O DVOU METRIKÁCH V PROSTORU STACIONÁRNÍCH NÁHODNÝCH PROCESŮ

Vladimír Albrecht

Oddělení aplikované matematiky, VÚPs, Praha

1. Úvod

V celé řadě aplikací teorie náhodných procesů je dodnes aktuální vyžití spektrální analýzy. Typickým příkladem je analýza elektroencefalogramu (EEG), kde spektrální hustota patří mezi "povinné" charakteristiky záznamů. Snímáme-li EEG v krátkých časových úsecích (řekněmě do 2 min.), pak záznam obvykle modelujeme stacionárním procesem a ten charakterizujeme spektrální hustotou.
I když spektrální hustota plně determinuje pravděpodobnostní míru jen gaussovského stacionárního procesu, omezuje se lékařská diagnostika založená na EEG z velké míry jen na tu úroveň rozlišitelnosti, kterou lze postihnout rozdíly mezi spektrálními hustotami. V tomto příspěvku upozorňujeme na dvě metriky v prostoru spektrálních hustot, jejichž prostřednictvím lze zmíněné rozdíly studovat.
V závěru se ještě zmíníme o aplikaci těchto metrik v metodách spektrální dynamiky EEG.

2. Metriky v prostoru spektrálních hustot

Označme $\mathcal{F}\langle 0,\pi\rangle$ množinu spektrálních hustot reálných stacionárních náhodných posloupností. Tuto množinu lze metrizovat metrikou z prostoru $L_2\langle 0,\pi\rangle$, tj. pro f_1, $f_2 \in \mathcal{F}\langle 0,\pi\rangle$ definujeme

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{\int_J [f_1(\omega) - f_2(\omega)]^2 d\omega} \quad . \tag{1}$$

Tato metrika nerozlišuje mezi funkcemi, které se liší pouze na množině nulové míry. Spektrální hustota je však dána (Radon-Nikodymovou) derivací spektrální distribuční funkce, tedy spektrální hustota je též "určena až na množinu nulové míry", takže můžeme konstatovat, že metrika (1) rozlišuje mezi různými spektrálními hustotami.

Uvažujme nyní podmnožinu $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, která sestává pouze z hustot splňujících nerovnost

$$\int \ln f(\omega)\, d\omega > -\infty \, . \tag{2}$$

Poznámka: Jestliže spektrální hustota stacionárního procesu (X_t) splňuje nerovnost (2), pak střední kvadratická chyba prediktoru veličiny X_t založeného na veličinách X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, ... je vždy kladná a proto říkáme, že (X_t) je nedeterministický proces. Množina $\mathcal{F}_1$ je tedy množinou spektrálních hustot nedeterministických stacionárních procesů.

Pro f_1, $f_2 \in \mathcal{F}_1$ nyní definujme

$$\alpha(f_1,f_2) = \int \ln \left\{ \frac{[\sqrt{f_1(\omega)} - \sqrt{f_2(\omega)}]^2}{2\sqrt{f_1(\omega)f_2(\omega)}} + 1 \right\} d\omega \qquad (3)$$

Poznámka: Je známo, viz např. [1], že veličina(3) úzce souvisí s rychlostí konvergence chyby Baysesova testu aplikovaného na úlohu rozlišení dvou gaussovských procesů se spektrálními hustotami f_1 a f_2.

Je okamžitě vidět, že (i) $\alpha(f_1,f_2) = 0$ právě když $f_1 = f_2$, (ii) $\alpha(f_1,f_2) = \alpha(f_2,f_1)$. Jestliže f_1, f_2 a f_3 jsou z $\mathcal{F}_1$, pak

$$\alpha(f_1,f_2) + \alpha(f_2,f_3) - \alpha(f_1,f_3) =$$

$$= \int \ln \left\{ \frac{f_2^2(\omega) + f_1(\omega)f_3(\omega)}{f_2(\omega)[f_1(\omega)+f_3(\omega)]} + 1 \right\} d\omega \geq 0,$$

tj. (iii)

$$\alpha(f_1,f_2)+ \alpha(f_2,f_3) \geq \alpha(f_1,f_3),$$

tedy (3) je metrika v prostoru $\mathcal{F}_1$. Lze ukázat, že *metriky ρ a α nejsou ekvivalentní*.

3. Vlastnosti metrik ρ a α.

Zvažme nyní problém, kdy chceme rozlišit mezi dvěma stacionárními procesy pouze prostřednictvím jejich spektrálních hustot. V experimentální praxi se často stane, že rozlišované procesy (X_t^1) a (X_t^2), které mají po řadě hustoty f_1 a f_2 nejsou bezprostředně přístupné pozorování. V případě EEG chceme rozlišovat mezi průběhy bioelektrických potenciálů mozkové kůry. Tyto potenciály však lze registrovat teprve po zesílení, tedy po průchodu určitým filtrem. Jindy může jít o případ, kdy rozlišované procesy jsou překryty aditivně šumem. V obou situacích dochází ke změně spektrálních hustot a proto naznačíme, jaké jsou vlastnosti metrik ρ a α, když místo hustot f_1a $f_2$pracujeme s korespondujícími hustotami g_1 a g_2. Jde tak vlastně o otázku *robustnosti metrik ρ a α*.

Lineární filtrace. Mějme lineární filtr s frekvenční přenosovou funkcí $h(\omega)$, která splňuje nerovnost $\int \ln |h(\omega)|^2 d\omega > -\infty$. Jestliže f_1, $f_2 \in \mathcal{F}_1$, pak

$$g_i(\omega) = |h(\omega)|^2 f_i(\omega), \quad i = 1, 2 \qquad (4)$$

jsou opět hustoty z $\mathcal{F}_1$. Je

$$\rho(g_1, g_2) = \sqrt{\int |h(\omega)|^4 [f_1(\omega) - f_2(\omega)]^2 d\omega} . \tag{5}$$

Z (4) a (3) pak okamžitě dostaneme, že

$$\alpha(g_1, g_2) = \alpha(f_1, f_2). \tag{6}$$

Je tedy vidět, že zatímco metrika α je invariantní vůči lineární filtraci, hodnota metriky ρ na frekvenční přenosové funkci $h(\omega)$ silně závisí.

Příklad. (i) Jestliže filtr je "pouhý zesilovač", tj.

$$h(\omega) = \text{konst} , \quad \omega \in \langle 0, \pi \rangle,$$

pak

$$\rho(g_1, g_2) = A^2 \rho(f_1, f_2).$$

(ii) Nechť $A > 0$ a pro $n = 1, 2, \ldots$ je $0 \le \omega_{1n} < \omega_{2n} \le \pi$ a

$$g_{1n}(\omega) = A, \quad \omega \in \langle 0, \pi \rangle.$$

("Band filter"). Je-li současně

$$g_{2n}(\omega) = A + n , \quad \omega \in \langle \omega_{1n}, \omega_{2n} \rangle, \tag{7}$$

$$= A \quad \text{jinde}$$

a

$$\omega_{2N} - \omega_{1n} = 1/n^2 ,$$

pak

$$\rho(g_{1n}, g_{2n}) = n \sqrt{1/n^2} = 1 , \tag{8}$$

$$\alpha(g_{1n}, g_{2n}) = \frac{1}{n^2} \ln \frac{2 + n/A}{2\sqrt{1 + n/A}} \to 0. \tag{9}$$

("Notch filter") . Jestliže je $\omega_{1n} = \omega_1$, $\omega_{2n} = \omega_2$ a místo (7) předpokládáme, že

$$g_{2n}(\omega) = A/n , \quad \omega \in \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

$$= A \quad \text{jinde,}$$

pak

$$\rho(g_{1n}, g_{2n}) = A \sqrt{(\omega_2 - \omega_1)} , \tag{10}$$

$$\alpha(g_{1n}, g_{2n}) = (\omega_2 - \omega_1) \ln \frac{1 + 1/n}{2\sqrt{1/n}} \to \infty . \qquad (11)$$

Vztahy (7) a (8) resp. (10) a (11) ukazují, že metriky ρ a α skutečně nejsou ekvivalentní.

Aditivní šum. Uvažujme nyní jiný případ, kdy místo hustot f_1 a f_2, které chceme rozlišit metrikami ρ a α, pracujeme s hustotami

$$g_i(\omega) = f_i(\omega) + n(\omega), \qquad i = 1,\ 2\ , \qquad (12)$$

kde $n \in \mathcal{F}_1$. Potom je jasné, že

$$\rho(g_1, g_2) = \rho(f_1,\ f_2) \qquad (13)$$

Naproti tomu pro α dostáváme

$$\alpha(g_1, g_2) = \int \ln \frac{f_1(\omega) + f_2(\omega) + 2\ n(\omega)}{2\sqrt{(f_1(\omega)+n(\omega))(f_2(\omega)+n(\omega))}}\, d\omega. \qquad (14)$$

Můžeme tedy uzavřít, že zatímco metrika ρ je invariantní vůči operaci přičtení spektrální hustoty, hodnota metriky α podstatně závisí na tom, jakou hustotu přičteme.

Příklad. Místo procesů (X^1_t) a (X^2_t), které chceme rozlišit prostřednictvím jejich spektrálních hustot pomocí metrik ρ a α, pozorujeme ve skutečnosti procesy

$$Y^i_t = X^i_t + N^i_t, \quad t = \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots, \qquad i = 1,\ 2, \qquad (15)$$

kde o (N^i_t) budeme pro jednoduchost předpokládat, že jde o bílý šum, který není korelovaný s (X^i_t), $i = 1,\ 2$. Spektrální hustota tohoto šumu je konstantní a my zde budeme předpokládat, že oba procesy šumu mají shodné spektrum, tj.

$$n_i(\omega) = k, \qquad \omega \in \langle 0, \pi \rangle, \ i = 1,\ 2.$$

Víme tedy, že metrikou ρ rozlišíme procesy (X^1_t) a (X^2_t) zcela bez ohledu na to, jak silným šumem jsou tyto procesy překryty, tj. rozlišení nezávisí na poměrech signál/šum, tj. na $f_i(\omega)/k$, $i = 1,\ 2$. To je poněkud nerealistická vlastnost metriky ρ. Naproti tomu pro metriku α dostáváme

$$\alpha(g_1, g_2) = \int \ln \frac{(f_1(\omega) + f_2(\omega))/k + 2}{2\sqrt{(f_1(\omega)/k+1)(f_2(\omega)/k+1)}}\, d\omega \qquad (16)$$

a odtud plyne, že

$$f_1(\omega) \ll k \quad a \quad f_2(\omega) \ll k \quad \Rightarrow \quad \alpha(g_1, g_2) \approx 0 \,. \tag{17}$$

tj. signály překryté "silnými šumy" nelze metrikou α rozlišit.

4. Aplikace

Při výzkumu účinků psychofarmak je důležité znát, jak studovaná látka mění spektrální hustotu EEG. Je též třeba znát dynamiku těchto změn. K tomu cíli se snímá EEG těsně před aplikací farmaka a dále se snímání opakuje v určitých intervalech (např. každou hodinu). Získáme tak basální EEG spektrum a řadu spekter exponovaných (či experimentálních). Průběh vzdálenosti mezi spektrem basálním a spektry experimentálními vynášíme pak proti okamžikům, v nichž byla sejmuta spektra experimentální a hovoříme o *grafu spektrální kinetiky EEG*. Obvykle se předpokládá, že v EEG záznamu dochází k největším změnám vůči basálu v době, kdy vrcholí koncentrace psychofarmaka v krvi. Je tedy důležité též znát průběh vzdáleností mezi spektry v závislosti na řídící veličině, tj. na koncentraci. Proto též vynášíme vzdálenosti mezi basálním EEG a EEG experimentálními proti koncentracím látky, jejíž dynamické parametry studujeme. V tomto případě hovoříme o *grafu spektrální dynamiky EEG*. Vzhledem k tomu, že metriky uvedené v tomto příspěvku mají téměř komplementární vlastnosti (vzhledem k lineární filtraci resp. "zašumění" rozlišovanách signálů) konstruujeme grafy spektrální kinetiky i dynamiky pomocí obou uvedených metrik. Zdá se, že tuto metodu lze aplikovat v celé řadě dalších případů, kdy studovaný systém modelujeme náhodným procesem s pomalu proměnnou spektrální hustotou.

Literatura:

[1] Albrecht,V.: On the converegence rate of probability of error in Bayesian discrimination between two Gaussian processes. in: Mandl, P.:, Hušková M.(eds) Proc. of the Third Prague Symposium on Asymptotic Statistics, Elsevier, s. 165 - 175, 1984.