ASYMPTOTICKÁ RYCHLOST ROZLIŠOVÁNÍ ROBUSTNÍMI VERZEMI TESTU POMĚREM VĚROHODNOSTI.

Jan Ámos Víšek

1. ÚVOD. Občasné abnormality ve výsledcích klasických statistických postupů v případech byť i velmi malého odklonu dat od vysvětlujícího modelu postavily statistiky před nutnost vyšetřovat stabilitu klasických metod při různých typech "poškození" předpokladů zahrnutých v původním modelu. Současně byly inspirací vedoucí k myšlence vybudování modelů implementujících "znečištění" dat, a řešení klasických úloh statistiky v rámci takových modelů.

Jedním z prvních a dnes snad nejznámějším takovým modelem je Huberem navržený model ε-kontaminace (Huber, 1965). (Všechny podrobnosti viz níže.) V roce 1972 použili Huber se Strassenem Choquetem zavedený pojem kapacity (Choquet, 1953) k popsání na první pohled velmi obecného modelu kontaminace (avšak předchozí Huberův model je speciálním případem tohoto jen za určitých dalších omezení). Aby se vyhnul těmto ohraničujícím předpokladům (a rovněž nevýhodě řešení v implicitním tvaru - viz níže) navrhl Rieder v roce 1977 jiné zobecnění Huberova modelu, obsahující jako speciální případ rovněž model kontaminace založený na totální variaci.

V rámci těchto modelů byl potom hledán minimaxní test některé, vždy složené, hypothesy proti složené alternativě. Řešení tohoto úkolu je úzce svázáno s pojmem nejméně příznivé dvojice pravděpodobnostních měr, který zavedl pro případ bayesovského testování Lehmann (1959). Jak bude ukázáno níže, nalezení takové dvojice nejméně příznivých pravděpodobnostních měr řeší problém nalezení minimaxního testu, neboť tímto testem je právě test poměrem věrohodnosti této dvojice pravděpodobnostních měr. Řešení tohoto typu v rámci výše popsaných modelů bylo např. nalezeno Huberem (1965), Huberem a Strassenem (1973), Chalfinou a Chalfinym (1975) či Riederem (1977).

Zdá se však, že vyšetřování efektivnosti těchto robustních verzí testů byla dosud věnována poměrně malá pozornost. Patrně jediným příspěvkem věnovaným této problematice je článek Riedera z roku 1978. V tomto článku je efektivnost robustního testu studována v modelu lokálních alternativ, což s sebou nese nutnost asymptotického potlačení kontaminace. Výsledek, ukazující na asymptoticky shodné chování robustní verze testu a testu poměrem věrohodnosti v původním, nekontaminovaném modelu, patrně nebude příliš užitečný pro získání představy o účinnosti robustního testu v případech, kdy ani při rozsáhlých výběrech nedochází k potlačení kontaminace, popřípadě v případech, kdy rozsah výběru není příliš veliký.

Problémy související se studiem robustních testů byly vyvolány potřebou vytvoření si představy o účinnosti těchto testů. Jednou z charakteristik napomáhajících k vytvoření takové představy je asymptotická rychlost konvergence součtu pravděpodobností chyb prvého a druhého druhu k nule pro test, který minimalizuje tento součet. Asymptotická rychlost této konvergence je dána logaritmem minimální α-entropie (Chernoff (1952), Perez (1972)). Stanovení odhadu pro minimální α-entropii nejméně příznivé dvojice pravděpodobnostních měr nám napoví oč pomaleji bude rozlišovat robustní verze testu poměrem věrohodnosti než test původní. I kdyby však toto zhoršení rychlosti rozlišování bylo značné, nezbývá nám, v případě, že jsme přesvědčeni o tom, že data jsou kontaminována, nic jiného než použít robustní verzi testu. Otázka volby testu se však stává ožehavější v případech, kdy nejsme přesvědčeni o přítomnosti kontaminovaných pozorování. V těchto případech by bylo užitečné znát, jakému případnému zhoršení kvality testování se vystavujeme, použijeme-li robustní verzi testu, avšak ke kontaminaci nedošlo (a tudíž, pokud bychom to byli věděli, mohli jsme použít (stejnoměrně) nejsilnější (nerobustní) test (příslušné úrovně)). Článek přináší odpovědi na obě tyto otázky. Výsledky jsou uvedeny přehledově, bez důkazů; ty je možno nalézt v článcích Víšek (1981a), (1981b). Hlavní důraz byl položen na možnost vytvořit si skutečnou představu o charakteru chování robustních testů pomocí numerické studie, presentované ve formě několika tabulek.

Abychom byli schopni rozumně popsat zmíněné modely a výsledky musíme zavést následující označení.

2. OZNAČENÍ. Nechť $\mathcal{N}$ je množina všech přirozených čísel, R reálná osa a $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ některý měřitelný prostor. Označme $\mathfrak{M}$ třídu všech pravděpodobnostních měr na $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Pro libovolnou $P \in \mathfrak{M}$ a $A \in \mathcal{A}$ položme

$$e_n(P, A) = \int_A dP^{(n)}.$$

Pro $P, Q \in \mathfrak{M}$ označme p, q hustoty vzhledem k některé míře μ dominující současně P i Q. $H_\alpha(p, q)$ (resp. $H(p, q)$ nechť označuje α-entropii (resp. minimální α-entropii) měr P a Q, tj.

$$H_\alpha(p, q) = \int p^\alpha q^{1-\alpha} \, d\mu \quad , \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$H(p, q) = \inf_{0 < \alpha < 1} H_\alpha(p, q).$$

Konečně pro libovolné $n \in \mathcal{N}$ zaveďme

$$\mathcal{K}_n(p, q) = \{x \in \mathcal{X}^{(n)} ; \prod_{i=1}^{n} p(x_i) < \prod_{i=1}^{n} q(x_i)\}.$$

Poznámka 1. $\mathcal{K}_n(p, q)$ je kritická oblast minimalizující součet pravděpodobností chyb prvého a druhého druhu pro test poměrem věrohodnosti při testování hypothézy $H: \{$skutečným rozdělením je $P\}$ proti alternativě $A: \{$ skutečným rozdělením je $Q\}$. Protože tento test je (při libovolné úrovni) nejsilnějším testem, je zmíněný součet pravděpodobností chyb současně minimálním mezi všemi testy, tj.:

$$e_n(P, \mathcal{K}_n(p, q)) + e_n(Q, \mathcal{K}_n^c(p, q)) = \min_{A \in \mathcal{A}} [e_n(P, A) + e_n(Q, A^c)].$$

Poznámka 2. Zavedené označení nám umožní ocitovat tvrzení Chernoffovy věty (vzpomenuté v úvodu):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log [e_n(P, \mathcal{K}_n(p, q)) + e_n(Q, \mathcal{K}_n^c(p, q))] = \log H(p, q).$$

Nyní krátce připomeňme nejdůležitější modely kontaminace v chronologickém pořadí jejich vzniku.

3. PŘEHLED MODELŮ.

(V dalším textu jsou explicitně uváděny pouze ty předpoklady, které nebyly zavedeny v odstavci 2. OZNAČENÍ.)

Huberův model. Nechť $P_i \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon_i \in [0,1)$, $(i=0,1)$. Položme

$$\mathcal{P}_i = \{Q \in \mathfrak{M} : Q(A) = (1-\varepsilon_i) P_i(A) + \varepsilon_i G_i(A);\ G_i \in \mathfrak{M},\ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

Huber-Strassenův model. Nechť $\mathcal{X}$ je úplný separabilní metrický prostor a nechť v_i je 2-alternující kapacita definovaná na $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, tj. množinová funkce s těmito vlastnostmi:

1) $v(\phi) = 0, \qquad v(\mathcal{X}) = 1,$

2) $A \subset B, \quad A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad v(A) \leq v(B),$

3) $A_n \uparrow A \quad \{A_n\} \subset \mathcal{A}, A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad v(A_n) \uparrow v(A),$

4) $F_n \downarrow F \quad \{F_n\} \subset \mathcal{A}, F \in \mathcal{A}, F_n$ UZAVŘENÉ $\Rightarrow$

$\Rightarrow v(F_n) \downarrow v(F),$

5) $A, B \in \mathcal{A} \quad v(A \cup B) + v(A \cap B) \leq v(A) + v(B).$

Položme

$$\mathcal{P}_i = \{Q \in \mathfrak{M} : Q(A) \leq v_i(A),\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Riederův model. Nechť $P_i \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon_i, \delta_i \geq 0$, $\varepsilon_i + \delta_i < 1$ $(i=0,1)$.

Definujme $v_i(A) = \min\{(1-\varepsilon_i) P_i(A) + \varepsilon_i + \delta_i, 1\} \quad \forall A \in \mathcal{A}, A \neq \phi,$

$v_i(\phi) = 0$

a $\mathcal{P}_i = \{Q \in \mathfrak{M} : Q(A) \leq v_i(A),\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$

Poznámka 3. Model, který uvažovali manželé Chalfinovi je speciálním případem Huberova modelu, ve kterém předpokládali $G_0 = G_1$. Podobně není těžké ukázat, že Huberův model je speciálním případem Riederova modelu, položíme-li $\delta_i = 0$. Aby však Huberův model byl speciálním případem Huber-Strassenova modelu, musí být $\mathcal{X}$ kompaktní.

V rámci uvedených modelů se potom vždy testuje

$$H : P \in \mathcal{P}_0 \qquad \text{proti} \qquad A : P \in \mathcal{P}_1,$$

Minimaxní test je zadán nalezením nejméně příznivé dvojice pravděpodobnostních měr, jak je shrnuto v následujícím odstavci.

4. NEJMÉNĚ PŘÍZNIVÁ DVOJICE PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH MĚR.

Definice 1. Řekneme, že Q_0 a Q_1 je nejméně příznivá dvojice pravděpodobnostních měr vzhledem k $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_1$, pokud pro všechna (nezáporná) reálná t

$$Q_0(\{\pi>t\}) = \sup\,[\,Q'(\{\pi>t\}) : Q'\in\mathcal{P}_0\,]$$

a

$$Q_1(\{\pi>t\}) = \inf\,[\,Q''(\{\pi>t\}) : Q''\in\mathcal{P}_1\,],$$

kde π je vhodná verze Radon-Nikodymovi derivace dQ_1/dQ_0.

(Podrobněji o genezi tohoto pojmu viz Rieder (1977).)

Nechť t_α a γ jsou nezáporná čísla, $\gamma\le 1$, taková, že
$Q_0(\{\pi>t_\alpha\}) + \gamma Q_0(\pi=t_\alpha) = \alpha$ $\quad(\alpha\in(0,1))$
a položme

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \{\pi>t_\alpha\}, \\ \gamma & \{\pi=t_\alpha\}, \\ 0 & \{\pi<t_\alpha\}. \end{cases}$$

Potom

$$E_{Q'}\Phi = Q'(\{\pi>t_\alpha\}) + \gamma\, Q'(\{\pi=t_\alpha\}) =$$

$$= Q'(\{\pi>t_\alpha\}) + \gamma\cdot\lim_{t\nearrow t_\alpha}\,[\,Q'(\{\pi>t\}) - Q'(\{\pi>t_\alpha\})\,] =$$

$$= (1-\gamma)\,Q'(\{\pi>t_\alpha\}) + \gamma\lim_{t\nearrow t_\alpha} Q'(\{\pi>t\}) \le$$

$$\le (1-\gamma)\,Q_0(\{\pi>t_\alpha\}) + \gamma\lim_{t\nearrow t_\alpha} Q_0(\{\pi>t\}) = E_{Q_0}\Phi = \alpha.$$

Tedy Φ má rozměr α . Analogicky dále

$$\inf_{Q''\in\mathcal{P}_1} E_{Q''}\Phi = E_{Q_1}\Phi \geq \sup_{\Phi'\in\mathcal{F}} E_{Q_1}\Phi' \geq \sup_{\Phi'\in\mathcal{F}} \inf_{Q''\in\mathcal{P}_1} E_{Q''}\Phi',$$

kde prvá nerovnost je založena na faktu, že Φ je nejsilnějším testem $H: P=Q_0$ proti $A: P=Q_1$. Odtud

$$\inf_{Q''\in\mathcal{P}_1} E_{Q''}\Phi = \sup_{\Phi'\in\mathcal{F}} \inf_{Q''\in\mathcal{P}_1} E_{Q''}\Phi',$$

tj. Φ je minimaxní test rozměru α .

V článcích Huber (1965), Chalfina a Chalfin (1975) a Rieder (1977) jsou nalezeny nejméně příznivé dvojice Q_0 a Q_1 vzhledem k $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_1$ v příslušných modelech zadaných v předchozím odstavci. Pro Huber-Strassenův model je v článku Huber, Strassen (1973) dokázána existence nejméně příznivé dvojice pravděpodobnostních měr a je popsán minimalizační postup vedoucí (pokud je analyticky zvládnutelný) v konkrétních případech k nalezení této dvojice.

Lze tedy říci, že v řadě případů umíme nalézt minimaxní test v rámci modelu kontaminace. Odpovědím na výše položené otázky o efektivnosti těchto testů je věnován další odstavec.

5. VÝSLEDKY. Věnujme se nejprve modelu, ve kterém se předpokládá shodná kontaminace hypothesy a alternativy. Tuto situaci uvažovali manželé Chalfinovi. Připomeňme nejprve jejich výsledky.

Nechť P_0 a P_1 jsou pravděpodobnostní míry definované na měřitelném prostoru $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, kde $\mathcal{X}$ je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A}$ borelovská σ-algebra. Nechť p_0 a p_1 jsou jejich hustoty vzhledem k míře μ , která dominuje současně P_0 i P_1 . Označme pro libovolné reálné c

$$A(c) = \{x\in\mathcal{X} : p_1(x)/p_0(x) > c\}$$

(kde předpokládáme běžnou konvenci o dělení nulou).

Položme pro $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$, $\varepsilon_i \in [0,1)$,

$$r(x) = (1-\varepsilon_1) p_1(x) - (1-\varepsilon_0) p_0(x).$$

(Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$.) Nechť $X_1 = \{x \in \mathcal{X}, r(x) > 0\} \neq \emptyset$. Z tohoto předpokladu plyne, že existuje $\ell \in R$ tak, že

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \int_{A(\ell)} r(x)\, d\mu.$$

Nejméně příznivá dvojice pravděpodobnostních měr Q_0 a Q_1 vzhledem k $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_1$ (viz Poznámka 3.) je zadána pomocí hustot

$$g_i(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon_i) p_i(x) + \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} r(x) & x \in A(\ell), \\ (1-\varepsilon_i) p_i(x) & \text{JINDE.} \end{cases}$$

<u>Tvrzení 1.</u> Nechť $B \in \mathcal{A}$ je taková množina, že platí

$$\int_B r(x)\, d\mu \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_1.$$

Potom

$$H(g_0, g_1) \leq \min\left\{ (1-\varepsilon_1) H(p_0, p_1) + \varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0) \int_B p_0\, d\mu,\ 1 \right\}.$$

<u>Poznámka 4.</u> Nejlepší hranici lze samozřejmě obdržet dosazením $A(\ell)$ za B.

<u>Tvrzení 2.</u> Platí následující nerovnost:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left[e_n(P_0, \mathcal{K}_n(g_0,g_1)) + e_n(P_1, \mathcal{K}_n^c(g_0,g_1)) \right] \leq$$

$$\leq \min\left\{ \max\left\{ \log \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0} H(p_0,p_1),\ \log\left[H(p_0,p_1) + \int_{A(\ell)} p_1\, d\mu \right] \right\},\ 0 \right\}.$$

Tvrzení 2. udává horní hranici rychlosti konvergence součtu pravděpodobností chyb prvého a druhého druhu, je-li skutečným rozdělením P_0 nebo P_1, avšak my jsme použili k testování robustní verzi testu a nikoliv nejsilnější test založený na věrohodnostním poměru dP_1/dP_0. Protože rychlost konvergence součtu pravděpodobností chyb, je-li skutečným rozdělením P_0 nebo P_1, při použití robustního testu založeného na dQ_1/dQ_0

je nutně větší nebo rovná nejhorší možné rychlosti nastávající tehdy, je-li skutečným rozdělením jedno z dvojice nejméně příznivých, měla by hranice udaná v Tvrzení 1. být větší nebo rovna hranici z Tvrzení 2. To skutečně platí:

Tvrzení 3.

$$\min\left\{\max\left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0} H(p_0,p_1), \left[H(p_0,p_1) + \int_{A(\varepsilon)} p_1\, d\mu\right]\right\}, 1\right\} \leq$$

$$\leq \min\left\{ (1-\varepsilon_1) H(p_0,p_1) + \varepsilon_0 + \int_{A(\varepsilon)} p_0\, d\mu ,\ 1\right\}.$$

Obraťme nyní pozornost k modelu navrženému Riederem. Abychom mohli uvést Riederův výsledek zaveďme nejprve některá další označení.

Nechť P_0 a P_1 jsou dvě pravděpodobnostní míry definované na libovolném měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $\varepsilon_0, \delta_0, \varepsilon_1, \delta_1$ nezáporná čísla, $\varepsilon_i + \delta_i < 1 \quad (i = 0, 1)$ a položme

$$\nu_i = \frac{\varepsilon_i + \delta_i}{1-\varepsilon_i} \quad , \quad \omega_i = \frac{\delta_i}{1-\varepsilon_i} .$$

Potom existuje právě jedna dvojice Δ_0 a $\Delta_1 \in (0, \infty)$ tak, že

$$\Delta_0 P_0(\{\Delta < \Delta_0\}) - P_1(\{\Delta < \Delta_0\}) = \nu_1 + \omega_0 \Delta_0$$

a

$$P_1(\{\Delta > \Delta_1\}) - \Delta_1 P_0(\{\Delta > \Delta_1\}) = \nu_0 \Delta_1 + \omega_1 ,$$

kde Δ je některá verze dP_1/dP_0. H. Rieder ukázal ve svém článku (Rieder (1977)) explicitně možnost existence nejméně dvou dvojic nejméně příznivých pravděpodobnostních měr. Jednoznačně je definován pouze věrohodnostní poměr těchto měr dQ_1/dQ_0. Uveďme si alespoň jednu z těchto dvojic

$$q_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon_0}{\nu_1 + \omega_0 \Delta_0} (\nu_1 p_0 + \omega_0 p_1) & x \in \{\Delta < \Delta_0\} , \\ (1-\varepsilon_0)\, p_0 & x \in \{\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_1\} , \\ \dfrac{1-\varepsilon_0}{\nu_0 \Delta_1 + \omega_1} (\omega_1 p_0 + \nu_0 p_1) & x \in \{\Delta_1 < \Delta\} \end{cases}$$

a q_1 se nalezne ze vztahu

$$q_1 / q_0 = \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon_1} \max\{\Delta_0, \min\{\Delta, \Delta_1\}\}$$

platícího $Q_0 + Q_1$ skoro všude.

S použitím Riederových výsledků lze dokázat následující tvrzení:

Tvrzení 4. Nechť $\alpha \in (0,1)$. Potom

$$H_\alpha(q_0,q_1) \leq (1-\varepsilon_0)^\alpha (1-\varepsilon_1)^{1-\alpha} \{ H_\alpha(p_0,p_1) + \Delta_0^{1-\alpha} [P_0(\{\Delta<\Delta_0\}) - \omega_0] + \Delta_1^{-\alpha} [P_1(\{\Delta_1<\Delta\}) - \omega_1]\}.$$

Tvrzení 5. Nechť $\alpha \in (0,1)$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \{ e_n(P_0, \mathcal{K}_n(q_0,q_1)) + e_n(P_1, \mathcal{K}_n(q_0,q_1))\} \leq$$
$$\leq \log \{ \max \{ \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}\right)^{1-\alpha} [H_\alpha(p_0,p_1) + \Delta_0^{1-\alpha} P_0(\{\Delta<\Delta_0\})],$$
$$\left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}\right)^{-\alpha} [H_\alpha(p_0,p_1) + \Delta_1^{-\alpha} P_1(\{\Delta_1<\Delta\})]\}\}.$$

Podobně jako pro model uvažující stejnou kontaminaci hypothesy a alternativy také v tomto modelu je odhad "nejhorší"rychlosti konvergence pravděpodobnosti chyb (tj. rychlosti této konvergence pro dvojici nejméně příznivých distribucí) alespoň tak velký jako odhad této rychlosti pro případ, kdy skutečným rozdělením je buď P_0 **nebo** P_1 (a kdy jsme použili robustní verze testu v domnění, že napozorovaná data jsou kontaminována). Tento fakt je formálně zachycen v následujícím tvrzení.

Tvrzení 6. Nechť $\alpha \in (0,1)$. Potom

$$\min \{ (1-\varepsilon_0)^\alpha (1-\varepsilon_1)^{1-\alpha} [H_\alpha(p_0,p_1) + \Delta_0^{1-\alpha}(P_0(\{\Delta<\Delta_0\}) - \omega_0) +$$
$$+ \Delta_1^{-1}(P_1(\{\Delta_1<\Delta\}) - \omega_1)], 1\} \geq \min\{ \max\{ \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}\right)^{1-\alpha} [H_\alpha(p_0,p_1) +$$
$$+ \Delta_0^{1-\alpha} P_0(\{\Delta<\Delta_0\})], \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}\right)^{-\alpha} [H_\alpha(p_0,p_1) + \Delta_1^{-\alpha} P_1(\{\Delta_1<\Delta\})]\}, 1\}.$$

Závěr článku je věnován numerické analýze.

6. NUMERICKÉ PŘÍKLADY.

STEJNÁ KONTAMINACE HYPOTHÉSY A ALTERNATIVY.

Nechť $P_0 = N(0,1)$, $P_1 = N(\mu,1)$, $\varepsilon_0 = .05$, $\varepsilon_1 = .005$.
Nechť $\hat{H}(g_0, g_1)$ označuje odhad $H(g_0, g_1)$ uvedený v Tvrzení 1. a Re_n odhad uvedený v Tvrzení 2.

μ	$H(p_0,p_1)$	$H(g_0,g_1)$	$\hat{H}(g_0,g_1)$	$\exp\{Re_n\}$
1	.8825	.8945	.9323	.9319
2	.6065	.6377	.6535	.6520
3	.3246	.3653	.3729	.3700
4	.1353	.1815	.1846	.1807
5	.0439	.0927	.0936	.0894

RŮZNÁ KONTAMINACE HYPOTHÉSY A ALTERNATIVY.

Nechť opět $P_0 = N(0,1)$, $P_1 = N(\mu,1)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \delta_0 = \delta_1 = .05$.

μ	$H(p_0,p_1)$	$H(g_0,g_1)$	$\hat{H}(g_0,g_1)$	$\exp\{Re_n\}$
1	.8825	.9793	1	1
2	.6065	.8654	1	.9316
3	.3246	.7394	.9065	.6499
4	.1353	.6529	.7303	.4708
5	.0439	.6153	.6434	.3836
10	3.73E-6	.5999	.5999	.3333

$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \delta_0 = \delta_1 = .005$

μ	$H(p_0,p_1)$	$H(g_0,g_1)$	$\hat{H}(g_0,g_1)$	$\exp\{Re_n\}$
1	.8825	.9169	1	.9552
2	.6065	.6714	.7516	.6821
3	.3246	.4324	.4962	.4125
4	.1353	.2869	.3446	.2314
5	.0439	.2245	.2405	.1433
10	3.73E-6	.1990	.1990	.1005

<u>Poznámka 5.</u> Vzhledem k jednoduchosti (zejména pak symetrii) uvedených příkladů lze vyčíslit přesnou hodnotu $H(g_0, g_1)$. Např. pro Riederův model má vztah pro výpočet $H(g_0, g_1)$ tvar

$$H(g_0,g_1) = (1-\varepsilon_0) H(p_0,p_1)\left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{\Delta < \Delta_0\}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu/2)^2}{2}\right\} dx\right] +$$
$$+ 2 \cdot \Delta_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-\varepsilon_0) P_0(\{\Delta < \Delta_0\}) - \delta_0\right].$$

Literatura

Huber, P. J. (1965). A robust version of the probability ratio test. Ann. Math. Statist. 36, 1753-1758.

Huber, P. J.; Strassen, V. (1973). Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities. Ann. Statist. 1, 251-263.

Халфина, Н. М.; Халфин, Л. А. (1975). Об устойчивом варианте теста отношения правдоподобия. Теория вероятностей и ее применения, Том XX., выпуск 1, 203-206.

Chernoff, H. (1952). A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations. Ann. Math. Statist. 23, 493-507.

Choquet, G. (1953/1954). Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier 5, 131-292.

Lehmann, E. L. (1959). Testing Statistical Hypotheses. J. Wiley and Sons. New York.

Perez, A. (1972). Generalization of Chernoff´s results on the asymptotic discernibility of two random processes. Trans. of the 9-th European Meeting of Statisticians, Budapest 1972.

Rieder, H. (1977). Least favorable pairs for special capacities. Ann. Statist. 5, 909-921.

Rieder, H. (1978). A robust asymptotic testing model. Ann. Statist. 6, 1080-1094.

Víšek, J. Á. (1981a). Bounds of the asymptotic rate of convergence of the error probabilities of a robust test. Problems of Control and Information Theory (v tisku).

Víšek, J. Á. (1981b). Asymptotic behaviour of the robust test in the Rieder´s model of contamination. Kybernetika (v tisku).