ADAPTIVNÍ METODY

Marie Hušková

1. Úvod

Cílem článku je vysvětlit hlavní ideje adaptivních metod, popsat jejich základní strukturu a poskytnout přehled adaptivních metod získaných modifikací postupů založených na pořadí a některých neparametrických odhadů. Výsledky jsou presentovány pro jedno- a dvouvýběrový model v následujícím tvaru:

Dvouvýběrový model: $(X_1,\dots,X_n)$ a $(Y_1,\dots,Y_m)$ jsou nezávislé náhodné výběry z rozdělení s hustotami $f(x)$ a $f(x-\Theta)$, resp., kde Θ je neznámý parametr a f je absolutně spojitá s konečnou nenulovou Fischerovou informací, tj.

$$0 < I(f) = \int (f'(x))^2 / f(x)dx < +\infty .$$

Jednovýběrový model: $(X_1,\dots,X_n)$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x-\Theta)$, kde Θ je neznámý parametr, f je symetrická kolem nuly, aboslutně spojitá a $0 < I(f) < +\infty$.

Obecný tvar pořadových statistik pro test hypotézy $H:\Theta = 0$ proti $A:\Theta>0$ ve dvouvýběrovém modelu je následující:

(1.1) $$S_N(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(R_i(N+1)^{-1}),$$

kde $N=n+m$, R_i je pořadí X_i mezi $X_1,\dots,X_n$, $Y_1,\dots,Y_m$, φ je funkce integrovatelná se čtvercem definová na $(0,1)$. Podobně pořadová statistika pro $H:\Theta=0$ proti $A:\Theta>0$ v jednovýběrovém modelu má následující tvar

(1.2) $$S_n^+(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} X_i\, \varphi(R_i^+(n+1)^{-1}),$$

kde R_i^+ je pořadí $|X_i|$ mezi $|X_1|,\dots,|X_n|$, φ je funkce s vlastnostmi uvedenými výše, $\operatorname{sign} x=1$, $x\geq 0$; $\operatorname{sign} x=-1$, $x<0$.

Základní typy neparametrických odhadů jsou odhady maximálně věrohodného typu (M-odhady), odhady založené na pořadích (R-odhady) a lineární kombinace pořádkových statistik (L-odhady). Připomeňme si jejich definice pro jednovýběrový model. M-odhady $\Theta_M(\psi)$ je definován jako řešení

(1.3) $$\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i-t) \cong 0,$$

kde ψ je vhodná skórová funkce (definovaná na R_1), $\cong$ znamená přibližnou rovnost v nějakém smyslu. R-odhad je definován jako řešení

(1.4) $$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} X_i\, \varphi\left(\frac{R_i^+(t)}{n+1}\right) \cong 0,$$

kde $R_i^+(t)$ je pořadí $|X_i-t|$ mezi $|X_1-t|,\dots,|X_n-t|$, φ je monotonní skórová funkce na $(0,1)$.
L-odhad $\Theta_L(J)$ má tvar

(1.5) $$\Theta_L(J) = \sum_{i=1}^{n} J(i(n+1)^{-1})X_{(i)},$$

kde $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ je uspořádaný výběr odpovídající $(X_1,\dots,X_n)$, J je funkce definována na $(0,1)$.

Je-li hustota f známá a splňuje-li jisté podmínky regularity, testy pro H_o

proti A založené na $S_N(\varphi_f)$ a $S_n^+(\varphi_f^+)$ vedou k asymptoticky nejsilnějšímu testu pro kontiguitní (tj. blízkou) alternativu v dvouvýběrovém resp. jednovýběrovém modelu, Zde

$$(1.6) \qquad \varphi_f(u) = -\frac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}, \qquad u \in (0,1),$$

$$(1.7) \qquad \varphi_f^+(u) = \varphi_f((u+1)/2), \qquad u \in 0,1),$$

$$F^{-1}(u) = \inf\{x;\ F(x) \geq u\}.$$

Funkce

$$(1.8) \qquad \psi_f(x) = -f'/f(x), \qquad x \in R_1$$

$$(1.9) \qquad J_f(u) = \varphi_f(u)\ f(F^{-1}(u))\ I^{-1}(f) \qquad u \in (0,1)$$

a φ_f^+ daná (1.7) generují asymptoticky optimální odhady parametru θ (tj. odhad θ s vlastností

$$\mathcal{L}(\sqrt{n\ I(\theta)}\ \ (\hat{\theta}-\theta)) \to N(0,1) \quad \text{pro} \quad n \to \infty).$$

Skutečná hustota f obvykle není v praxi známa, přesto požadujeme asymptoticky optimální (nebo aspoň rozumné) testy a odhady. Metody řešící tento problém nazýváme adaptivní metody (testové statistiky a odhady jsou adaptovány podle dat). Tyto metody jsou v podstatě dvou typů s omezením a bez omezení.

Základní struktura adaptivních metod s oemezním je následující:

1) zvolit rozumnou třídu rozdělení $\mathcal{F}$ a rozhodovací pravidlo pro výběr rozdělení ;
2) vybrat rozdělení $f_o \in \mathcal{F}$ na základě zvoleného rozhodovacího pravidla (při testech a odhadech založených na pořadí jsou rozhodovací pravidla založená na pořádkových statistikách preferována);
3) aplikace testu)popř.odhaduú, který je optimální pro f_o .

Adaptivní metody bez omezení spočívají v následujícím:

1) odhadnutí funkce φ_f, ψ_f resp. J_f;
2) aplikace testu (popř. odhadu) s φ_f, ψ_f resp. J_f nahrazeným příslušnými odhady.

Byla navržena řada adaptivních metod obou druhů a studovány jejich vlastnosti. Obecně lze říci, že adaptivní metody somezením jsou obvykle jednoduché, využívají známé testy a odhady. Avšak výsledné testy a odhady jsou asymptoticky optimální, pouze náleží-li skutečné rozdělení do třídy $\mathcal{F}$. Na základě výsledků simulačních studií pro malé rozsahy výběrů lze tyto postupy doporučit.

Testy a odhady získané adaptivními metodami bez omezení jsou většinou asymptoticky optimální pro poměrně širokou třídu rozdělení, ale konvergence je velmi pomalá a použití je obvykle spojeno výpočetními problémy.

Většina adaptivních postupů vznikla modifikací pořadových testů, odhadů založených na pořadí, L-odhadů nebo odhadů maximálně-věrohodného typu. Následující dva paragrafy jsou hlavně věnovány testům a odhadům založeným na pořadích.

2. Adaptivní metody s omezením

Pozornost bude věnována přehledu možných tříd rozdělení a rozhodovacích pravidel pro výběr rozdělení z $\mathcal{F}$ v jednovýběrovém modelu. V dalším budeme používat následující symbol:

$$\mathcal{F}(f) = \{g;\ g(x) = \lambda f(\lambda x-u), -\infty < u < +\infty\ ,\ \lambda > 0\}.$$

Nejprve si uvedeme metody s rozhodovacím pravidlem založeným na chování chvostů rozdělení (např. Hájek (1979), Randles a Hogg 1973), Hogg a ko .(1975), Jones(1979). V tomto případě třída rozdělení obsahuje hustoty s tzv.lehkými,středními a těžkými chvosty

Randles a Hogg (1973) uvažovali třídu $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}(f_1),\ \mathcal{F}(f_2),\ \mathcal{F}(f_3)\}$, kde f_1 je dvojitě exponenciální rozdělení (těžké chvosty), f_2 je logistické (střední chvosty) a f_3 je rovnoměrné (lehké chvosty). Rozhodovací pravidlo je následující:

zvolit	$\mathcal{F}(f_1)$,	jestliže	$Q > 2{,}96 - 5{,}5/n$
zvolit	$\mathcal{F}(f_2)$,	jestliže	$2{,}96-5{,}5/n \geq Q \geq 2{,}08-2/n$
zvolit	$\mathcal{F}(f_3)$,	jestliže	$2{,}08-2/n > Q$,

kde

(2.1) $$Q = (X_{(n)}-X_{(1)})\, n\Big\{\sum_{i=1}^{n} \big|X_{(i)}-\text{medián z } X_i'\big|\, 2\Big\}^{-1} \quad \text{pro } n \leq 20$$

(2.2) $$Q = 10\,(\bar{U}_{0,05} - \bar{L}_{0,05})\,(\bar{U}_{0,5} - \bar{L}_{0,5})^{-1} \quad \text{pro } n > 20.$$

Zde $\bar{U}_\alpha$ a $\bar{L}_\alpha$ označuje průměr $100\alpha\%$ největších popř. nejmenších pořádkových statistik. Rozhodovací pravidlo pro $n \leq 20$ je motivováno faktem, že optimální test invariantní vzhledem k posunutí a změně měřítka pro úlohu H : "výběr je z rovnoměrného rozdělení" proti A: "výběr je z dvojitě exponenciálního rozdělení" je založen (přibližně) na Q dané (2.1). Pro velká n platí

$$Q \to 3{,}3 \text{ v pravděpodobnosti pro } n \to \infty, \text{ je-li } f \in \mathcal{F}(f_1)$$
$$Q \to 2{,}6 \text{ v pravděpodobnosti pro } n \to \infty, \text{ je-li } f \in \mathcal{F}(f_2)$$
$$Q \to 1{,}96 \text{ v pravděpodobnosti pro } n \to \infty, \text{ je-li } f \in \mathcal{F}(f_3).$$

Testové statistiky jsou zvolené podle obecného pravidla kromě $\mathcal{F}(f_3)$ – autoři doporučují užít modifikaci Wilcoxonova jednovýběrového testu. Toto rozhodovací pravidlo bylo později modifikováno a použito také pro konstrukci dalších adaptivních postupů (např. Moberg akol. (1980)).

Jiný postup založený na chování chvostů rozdělení byl navržen Hájkem (1970) pro třídu $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}(f_1),\dots,\mathcal{F}(f_k)\}$, kde f_i jsou různé symetrické hustoty. Dle rozhodovacího pravidla zvolíme $\mathcal{F}(f_i)$ takové, že příslušná kvantilová funkce je nejblíže výběrové kvantilové funkci. Žádné vlastnosti metody nebyly studovány.

Jones (1979) uvažoval třídu $\mathcal{F}=\{f_\lambda;\ \lambda \in R_1\}$, kde kvantilová funkce $F^{-1}(u)$ příslušná f má tvar

$$F_\lambda^{-1}(u) = (u^\lambda - (1-u)^\lambda)/\lambda\ ,$$

(tj. $\varphi(u,f_\lambda) = (\lambda-1)(u^{\lambda-2}-(1-u)^{\lambda-2})(u^{\lambda-1}+(1-u)^{\lambda-1})^{-2}$. Tato třída $\mathcal{F}$ obsahuje rozdělení s lehkými $\lambda>0$, středními i těžkými $\lambda<0$ chvosty; např. pro $\lambda=1$ a $\lambda=2$ je f rovnoměrné, pro $\lambda=0{,}135$ je f přibližně normální, pro $\lambda=0$ je f logistické. Autor navrhuje následující odhad λ založený na pořádkových statistikách):

$$\hat{\lambda} = (\log 2)^{-1} \log\{(X_{(n-2M+1)} - X_{(n-4M+1)}) / (X_{(n-M+1)} - X_{(n-2M+1)})\},$$

kde M je zvoleno tak, aby odráželo chování chvostů. Jako výsledná φ-funkce se použije $\varphi(u,f_{\hat{\lambda}})$.

Příklady postupů, kde rozhodovací pravidlo není motivováno chováním chvostů, jsou dva postupy publikované Hájkem (1970) pro obecnou třídu $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}(f_1),\dots,\mathcal{F}(f_k)\}$, kde $f_1,\dots,f_k$ jsou různé hustoty, a postup vypracovaný Albersem (1979). První rozhodovací pravidlo je bayesovské invariantní vůči posunutí a změně měřítka, druhé je založené na asymptotické linearitě pořadových statistik a poslední využívá odhadu špičatosti. Aby rozhodovací pravidlo bylo závislé pouze na uspořádaném výběru $|X|_{(1)} \leq \dots \leq |X|_{(n)}$ (odpovídající $|X_1|,\dots,|X_n|$), definujeme nové náhodné veličiny $X_i^* = V_i |X|_{Q_i}$, $i=1,\dots,n$, kde $Q_1,\dots,Q_n$ je náhodná permutace $(1,\dots,n)$ a $V_1,\dots,V_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s $P(V_i=1)=P(V_i=-1)= 1/2$ nezávislé na $X_1,\dots,X_n$. Pak při hypotéze H jsou náhodné vektory $(X_1^*,\dots,X_n^*)$, $(R_1^+,\dots,R_n^+)$ a $(\text{sign}\, X_1,\dots,\text{sign}\, X_n)$ nezávislé a $(X_1^*,\dots,X_n^*)$ má rozdělení shodné s $(X_1,\dots,X_n)$.

Bayesovské rozhodovací pravidlo invariantní vůči posunutí a změně měřítka (jsou-li všechny typy apriori stejně pravděpodobné) říká následující:
zvolit $\mathcal{F}(f_i)$, jestliže $\max_{1\le j\le k} p_{jn}(X_1^*,\dots,X_n^*) = p_{in}(X_1^*,\dots,X_n^*)$, kde

$$p_{jn}(X_1^*,\dots,X_n^*) = \int_0^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} f(\lambda X_i^*-u)\lambda^{n-2}\,du\Big)d\lambda, \quad j=1,\dots,k.$$

Uthoff (1970) odvodil $p_n(X_1,\dots,X_n)$ pro některá známá rozdělení (např. normální, rovnoměrné, exponenciální). Pro některá rozdělení je však obtížné spočítat tuto hustotu. Proto Hogg a kol. (1972) doporučil používat

$$p_{jn}^*(X_1^*,\dots,X_n^*) = \prod_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_{jn}^{-1} f((X_i^*-\hat{\mu}_{jn})\,\hat{\sigma}_{jn}^{-1}),$$

kde $\hat{\mu}_{jn}$ a $\hat{\sigma}_{jn}$ jsou maximálně věrohodné odhady posunutí a měřítka j-tého rozdělení, místo $p_{jn}(X_1^*,\dots,X_n^*)$.

Rozhodovací pravidlo využívající asymptotické linearity pořadových statistik ($(f_1,\dots,f_k)$ jsou absolutně spojité a $I(f_j) < +\infty$, $j=1,\dots,k$) má tvar

$$\text{zvolit } \mathcal{F}(f_i), \text{ jestliže } \max_{1\le j\le k} L_{jn} = L_{in},$$

kde

$$L_{jn} = (S_n^*(j,n^{-1/2}) - S_n^*(j,0)).\,(\mathrm{var}_H\, S_n^*(j,n))^{-1/2}$$

$$S_n^*(j,t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} X_i^*\, \varphi_{f_j}^+(R_i^+(t)(n+1)^{-1}),$$

$R_i^+(t)$ je pořadí $|X_i^*-t|$ mezi $|X_1^*-t|,\dots,|X_n^*-t|$. K motivaci poznamenjme, že asymptotická linearita (van Eeden 1972) implikuje

$$L_{jn} \to \int_0^1 \varphi_{f_j}^+(u)\,\varphi_f^+(u)\,du\,\Big(\int_0^1 \varphi_{f_j}^{+2}(u)\,du\Big)^{-1/2}$$

v pravděpodobnosti pro $n\to\infty$, $j=1,\dots,k$, f je skutečná hustota. Podle Schwarzovy nerovnosti je pravá strana menší nebo rovna $\big(\int_0^1 \varphi^{+2}(u)du\big)^{1/2}$ a maximum je dosaženo právě, když $f\in\mathcal{F}(f_j)$.

Albers (1979) uvažoval místo třídy rozdělení $\mathcal{F}$ třídu φ-funkcí (ozn. $\mathcal{J}$) generujících testové statistiky $S_N^+(\varphi)$ (danou (1.2)), kde $\mathcal{J} = \{\varphi_r;\ \varphi_r = \varphi_0^+ r\,h,\ -D_1\le r\le D_2\}$, φ_0 a h jsou hladké funkce na $(0,1)$, $D_1>0$, $D_2>0$. Autor doporučuje zvolit $\varphi_{\tilde{r}}$ takovou, že $\tilde{r}$ minimalizuje

$$\left|\frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(|X|_{(i)})^q}{(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(|X|_{(i)})^p)^{q/p}} - \frac{\int |x|^q\,d\,F_r(x)}{(\int |x|^p\,d\,F_r(x))^{q/p}}\right|.$$

kde F_r je distribuční funkce odpovídající φ_r, $0<p<q$. Volba p a q je doporučena v závislosti na volbě $\mathcal{J}$.

3. Adaptivní metody bez omezení

V tomto paragrafu budou uvedeny odhady funkce φ_f.

Hájek (1962) navrhl následující odhad funkce φ_f na základě pořádkových statistik $X_{(1)}\le\dots\le X_{(n)}$:

$$\text{(3.1)}\qquad \tilde{\varphi}_n(u) = 2\,\frac{q_n t_n}{n+1}\Big\{\frac{1}{X_{(h_{nj}+q_n)}-X_{(h_{nj}-q_n)}} - \frac{1}{X_{(h_{n,j+1}-q_n)}-X_{(h_{n,j+1}-q_n)}}\Big\} \quad \text{pro } \frac{h_{nj}}{n}\le u<\frac{h_{n,j+1}}{n}$$

$1\le j\le t_n$, $q_n=[n^{3/4}\varepsilon_n^{-2}]$, $t_n=[n^{1/4}\varepsilon_n^3]$, $\varepsilon_n\to 0$, $n^{1/4}\varepsilon_n^3\to 0$, pro $n\to\infty$, $h_{nj}=[jn(t_n+1)^{-1}]$, $1\le j\le t_n$, $[a]$ označuje celou část a.

Odhad je motivován následujícími dvěma tvrzeními:

1) $X_{(nu)} \to F^{-1}(u)$ je pravděpodobnost pro $n \to \infty$, $u \in (0,1)$,

2) $$\lim_{r \to 0} \lim_{s \to 0} 2rs \left\{ \frac{1}{F^{-1}(u+r)-F^{-1}(u-r)} - \frac{1}{F^{-1}(u+s+r)-F^{-1}(u+s-r)} \right\} = \varphi_f(u), \quad u \in (0,1).$$

Další možnost je využít Fourierovy řady. Funkci φ_f odhadneme následovně:

$$\hat{\varphi}_n(u) = \sum_{k=o}^{H_n} \hat{c}_k \, P_k(u), \tag{3.2}$$

kde $\{P_k\}_{k=o}^{H_n}$ je úplný ortogonální systém funkcí z $L_2(0,1)$ a $\hat{c}_k$ jsou odhady příslušných Fourierových koeficientů

$$c_k = \frac{1}{\| P_k \|} \int_0^1 \varphi_f(u) \, \bar{P}_k(u) du = \frac{1}{\| P_k \|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \, \bar{P}_k(F(x))}{dx} dF(x), \tag{3.3}$$

kde $\bar{P}_k$ je funkce komplexně sdružená k P_k, $\| P_k \|^2 = \int |P_k(u)|^2 du$. Tuto metodu navrhl Beran (1974) pro systém goniometrických funkcí a odhady c_k získal tak, že v posledním výrazu na pravé straně distribuční funkci F nahradil empirickou a derivaci nahradil diferencí. Hušková (1984) navrhla použít systém Legendreových polynomů a pro odhad c_k využít asymptotické linearity pořadových statistik.

V serii prací vypracovali Behnen, Neuhaus, Ruymgaart adaptivní pořadový test pro obecný dvouvýběrový problém (včetně algoritmu pro výpočet). Nechť $(X_1,\dots,X_n)$ a $(Y_1,\dots,Y_m)$ jsou dva nezávislé náhodné výběry z rozdělení s distribuční funkcí F resp. G, kde F a G neznáme. Pro test hypotézy $H : F = G$ proti $A : F \leq G$, $F \neq G$ můžeme použít testovou statistiku (1.1) s (při F a G známých)

$$\varphi = f_N - g_N \qquad \text{nebo} \qquad \varphi = \log f_N / g_N,$$

kde f_N a g_N jsou hustoty $F(H_N^{-1}(X_i))$ resp. $G(H_N^{-1}(Y_i))$, $N=m+n$, $H_N = (nF+mG)/N$. Byly navrženy odhady hustot f_N a g_N založené na pořadích a typově jde o odhady s jádrem. Byl vyvinut algoritmus pro výpočet příslušné testové statistiky.

Pokud se týče funkcí J_f a ψ_f, Sacks (1975) navrhl odhad J_f, přičemž použil obdobnou motivaci jako Hájek (1962). Stone (1975) vypracoval adaptivní M-odhad. Použitl odhad s jádrem pro f a f' v (1.8) a vzniklý odhad poněkud modifikoval, aby měl dobré asymptotické vlastnosti.

Na závěr bych chtěla uvést jeden odhad parametru Θ, který je asymptoticky optimální i při neznámém f a nejde o adaptivní odhad ve výše uvedeném smyslu. Beran (1978) navrhl vzít za odhad parametru Θ hodnotu t, která minimalizuje Hellingerovu vzdálenost $f_n(x)$ a $f_n(-x+2t)$, kde f_n je odhad hustoty f.

Literatura

Albers, W. (1979). Asymptotic deficiencies of one-sample rank tests under restricted adaptation, Ann.Math.Statist.7, 944-954.

Behnen, K. (1980). Nichtparametrische Statistik: Zweistrichproben Rangtests, Preprint Nr.80-7, Universität Hamburg.

Behnen, K., Neuhaus, G. a Ruymgaart, F. (1982). Chernoff-Savage theorem for rank statistics with estimated scores and rank estimators of score functions. Zpráva 82-2, Hamburg Universität.

Behnen, K. a Hušková, M. (1983). A simple algorithm for adaption of scores and power behavior of the corresponding rank test. Zpráva 83-2, Hamburg Universität.

Beran, R. (1974). Asymptotically efficient adaptive rank estimates in location model. Ann.Statist. 2, 63-74.

Beran, R. (1978). An efficient and adaptive estimator of location. Ann.Math.Statist.6, 292-313.

Bickel, P.J. (1982). On adaptive estimation, Ann.Statist. 10, 647-671.

Hájek, J. (1962). Asymptotically most powerful rank order tests. Ann.Math.Statist.33, 1124-1147.

Hájek,J. (1969). A course in nonparametric statistics. San Francisco: Holden-Day.

Hájek,J.(1970). Miscellaneous problems of rank test theory. Nonparametric techniques in statistical inference in M.L.Puri (ed.), Nonparametric techniques in statistical inference, London-Cambridge University Press, 3-17.

Hogg,R.V.(1967). Some observations on robust estimation. Journal of the American Statistical Association, 62, 1179-1186.

Hogg,R.V.(1972). More light on the kurtosis and related statistics, Journal of the American Statist.Assoc., 67, 422-424.

Hogg,R.V.(1974). Adaptive robust procedures: a partial review and some suggestions for future applications and theory. Journal of the American Statistical Association, 69, 909-923.

Hogg,R.V., Fisher,D.M. and Randles,R.G.(1975). A two-sample adaptive distribution-free test. Journal of the Amer.Statist. Assoc.70, 1020-1034.

Hogg,R.V. et al. (1972). On the selection of the underlying distribution and adaptive estimation. Journal of the Amer.Statist.Assoc. 67, 597-600.

Jaeckel,L.A.(1971). Robust estimates of location: symmetry and asymmetry contamination. Ann.Math.Statist.,42, 1020-1034.

Jones,D.H.(1977). A one-sample adaptive distribution-free test with a stable power function. Communications in Statistics-Theory and Methods A5(3), 251-260.

Jones,D.H.(1979). An efficient adaptive distribution-free test for location. Journal of the American Statistical Association, 74, 822-828.

Johns,M.V.(1974). Nonparametric estimation of location. Journal of the American Statist.Assoc.,69, 453-460.

Jurečková,J.(1969). Asymptotic linearity of a rank statistic. Ann.Math.Statist.,40, 1889-1900.

Kraft,C. and van Eeden,C.(1970). Efficient linearized estimates based on ranks, in M.L.Puri (ed.), Nonparametric technic in statistical inference. London-Cambridge,University Press.

Moberg,T.F., Ramberg,J.S. and Randles,R.H.(1978). An adaptive M-estimator and its applications to a selection problem. Technometrics, 20, 255-263.

Moberg,T.F., Ramberg,J.S. and Randles,R.H.(1980). An adaptive multiple regression procedure based on M-estimators. Technometrics,22, 213-224.

Policello,G.E. and Hettmansperger,T.P.(1976). Adaptive robust procedures for the one-sample location problem. Journal of the American Statist.Assoc.. 7,624-633.

Prescott,P.(1978). Selection trimming proportion for robust adaptive trimmed means. Journal of the American Statist.Assoc., 73, 133-140.

Rao,P.V., Schuster,E.F. and Littel,R.C.(1975). Estimation of shift and center of symmetry based on Kolmogorov-Smirnov statistics. Ann.Statist.,3, 862-873.

Randler,R.H., and Hogg,R.V.(1973). Adaptive distribution-free tests. Communications in statistics, 2, 337-356.

Randles,R.H., Ramberg,J.S. and Hogg,R.V.(1973). An adaptive procedure for selecting the population with largest location parameters. Technometrics,15, 769-778.

Sacks,J.(1975). An asymptotically efficient sequence of estimators of a location parameter. Ann.Statist.,4, 285-298.

Samanta,M.(1974). Efficient nonparametric estimation of a shift parameter. Sankhya Ser.A, 36, 273-292.

Stone,C.J.(1975). Adaptive maximum likelihood estimators of a location parameter. Ann.Statist.,3, 267-281.

Takeuchi,K.(1971). A uniformly asymptotically efficient estimator of a location parameter. Journal of the American Statist.Assoc., 66, 292-301.

Uthoff,V.A.(1970). An optimum test property of two wellknown statistics. Journal of the American Statist.Assoc, 65, 1597-1600.

van Eeden,C.(1970). Efficiency-robust estimation of location. Ann.Math.Statist.41, 172-181.

van Eeden,C.(1972). An analogue for signed rank statistics of Jurečková's asymptotic linearity theorem for rank statistics. Ann.Math.Statist.,43, 791-802.