KRITÉRIUM TĚSNOSTI PROCESŮ

Petr Lachout, ÚTIA ČSAV

Při vyšetřování asymptotických vlastností robustních odhadů často narazíme na konvergenci procesů v $C\langle 0,1\rangle$ nebo v $D\langle 0,1\rangle$. Je tomu tak například při ověřování asymptotické linearity odhadu nebo při hledání asymptotického tvaru odhadu.

Konvergence procesů se vpodstatě skládá ze tří částí:

(a) ověření, že procesy mají trajektorie v $C\langle 0,1\rangle$ (popřípadě v $D\langle 0,1\rangle$),

(b) ověřit konvergenci konečných distribucí,

(c) ověřit těsnost procesů v $C\langle 0,1\rangle$ (popřípadě v $D\langle 0,1\rangle$).

(a) vyplývá z definice procesu, (b) ověříme pomocí nějaké Centrální limitní věty a pro (c) existují kritéria těsnosti procesů, která jsou například uvedena v Billingsley (1968).

Pro $C\langle 0,1\rangle$:

(I) α, $\beta > 0$ a konečná míra μ na $\mathcal{B}(\langle 0,1\rangle)$ taková, že položíme-li $f(t) = \mu(\langle 0,t\rangle)$, pak f je spojitá a $f(0) = 0$.

Nechť pro tato α, β, μ platí:

$\forall\ 0 \le a < b \le 1$ a $y > 0$

$$P(|X(a)-X(b)| > y) \le y^{-\alpha}\,\mu(\langle a,b\rangle)^{1+\beta}.$$

Pro $D\langle 0,1\rangle$:

(II) α, $\beta > 0$ a konečná míra μ na $\mathcal{B}(\langle 0,1\rangle)$ taková, že když položíme $f(t) = \mu(\langle 0,t\rangle)$ pak f je spojitá a $f(0) = 0$.

Nechť pro tato α, β, μ platí:

$\forall\ 0 \le a < b < c \le 1$ a $y > 0$

$$P(|X(a)-X(b)| > y,\ |X(b)-X(c)| > y) \le y^{-\alpha}\,\mu(\langle a,c\rangle)^{1+\beta}.$$

Tato problematika se však týká situace, kdy odhadujeme jednorozměrný parametr. V případě, že odhadovaný parametr je vícerozměrný, je vše složitější. Konvergenci uvažujeme v $C_k\langle 0,1\rangle$ nebo v $D_k\langle 0,1\rangle$ (definice viz. Neuhaus (1971)). Opět je třeba ověřit body (a), (b), (c). Problémy nastanou v bodě (c) při ověřování těsnosti procesů.

Pro $D_k\langle 0,1\rangle$ existuje zobecnění kritéria (II), které publikovali Bickel & Wichura (1971). Kritérium však má nepříjemný předpoklad, že proces je nulový na dolní hranici $\langle 0,1\rangle^k$, což v naší situaci není splněno. Pro $C_k\langle 0,1\rangle$ se zdá, že zobecnění kritéria (I) zatím nebylo publikováno.

Podařilo se mi zobecnit podmínky (I), (II) na vícerozměrný případ a odstranit předpoklad nulovosti procesu na dolní hranici $\langle 0,1\rangle^k$. Zobecněná kritéria využívají přírůstku procesu ΔX na hraně, která je určena svou dimenzí (d), počtem souřadnic rovných 1 (j) a permutací souřadnic (φ), na množině $A = \prod_{i=1}^{d}\langle a_i,b_i\rangle$:

$$\Delta X(\varphi,d,j)(A) = \sum_{\delta_i = a_i, b_i} (-1)^{\Sigma I(\delta_i = a_i)} X \cdot \varphi\Big(\delta_1,\dots,\delta_d,\underbrace{0\dots,0}_{k-d-j},\underbrace{1,\dots,1}_{j}\Big)$$

(jde v podstatě o vzorec pro výpočet míry z distribuční funkce).

Vlastní kritéria jsou pak tato:

Pro $C_k\langle 0,1\rangle$:

(III) α, $\beta > 0$ a $\mu_{\varphi,d}$ konečné míry na $\mathcal{B}(\langle 0,1\rangle^d)$, kde φ je permutace souřadnic $\langle 0,1\rangle^k$, $d = 1,\dots,k$ a položíme-li

$f(t) = \mu_{\varphi,d}(\langle 0,1\rangle^q \times \langle 0,t\rangle \times \langle 0,1\rangle^{d-q-1})$, pak f je spojitá a $f(0) = 0$ pro každé $q = 0,\dots,d-1$.

Nechť pro tato α, β, $\mu_{\varphi,d}$ platí:

$\forall\ A = \prod_{i=1}^{d} \langle a_i, b_i\rangle$ a $y > 0$

$$P(|\Delta X(\varphi,d,0)(A)| > y) \le y^{-\alpha}\,\mu_{\varphi,d}(A)^{1+\beta}.$$

Pro $D_k\langle 0,1\rangle$:

(IV) α, $\beta > 0$ a $\mu_{\varphi,d,j}$ konečné míry na $\mathcal{B}(\langle 0,1\rangle^d)$, kde φ je permutace souřadnic $\langle 0,1\rangle^k$, $d = 1,\dots,k$, $j = 0,1,\dots,k-d$ a položíme-li pro libovolné $q = 0,\dots,d-1$ $f(t) = \mu_{\varphi,d,j}(\langle 0,1\rangle^q \times \langle 0,t\rangle \times \langle 0,1\rangle^{d-q-1})$, pak f je spojitá a $f(0) = 0$.

Nechť pro tato α, β, $\mu_{\varphi,d,j}$ platí:

$\forall\ \varphi$ permutaci souřadnic $\langle 0,1\rangle^k$, $d=1,\dots,k$, $j=0,1,\dots,k-d$,

$A = \prod_{i=1}^{d} \langle a_i, b_i\rangle$, $B = \prod_{i=1}^{d} \langle r_i, z_i\rangle$ $A \cap A = \emptyset$, clo $A \cap$ clo $B \ne \emptyset$ a $y > 0$

$$P(|\Delta(\varphi,d,j)(A)|>y),\ |\Delta X(\varphi,d,j)(B)|>y) \le y^{-\alpha}\,\mu_{\varphi,d,j}(A\cup B)^{1+\beta}.$$

Literatura

[1] P. J. Bickel, M. J. Wichura: Convergence Criteria for Multiparameter Stochastic Processes and some Applications. The Annals of Mathematical Statistics, 42(1971), 1656-1670.

[2] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures. John Wiley, New York, 1968.

[3] G. Neuhaus: On Weak Convergence of Stochastic Processes with Multidimensional Time Parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 42(1971), 1285-1295.