}{\int t.\exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2}\right\}\pi(t)\,dt} .$$

Zatímco $\delta_C(x)$ musí být počítáno numericky, lze snadno ukázat, že

$$\delta_N(x) = \frac{\int t.\exp(-1/2[(t-x)^2 + t^2/2.19])\,dt}{\int \exp(-1/2[(t-x)^2 + t^2/2.19])\,dt}$$

$$= \frac{\int t.\exp(-\frac{1}{2}\cdot\frac{3.19}{2.19}\cdot[t - \frac{2.19}{3.19}.x]^2)\,dt}{\int \exp(-\frac{1}{2}\frac{3.19}{2.19}[t - \frac{2.19}{3.19}x]^2)\,dt} = \frac{2.19}{3.19}.x .$$

Následující tabulka ukazuje závislost aposteriorní střední hodnoty na realizaci náhodné veličiny $X = x$ a na použitém apriorním rozdělení.

TAB.1

x	0	1	2	4.5	10
$\delta_C(x)$	0	0.52	1.27	4.09	9.80
$\delta_N(x)$	0	0.69	1.37	3.09	6.87

Vhodnost odhadů bývá často posuzována pomocí jejich bayesovského rizika r. Výpočtem dostáváme, že

$$\text{(2)} \qquad \max\{\, r(\pi_C,\delta_C), r(\pi_N,\delta_C)\} = r(\pi_N,\delta_C) = 0.746$$

a

$$\text{(3)} \qquad \max\{\, r(\pi_C,\delta_N), r(\pi_N,\delta_N)\} = r(\pi_C,\delta_N) = +\infty$$

(tento fakt vyplývá z toho, že pro riziko odhadu δ_N platí

$$R(\theta,\delta_N) = (2.19/3.19)^2 + (3.19)^{-2}.\theta^2 \qquad).$$

Vztahy (2) a (3) ukazují základní vlastnosti odhadů δ_N a δ_C z hlediska bazesovského rizika. Možný výklad (2) a (3) je velmi blízký ke "klasickému" robustnímu přístupu:

> pokud apriorní rozdělení je normální, je odhad δ_N nejlepší. Ovšem v případě, že apriorní rozdělení má těžké chvosty, jako Cauchyho rozdělení, roste bayesovské riziko nade všechny meze.

Cítíme téměř naprostou analogii jako při posuzování vlastností průměru a mediánu v závislosti na typu rozdělení.

Pro lepší pochopení uveďme ještě grafy rizikových funkcí těchto odhadů.

Přímka procházející bodem 1 je vlastně grafem rizikové funkce odpovídající δ_1 s $\pi_1(\theta) = 1$ (chybějící apriorní informace), tj. $\delta_1(x) = x$.

Zatímco nejlepší apriorní informaci dává π_N, potom π_C a na závěr π_1, co se týče robustnosti odhadů δ_π je situace naprosto opačná. Nejrobustnější je δ_1, potom δ_C a nejméně robustní je δ_N. Jak ukážeme dále, Cauchzho rozdělení je málo citlivé i na hodnoty jeho parametrů.

Povšimněme si ještě, jak bude vypadat situace při testování hypotéz. Ve stejné situaci, tj. X má normální rozdělení $\mathcal{N}(\theta,1)$, chceme testovat hypotézu H_0: $\theta \le 0$ proti alternativě H_1: $\theta > 0$.

Je-li pozorování X = 1, potom dostáváme

$$P^{\pi_N(\theta,X=1)}(\theta \le 0) = \phi\left(\frac{(0.687)}{0.687^{1/2}}\right) \cong 0.238.$$

Pro druhou hodnotu musíme využít numerické integrace. Dostáváme

$$P^{\pi_C(\theta,X=1)}(\theta \le 0) = \frac{\int_{-\infty}^{0} [1/(1+\theta^2).\exp(-1/2(\theta-1)^2)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} [1/(1+\theta^2).\exp(-1/2(\theta-1)^2)\, d\theta} \cong 0.238,$$

tedy hodnoty relativně blízké.

Jak bychom intuitivně očekávali, jiná bude situace pro velké hodnoty X. Pro X = 6 pomocí analogických výpočtů dostáváme, že

$$P^{\pi_N(\theta,X=6)}(\theta \le 0) \cong 3{,}30.10^{-7} \quad \text{a} \quad P^{\pi_C(\theta,X=6)}(\theta \le 0) \cong 3{,}21.10^{-8},$$

tedy mezi těmito pravděpodobnostmi je řádový rozdíl.

<u>Příklad 2.</u>

Nechť X má normální rozdělení $\mathcal{N}(\theta,1)$, opět pro jednoduchost uvažujme odhad založený na jediném pozorování. Apriorní rozdělení budeme volit ze systému rovnoměrných rozdělení R_a na intervalu $[-a,a]$, $a>0$.

To znamená, že $\pi_{R_a}(\theta) = \pi_a(\theta) = 1/(2a)$ ...je-li $\theta \in [-a,a]$,

$= 0$ ...jinak.

(Situaci z příkladu 1 - tj. medián roven 0, kvartily ∓ 1 – odpovídá volba parametru a = 2).

Pro lepší představu spočteme několik hodnot do tabulky.

TAB. 2

x	0	1	2	4.5
$\delta_{0.5}(x)$	0	0.08	0.15	0.19
$\delta_{1.0}(x)$	0	0.28	0.49	0.71
$\delta_{2.0}(x)$	0	0.72	1.20	1.68
...	.	....	....	....
$\delta_{\infty}(x)$	0	1	2	4.5.

Příklad 3.

Nechť náhodná veličina X má binomické rozdělení $B(n,\theta)$. Opět si zaměříme na chování aposteriorní střední hodnoty $\delta_\pi(x)$ definované v (1) za těchto apriorních rozdělení:

$$\pi_1(x)= 1 \qquad \pi_2= \theta^{-1}.(1-\theta)^{-1} \qquad \pi_3= \theta^{-1/2}.(1-\theta)^{-1/2}.$$

dostáváme:

$$\delta_{\pi_1}(x) = \frac{B(x+2,n-x+1)}{B(x+1,n-x+1)} = \frac{x+1}{n+2}$$

$$\delta_{\pi_2}(x) = \frac{B(x+1,n-x)}{B(x,n-x)} = \frac{x}{n}$$

$$\delta_{\pi_3}(x) = \frac{B(x+3/2,n-x+1/2)}{B(x+1/2,n-x+1/2)} = \frac{x+1/2}{n+1},$$

tedy hodnoty velmi blízké.

Vidíme, že v tomto případě, ačkoli zvolená apriorní rozdělení jsou velmi rozdílná, prakticky nezáleží na tom, zda použijeme π_1, π_2 nebo π_3.

Můžete namítnout, že uvedené příklady jsou poněkud umělé, že nelze posuzovat odhady na základě výsledků, získaných pro jedno pozorování. Samozřejmě, ale právě v takovýchto speciálních situacích lze relativně snadno studovat robustní a bayesovské vlastnosti odhadů společně.

Pro přátele simulačních studií je určen závěrečný příklad.

Situace, kdy apriorní rozdělení $\pi(\theta)$ je nenulové na konečném intervalu (a,b) a je v praxi velmi častá. Hodnoty a,b mohou být určeny např. fyzikálními, technickými nebo biologickými omezeními. Představme si, že měříme průměr šroubů, potom tento interval (a,b) je dán parametry měřícího zařízení; například můžeme měřit pouze šrouby o průměru mezi 0.01 mm a 3.00 mm.

Opět si budeme všímat vlivu velikosti konstanty a na chování aposteriorní střední hodnoty $\delta_a(x)$, která je definována vztahem

$$(4) \qquad \delta_\pi(x) = \frac{\int_{-a}^{a} t.\exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2}\right\} \pi(t)\, dt}{\int_{-a}^{a} t.\exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2}\right\} \pi(t)\, dt}.$$

Informace obsažená v π_a je svým způsobem velmi silná, říká, že δ_a nikdy nepřekročí hranice intervalu [-a,a]. Skutečně platí

$$-a = \min_{(-a,a)} t \le \delta_a \le \max_{(-a,a)} t = a.$$

K výpočtu odhadu δ_a určeme nejprve integrály čitatele a jmenovatele, dostáváme

$$\int_{-a}^{a} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2}\right\} dt = \sqrt{2\pi}\,.\left(\Phi(a-x) - \Phi(-a-x)\right)$$

a

$$\int_{-a}^{a} t.\exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2}\right\}dt = x.\int_{x-a}^{x-a} \exp\left\{-y^2/2\right\} dy - \int_{x-a}^{x+a} y.\exp\left\{-y^2/2\right\} dy$$

$$= x.\int_{x-a}^{x-a} \exp\left\{-y^2/2\right\} dy - \int_{\frac{(x-a)^2}{2}}^{\frac{(x+a)^2}{2}} \exp\left\{-y^2/2\right\} dy.$$

Odtud vyplývá, že

$$(5) \qquad \delta_a(x) = x - \frac{\exp\{-(x-a)^2/2\} - \exp\{-(x+a)^2/2\}}{\sqrt{(2\pi)}.(\Phi(a+x) - \Phi(x-a))}.$$

Příklad 4.

Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se společnou distribuční funkcí $F(x-\theta_0)$, kde θ_0 je neznámý parametr.

Nechť ρ: $R^1 \to R^1$ je daná funkce. Pak odhad parametru polohy θ_0, který je definován vztahem

$$T_n = \frac{\int_{R^1} t.\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i-t)\right\} \pi(t)\, dt}{\int_{R^1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i-t)\right\} \pi(t)\, dt} \tag{6}$$

(pokud oba integrály existují), budeme nazývat odhadem bayesovského typu (zkrácené B-odhadem), generovaným funkcí ρ a apriorním rozdělením s hustotou $\pi(y)$, kde $\pi(y)$ může být i nevlastní hustota.

Všimněme si blíže zavedení B-odhadů; můžeme se na ně dívat ze dvou různých stran. Při robustním přístupu vidíme, že B-odhad je vlastně odhad Pitmanova typu vzhledem k míře $\nu(t) = \int_{-\infty}^{t} \pi(y)\, dy$. Z bayesovského hlediska je B-odhad roven aposteriorní střední hodnotě veličiny θ, v případě, že hustota pozorování je $c_0 \cdot \exp\left(-\rho(x,\theta_0)\right)$. Z těchto dvou pohledů je zvlášť inspirující bayesovský přístup. Cítíme stejný vztah mezi bayesovskými odhady (přesněji aposteriorní střední hodnotou) a B-odhady jako mezi maximálně věrohodnými odhady a M-odhady. Za určitých předpokladů je řád ekvivalence mezi P- a M-odhady řádu $o_p(n^{-1/2})$.

Protože teoretické výsledky a vlastnosti B-odhadů odvozené například v [Hanousek(1988, 1990)] mají asymptotický charakter, pochopitelně nás zajímá nejmenší počet pozorování při kterém budou tyto výsledky prakticky použitelné, zajímají nás skutečné vlastnosti B-odhadů na simulovaných výběrech, vliv apriorního rozdělení, přičemž můžeme porovnávat vliv chybných parametrů v závislosti na typu použitého apriorního rozdělení... atd.

Všechny tyto vlastnosti a vlivy budeme studovat na simulovaných datech. Z praktického hlediska je velmi důležité chování odhadů na výběrech malého rozsahu, řekněme n = 5. Při studiu vlastností B- odhadů bylo samozřejmě provedeno velké množství simulací a pomocných výpočtů; výběry větších rozsahů jsme do této numerické ilustrace nezařadili hlavně ze dvou důvodů

- za prvé, spočítat odpovídající studie pro výběry řádu 10, 20, případně 40 s porovnatelnou přesností je časově mnohokrát náročnější;

- za druhé, při již provedených výpočtech na výběrech většího rozsahu se ukazovala ještě lepší shoda s teoretickými výsledky a hlavně, s rostoucím rozsahem výběru velmi rychle klesá vliv apriorního rozdělení na hodnoty B-odhadů.

Pro jednoduchost a názornost jsme se zaměřili na výpočty v modelu polohy, tj. na situaci, kdy $f(x,\theta) = f(x-\theta)$ a parametrický prostor $\Theta = R^1$.

Při organizaci a přípravě této malé simulační studie jsme vycházeli z Princetonské studie Andrews et al (1972), zejména jsme zvolili velmi populární Huberovu funkci (viz Huber (1964)) ρ,

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{je-li } |x| \le k \\ |x| - \frac{k^2}{2} & \text{je-li } |x| > k, \end{cases} \qquad \text{pro } k > 0. \tag{7}$$

Odpovídající funkce ψ má tvar

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{je-li } |x| \le k \\ k \cdot \operatorname{sign} x & \text{je-li } |x| > k, \end{cases} \qquad \text{pro } k > 0. \tag{8}$$

V naší studii jsme zvolili $k = 1,5$ a rozsah výběru $n = 5$.

Pro studium praktických vlastností B-odhadů bylo simulováno 100 výběrů o rozsahu 5 z následujících rozdělení:

I.	Normální (0,1)		
II.	0.8 Normální (0;1)	+ 0.2 Normální (0;10)	
III.	0.6 - " -	+ 0.4 - " -	
IV.	0.8 - " -	+ 0.2 Dvojitě exponenciální (0;1)	
V.	0.6 - " -	+ 0.4 - " -	
VI.	Dvojitě exponenciální (0;1)		
VII.	0.8 Normální (0;1)	+ 0.2 Cauchy (0;1)	
VIII.	0.6 - " -	+ 0.4 - " -	

TAB.3 Porovnání vlivu apriorního rozdělení.
1.sloupec... $\pi = 1$ 2.sloupec... Cauchy(0,1)

	průměr		sm.odchylka		minimum		maximum	
Rozdělení: Normální(0,1)								
B-odhad	0.081	0.063	0.436	0.340	-1.097	-0.874	0.975	0.746
pruměr	0.076		0.428		-1.184		0.867	
25%průměr	0.081		0.460		-1.013		1.050	
medián	0.114		0.531		-1.017		1.533	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Normální(0,10)								
B-odhad	-0.066	-0.049	0.499	0.377	-1.357	-1.071	1.015	0.828
pruměr	-0.087		0.735		-1.861		2.269	
25%průměr	-0.049		0.499		-1.358		1.107	
medián	-0.053		0.593		-1.652		1.217	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Normální(0,10)								
B-odhad	0.011	0.008	0.791	0.609	-2.399	-2.100	1.695	1.447
pruměr	0.017		1.009		-2.196		2.727	
25%průměr	0.015		0.846		-2.445		2.433	
medián	0.048		0.718		-2.085		1.858	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	0.053	0.042	0.463	0.362	-1.056	-0.849	1.009	0.828
pruměr	0.075		0.477		-0.987		0.985	
25%průměr	0.050		0.480		-1.172		1.203	
medián	0.020		0.529		-1.481		1.415	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	-0.017	-0.014	0.484	0.383	-1.559	-1.332	1.174	0.909
pruměr	-0.008		0.568		-1.870		1.721	
25%průměr	-0.028		0.489		-1.649		1.165	
medián	-0.022		0.495		-1.602		1.040	
Rozdělení: Dvojitě exponenciální(0,1)								
B-odhad	0.014	0.008	0.522	0.405	-1.134	-0.917	1.310	1.123
pruměr	0.043		0.617		-1.139		1.314	
25%průměr	0.018		0.505		-1.122		1.302	
medián	0.018		0.504		-1.164		1.462	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Cauchy(0,1)								
B-odhad	-0.051	-0.041	0.498	0.388	-1.574	-1.210	1.116	0.906
pruměr	-0.181		2.907		-23.757		15.120	
25%průměr	-0.036		0.498		-1.555		1.283	
medián	-0.009		0.569		-1.885		1.320	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Cauchy(0,1)								
B-odhad	0.044	0.032	0.590	0.453	-1.529	-1.297	1.896	1.393
pruměr	0.353		6.274		-25.751		52.326	
25%průměr	0.056		0.939		-4.100		6.466	
medián	0.047		0.544		-1.431		1.610	

Testovali jsme několik druhů používaných apriorních rozdělení ($\pi(y) = 1$, normální rozdělení, Cauchyho a Gamma rozdělení) a to s různými parametry; vzhledem k tomu, že nechceme čtenáře zahltit přemírou tabulek, zaměříme se na (z praktického hlediska) nejzajímavější skupinu rozdělení a to na $\pi(y) = 1$ a na Cauchyho rozdělení.

Výsledky jsou shrnuty do tří tabulek, ve kterých porovnáváme zároveň vliv parametrů apriorního rozdělení na hodnoty B-odhadů při výběrech řádu 5. V každé tabulce porovnáváme dva typy apriorního rozdělení, např. v tabulce 1 jsou v prvních sloupcích v každé položce hodnoty odpovídající $\pi(y) = 1$ (princip neurčitosti) a ve druhých sloupcích hodnoty příslušné pro Cauchyho rozdělení s parametry (0;1), podobně pro ostatní tabulky.

V tabulkách uvádíme pro srovnání průměr, 25%useknutý průměr a medián. Tyto odhady byly zvoleny hlavně proto, že vyjadřují tři hlavní stupně robustnosti ve výběrech o rozsahu 5.

TAB.4 Porovnani vlivu apriorniho rozděleni.
1.sloupec... Cauchy(0,1) 2.sloupec... Cauchy(6,1)

	průměr		sm.odchylka		minimum		maximum	
Rozdělení: Normální(0,1)								
B-odhad	0.063	0.160	0.340	0.442	-0.874	-1.020	0.746	1.099
pruměr	0.076		0.428		-1.184		0.867	
25%průměr	0.081		0.460		-1.013		1.050	
medián	0.114		0.531		-1.017		1.533	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Normální(0,10)								
B-odhad	-0.049	0.026	0.377	0.506	-1.071	-1.265	0.828	1.122
pruměr	-0.087		0.735		-1.861		2.269	
25%průměr	-0.049		0.499		-1.358		1.107	
medián	-0.053		0.593		-1.652		1.217	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Normální(0,10)								
B-odhad	0.008	0.129	0.609	0.817	-2.100	-2.310	1.447	2.013
pruměr	0.017		1.009		-2.196		2.727	
25%průměr	0.015		0.846		-2.445		2.433	
medián	0.048		0.718		-2.085		1.858	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	0.042	0.134	0.362	0.469	-0.849	-0.984	0.828	1.097
pruměr	0.075		0.477		-0.987		0.985	
25%průměr	0.050		0.480		-1.172		1.203	
medián	0.020		0.529		-1.481		1.415	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	-0.014	0.065	0.383	0.489	-1.332	-1.486	0.909	1.311
pruměr	-0.008		0.568		-1.870		1.721	
25%průměr	-0.028		0.489		-1.649		1.165	
medián	-0.022		0.495		-1.602		1.040	
Rozdělení: Dvojitě exponenciální(0,1)								
B-odhad	0.008	0.108	0.405	0.534	-0.917	-1.062	1.123	1.396
pruměr	0.043		0.617		-1.139		1.314	
25%průměr	0.018		0.505		-1.122		1.302	
medián	0.018		0.504		-1.164		1.462	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Cauchy(0,1)								
B-odhad	-0.041	0.035	0.388	0.507	-1.210	-1.458	0.906	1.217
pruměr	-0.181		2.907		-23.757		15.120	
25%průměr	-0.036		0.498		-1.555		1.283	
medián	-0.009		0.569		-1.885		1.320	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Cauchy(0,1)								
B-odhad	0.032	0.143	0.453	0.620	-1.297	-1.460	1.393	2.516
pruměr	0.353		6.274		-25.751		52.326	
25%průměr	0.056		0.939		-4.100		6.466	
medián	0.047		0.544		-1.431		1.610	

TAB.5 Porovnání vlivu apriorního rozdělení.
1.sloupec... Cauchy(6,1) 2.sloupec... $\pi = 1$

	průměr		sm.odchylka		minimum		maximum	
Rozdělení: Normální(0,1)								
B-odhad	0.160	0.081	0.442	0.436	-1.020	-1.097	1.099	0.975
pruměr	0.076		0.428		-1.184		0.867	
25%průměr	0.081		0.460		-1.013		1.050	
medián	0.114		0.531		-1.017		1.533	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Normální(0.10)								
B-odhad	0.026	-0.066	0.506	0.499	-1.265	-1.357	1.122	1.015
pruměr	-0.087		0.735		-1.861		2.269	
25%průměr	-0.049		0.499		-1.358		1.107	
medián	-0.053		0.593		-1.652		1.217	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Normální(0,10)								
B-odhad	0.129	0.011	0.817	0.791	-2.310	-2.399	2.013	1.695
pruměr	0.017		1.009		-2.196		2.727	
25%průměr	0.015		0.846		-2.445		2.433	
medián	0.048		0.718		-2.085		1.858	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	0.134	0.053	0.469	0.463	-0.984	-1.056	1.097	1.009
pruměr	0.075		0.477		-0.987		0.985	
25%průměr	0.050		0.480		-1.172		1.203	
medián	0.020		0.529		-1.481		1.415	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Dvojitě exp(0,1)								
B-odhad	0.065	-0.017	0.489	0.484	-1.486	-1.559	1.311	1.174
pruměr	-0.008		0.568		-1.870		1.721	
25%průměr	-0.028		0.489		-1.649		1.165	
medián	-0.022		0.495		-1.602		1.040	
Rozdělení: Dvojitě exponenciální(0,1)								
B-odhad	0.108	0.014	0.534	0.522	-1.062	-1.134	1.396	1.310
pruměr	0.043		0.617		-1.139		1.314	
25%průměr	0.018		0.505		-1.122		1.302	
medián	0.018		0.504		-1.164		1.462	
Rozdělení: 0.8 Normální(0,1) + 0.2 Cauchy(0,1)								
B-odhad	0.035	-0.051	0.507	0.498	-1.458	-1.574	1.217	1.116
pruměr	-0.181		2.907		-23.757		15.120	
25%průměr	-0.036		0.498		-1.555		1.283	
medián	-0.009		0.569		-1.885		1.320	
Rozdělení: 0.6 Normální(0,1) + 0.4 Cauchy(0,1)								
B-odhad	0.143	0.044	0.620	0.590	-1.460	-1.529	2.516	1.896
pruměr	0.353		6.274		-25.751		52.326	
25%průměr	0.056		0.939		-4.100		6.466	
medián	0.047		0.544		-1.431		1.610	

V tomto příkladu můžeme pozorovat velmi dobré praktické vlastnosti B-odhadů generovaných Huberovou funkcí ρ (s parametrem k = 1.5), zejména jejich robustnost vzhledem k hustotě pozorování. B-odhady jsou srovnatelné s průměrem na výběrech z normálního rozdělení a mediánem v případě velkých chyb (kontaminace dvojitě exponenciálním a Cauchyho rozdělením). Zejména si povšimněme, že rozpětí, průměr a směrodatná odchylka B-odhadů jsou velmi blízké nejlepším výsledkům získaným pro každý typ simulovaného rozdělení.

Uvědomme si, že B-odhady jsou odhady bayesovského typu a tedy využívají apriorní informace prostřednictvím $\pi(\theta)$. Ve výše uvedených tabulkách můžeme nalézt jisté zajímavé srovnání vlivu apriorního rozdělení, při kterém porovnáváme chybějící apriorní informaci ($\pi(\theta) = 1$) a Cauchyho rozdělení se správným a chybně zadaným mediánem. Potvrdilo se, jak bychom očekávali, že Cauchyho rozdělení je robustní v bayesovském smyslu (viz Berger (1984)). To znamená, že výsledky získané při volbě správných parametrů byly lepší než chybějící apriorní informace. Nicméně i v případě, že informace obsažená v $\pi(\theta)$ byla chybná (řekněme $\pi(\theta)$ bylo Cauchy (6,1)), dávaly B-odhady ještě rozumné výsledky.

L I T E R A T U R A

Berger, J. (1980): A robust generalized Bayes estimator and confindence region for a multivariate normal mean. The Annals of Statistics, Vol. 8, No. 4, 716-761.

Berger, J. (1982): Bayesian robustness and the Stein effect. J. Amer. Statist. Assoc. 77, 358-368.

Berger, J. (1984): The robust Bayesian viewpoint. In: J. Kadane, ed. Robustness in Bayesian Statistics (North--Holland, Amsterdam).

Bickel, P. J. (1976): Another look at robustness: A Review of Reviews and some new developments. Scand. J. Statist. 3, 145-168

Box, G.E.P. and Tiao, C.(1962): A further look at robustness via Bayes theorem. Biometrika 49, 410-432.

Box, G.E.P. and Tiao, C.(1973): Bayesian Inference in Statistical Analysis Addison-Wesley, Reading, Massachussets.

Chao, M. T. (1970): The asymptotic behavior of Bayes' estimators. The Annals Math. Stat. 41, 601-608.

Cornfield, J. (1969): The Bayesian outlook and its applications. Biometrics, 25, 617-657.

Dalal, S. R. and Hall,G.J. Jr.(1980): On approximating parametric Bayes models by nonparametric Bayes models. AS, Vol.8, No. 3, 664-672.

Daniels, H. E. (1987): Tail probability approximations. Int. Stat. Rev. 55, 37-48.

Dykstra, R. Z., Land, P. (1981): A Bayesian nonparametric approach to reability. AS 9, 2, 356-367.

Ferguson, T. S. (1973): A Bayesian analysis of some nonparametric problems. The Annals of Stat., Vol. 1, No 2, 209-230.

Hampel, F. R., Rousseeuw, P. J., Ronchetti, E. M. and Stahel,W.A. (1986): Robust Statistics. The Approach Based on Inference Functions. New York, Wiley.

Hanousek, J.(1988a):Asymptotic relation of M- and P-estimators of location, Comp.Statist.& Data Anal.6,277-284.

Hanousek, J.(1988b): Robustní odhady bayesovského typu. Sborník ROBUST 88, Letní škola stat.metod (Plasy 30.5.-3.6.),18-26.

Hanousek, J.(1990): Robust Bayesian type estimators and their asymptotic representation. Přijato Stat.&Dec.8,1990.

Hinkley, D. V.(1983): Can frequentist inference be very wrong? A conditional "yes". In Scientific Inference. Data Analysis, and Robustness. G.E.P.Box (Ed.),Academic Press, New York.

Ibragimov, I. A. and Khasminskii, R. Z. (1981): Statistical Estimation. Asymptotic Theory. Springer-Verlag, Berlin.

Tierney, L.; Kadane, J. (1986): Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. J. Amer. Statis. Assoc. 81, 82-86.