STUDIUM ZÁVISLOSTI V DVOUROZMĚRNÝCH KONTINGENČNÍCH TABULKÁCH

Dan Pokorný

Matematické středisko biologických ústavů ČSAV
142 20 Praha 4, Vídeňská 1083

Práce je věnována památce načetínských lesů.

Tento příspěvek se zabývá problematikou studia závislosti dvou diskrétních, zejména nominálních, znaků. Zájem je věnován úloze prvotního zjištění a účelné representace struktury závislosti, pozornost je věnována kolapsování dvourozměrných tabulek.

V první kapitole jsou popsány základní míry a matice používané ke sledování souvislosti v dvourozměrných kontingenčních tabulkách.

Kapitola druhá se zabývá některými výběrovými vlastnostmi zavedených měr. Většina tvrzení zde obsažených byla zkoumána v kontextu logiky automatizovaného výzkumu, specielně jsou relevantní vzhledem k proceduře popsané v poslední kapitole. Obecně pak jsou tvrzení tohoto typu důležitá pro explorativní analýzu dat.

V kapitole třetí je pak podrobněji popsána jedna procedura pro zkoumání struktury závislosti v dvourozměrné kontingenční tabulce.

1. ZÁKLADNÍ POSTUPY ZKOUMÁNÍ ZÁVISLOSTI V DVOUROZMĚRNÝCH KONTINGENČNÍCH TABULKÁCH

1.1. NĚKTERÉ MÍRY SOUVISLOSTI V RxC TABULKÁCH

Uvažujme dvourozměrné multinomiální rozdělení diskrétních veličin F a G, veličina F může nabývat hodnot z množiny $\dot{R} = \{1,\ldots,R\}$, veličina G hodnot z množiny $\dot{C} = \{1,\ldots,C\}$. Pravděpodobnost, že veličina F nabyde hodnoty $i \in \dot{R}$ označme $p_{i.}$, obdobně $p_{.j} = P(G=j)$ a $p_{ij} = P(F=i, G=j)$. Hypotézu o nezávislosti veličin F a G: $(\forall i,j)\ (p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j})$ proti alternativě závislosti $(\exists i,j)\ (p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j})$ můžeme testovat, pokud máme k dispozici konečný výběr o rozsahu n z uvažovaného rozdělení. Označme n_{ij}

počet objektů z tohoto výběru, pro něž veličina F nabývá hodnoty i a současně veličina G hodnoty j, obvyklým způsobem označíme i marginální četnosti:

F \ G	1	...	j	...	C	
1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1C}	$n_{1.}$
⋮	⋮		⋮		⋮	
i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{iC}	$n_{i.}$
⋮	⋮		⋮		⋮	
R	n_{R1}	...	n_{Rj}	...	n_{RC}	$n_{R.}$
	$n_{.1}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.C}$	$m=n_{..}$

(T 1)

Matici $(n_{ij})_{i=1,j=1}^{i=R,j=C}$ nazýváme dvourozměrnou kontingenční tabulkou. Nejobvyklejším testem nezávislosti je Pearsonův χ^2-test. Označme "očekávané četnosti" $e_{ij}=n_{i.}n_{.j}/m$. Hypotézu nezávislosti zamítáme, překročí-li statistika

$$\text{CHISQ} = \sum_i \sum_j (n_{ij}-e_{ij})^2 / e_{ij}$$

kritickou hladinu χ^2-rozdělení s (R-1)(C-1) stupni volnosti. Variantou Pearsonova testu je test založený na statistice

$$\text{MLCHISQ} = 2 \sum\sum n_{ij} \ln n_{ij} / e_{ij}$$

(Pozn.: klademe 0 ln 0 = 0.)

Poněkud komplikovanější je statistika založená na maximálně významné logaritmické interakci. Matici RxC reálných čísel (a_{ij}) nazveme interakční matici, splňuje-li podmínky:

(a) všechny řádkové součty jsou nulové,
(b) všechny sloupcové součty jsou nulové,
(c) existuje $a_{ij} \neq 0$.

Testovou statistikou je nyní výraz

$$\text{WSQ} = \max((\sum\sum a_{ij} \ln n_{ij})^2 / (\sum\sum a_{ij}^2 / n_{ij}))$$

kde maximum je uvažováno přes všechny možné intrakční matice (a_{ij}). Nulové četnosti n_{ij} je doporučeno nahradit hodnotou 0.5.

Statistiky MLCHISQ i WSQ opět srovnáváme s χ^2-rozdělením s (R-1)(C-1) stupni volnosti.

Kromě uvedených testů nezávislosti se užívají dále míry souvislosti vyjadřující stupeň těsnosti vztahu mezi veličinami. Nejužívanější z nich jsou odvozeny ze statistiky CHISQ :

$$PSISQ = CHISQ / m$$

nebo "Cramerovo V "

$$VSO = CHISQ/(m(\min(R,C)-1))$$

nabývající hodnot mezi 0 a 1.

Existuje ovšem celá řada dalších měr a statistik pro RxC tabulky, užitelných ve speciálních situacích (např.jeden či oba znaky jsou ordinální, vyšetřujeme predikovatelnost jednoho znaku z druhého, zkoumáme apriorně daný typ souvislosti apod.)

1.2. NĚKTERÉ MÍRY SOUVISLOSTI V 2x2 TABULKÁCH

Zjednodušíme si označení z (T1) a četnosti budeme značit

G =	1	2	
F = 1	a	b	r
2	c	d	s
	k	l	m

(T2)

Analogiemi statistik CHISQ, MLCHISQ a WSQ budou následující statistiky CHI, MLCHI a W, které však nyní v testech nezávislosti ($p_{11} = p_{1.}p_{.1}$) proti alternativě kladné asociovanosti ($p_{11} > p_{1.}p_{.1}$) budeme srovnávat s kvantily normálního rozdělení N(0,1).

$$CHI = (ad-bc)\sqrt{(m)}/\sqrt{(klrs)} = (am-kr)\sqrt{(m)}/\sqrt{(klrs)}$$

$$MLCHI = \sqrt{(2.(a \ln a + b \ln b + c \ln c + d \ln d - k \ln k - l \ln l - r \ln r - s \ln s + m \ln m))} \quad \ldots \text{ pro } ad-bc > 0$$

$$= 0 \quad \ldots \text{ jinak}$$

$$W = \ln((ad)/(bc))/\sqrt{(1/a+1/b+1/c+1/d)} \ldots \text{pro } ad-bc > 0$$

$$= 0 \quad \ldots \text{ jinak}$$

Místo b=0 resp. c=0 klademe opět b=0.5 resp. c=0.5, avšak pro a=0 nebo d=0 položíme nyní W=0.

Známou modifikací CHI statistiky je Yatesova korekce:

$$YATES = (ad-bc-m/2)\sqrt{(m)}/\sqrt{(klrs)} \ldots \text{ pro } (ad-bc) > m/2$$

$$= 0 \quad \ldots \text{ jinak}$$

Všechny dosud uvedené testy jsou asymptotického charakteru. Přímo odvozený Fisherův test souvislosti je doporučován zejména pro výběry malého rozsahu, přesněji pro tabulky, v nichž alespoň některá z očekávaných četností e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} je malá.

$$FISHER = \sum_{i=0}^{\min(k,r)-a} (k!l!r!s!)/((a+i)!(b-i)!(c-i)!(d+i)!m!)$$

Alternativní hypotézu souvislosti na hladině α přijmeme pokud FISHER $\leq \alpha$.

Poznámka : Naznačíme algoritmus pro výpočet Fisherova testu, který (a) je velmi efektivní a (b) nezpůsobí případnou chybu "overflow" při výpočtu faktoriálů, resp. kombinačních čísel:
(1) Před výpočtem Fisherova testu pro sérii čtyřpolních tabulek (T2) vytvoříme pomocné pole F(0:MMAX), kde MMAX≥m pro všechny tabulky. V poli F uložíme logaritmy faktoriálů rekursivně vypočtené:
F(n) = ln(n) + F(n-1).
Pro danou tabulku (T2):
(2) Vypočteme Q = F(k) + F(l) + F(r) + F(s) - F(m)
(3) Vypočteme

$$FISHER = \sum_{i=0}^{\min(k,r)-a} \exp(Q-F(a+i)-F(b-i)-F(c-i)-F(d+i))$$

Analogií míry PSISQ (a zároveň míry VSQ) je

$$PSI = CHI/\sqrt{(m)}$$

Dalšími mírami jsou interakce, logaritmická interakce a Yuleovo Q :

$$INTERACTION = (ad) / (bc)$$

$$LOGINT = \ln (INTERACTION)$$

$$YULE = (ad-bc) / (ad + bc)$$

LOGINT i YULE jsou (a) funkčně závislé na INTERACTION, všechny tři míry jsou (b) invariantní vůči přenásobení řádků či sloupců tabulky (T2) kladnými konstantami. (a) a (b) jsou ekvivalentní podmínky.

Zobecnění těchto měr pro případ RxC tabulky je možné, ale není jednoznačné.

1.3. INTERPRETACE SOUVISLOSTI V RxC TABULCE POMOCÍ RxC MATICE HODNOT

Uvedené testy a míry nedávají prakticky žádnou informaci o charakteru případné závislosti veličin. Lepší přehled mohou poskytnout různé RxC matice hodnot, informující o významu jednotlivých políček tabulky (T1).

Takovými maticemi mohou například být:

(1) matice pozorovaných četností (n_{ij})

(2),(3),(4) Matice relativních řádkových (resp.sloupcových, resp.celkových) četností $(n_{ij}/n_{i.})$ (resp. $(n_{ij}/n_{.j})$, resp. (n_{ij}/m)).

(5) Mostellerovy "smooth values" : Pokusíme se nalézt dva vektory kladných čísel $x=(x_1,\ldots,x_R)$ a $y=(y_1,\ldots,y_C)$ tak, aby v matici $S=(s_{ij})=(x_i y_j\ n_{ij})$ platilo

$$s_{1.} = \ldots = s_{R.} \quad a \quad s_{.1} = \ldots = s_{.C} .$$

(6) Matice rozdílů pozorovaných a očekávaných četností $(n_{ij}-e_{ij})$

(7) Matice adjustovaných odchylek $(n_{ij}-e_{ij}) / \sqrt{(e_{ij})}$

(8) Matice standardizovaných adjustovaných odchylek (Habermanovy odchylky) : $(n_{ij}\ m - n_{i.}n_{.j})\sqrt{(m)}/\sqrt{(n_{i.}(m-n_{i.})n_{.j}(m-n_{.j}))}$

(9) Matice nejvýznamější logaritmické interakce: interakční matice (a_{ij}), pro niž statistika WSQ nabývá svého maxima.

1.4. KOLAPSOVÁNÍ KONTINGENČNÍCH TABULEK

Kolapsováním RxC kontingenční tabulky rozumíme vytvoření nové tabulky rxc (kde $r \leq R$ a $c \leq C$), která vznikne vektorovým sečtením některých řádků nebo sloupců. Kolapsování tedy znamená sloučení některých kategorií sledovaných znaků:
R kategorií prvního znaku je sloučeno do r kategorií,
C kategorií druhého znaku do c kategorií.

Proč se kontingenční tabulky kolapsují?

(a) Pokud byly kategorie navrženy příliš podrobně, resp. jsou ve výběrovém vzorku zastoupeny velmi nerovnoměrně, pak některé z očekávaných četností e_{ij} mohou být "malé" (hranice "malosti" bývá nejčastěji udávána 5,3 nebo 1), v kterémžto případě se test nezávislosti pomocí CHISQ příliš nedoporučuje.

(b) I při dostatečných očekávaných četnostech e_{ij} může být neúčelně jemná kategorizace na závadu; zpravidla ztrácíme na síle testu nezávislosti.

(c) I v případě, že test nezávislosti mezi příliš jemně kategorizovanými znaky významně zamítl nulovou hypotézu, stále ještě můžeme tratit, RxC matice popsané v předchozím odstavci jsou příliš rozsáhlé ergo nepřehledné.

Všechny lepší statistické programové systémy (BMDP, SPSS aj.) proto obsahují prostředky pro snadné kolapsování kontingenčních tabulek.

Systém BMDP navíc umožňuje automatické kolapsování v případě ordinálních znaků: Uživatel zadá požadované MINIMUM očekávaných četností. V tabulce je nalezena nejmenší očekávaná četnost e_{ij} a buď i-tý řádek nebo j-tý sloupec je zkoušapsován s jedním řádkem (sloupcem) sousedním. Z nejvýše čtyř možných kandidátů je vybrán řádek (sloupec) s nejmenší marginální četností. Postup se iteruje, až je získána kolapsovaná tabulka s očekávanými četnostmi rovnými nebo většími zadanému číslu MINIMUM.

Spotřebitelem navržené kolapsování není však jedinou obranou proti nepřehlednosti RxC matice hodnot; je možno pokusit se representovat strukturu závislosti v kontingenční tabulce úspornějším způsobem. Zde je k dispozici řada postupů, viz [3], [5], [7] a [11]. V poslední kapitole popíšeme proceduru využívající k interpretaci struktury souvislosti automatického, "numericky optimálního", kolapsování dvourozměrné tabulky.

2. VÝBĚROVÉ VLASTNOSTI MĚR V DVOUROZMĚRNÝCH KONTINGENČNÍCH TABULKÁCH

Pro vývoj procedur, užívajících opakované míry (a statistiky) pro dvourozměrné kontingenční tabulky, se ukázala vhodnou dobrá znalost chování těchto měr na úrovni výběrových souborů.

V této kapitole uvádíme některé výsledky tohoto typu, které by mohly být obecněji zajímavé.

2.1. ASOCIATIVNOST MĚR V 2x2 TABULKÁCH

Def. Prostorem čtyřpolních tabulek nazveme množinu

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; a,b,c,d \text{ celá nezáporná} \right\}$$

Def. Relace ("je asociativně lepší") na prostoru čtyřpolních tabulek je definována vztahem:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ právě když $A \geq a$, $B \leq b$, $C \leq c$, $D \geq d$.

Def. Míra pro čtyřpolní tabulky je zobrazení z prostoru čtyřpolních tabulek do množiny reálných čísel, rozšířené o prvky $+/- \infty$.

Příklad : Mírami pro čtyřpolní tabulku jsou např. CHI, YATES, FISHER, YULE atd., ale též např. výsledek testu "CHI=1.69?", jehož hodnotou je *1* pokud byla přijata alternativní hypotéza (tj. pokud bylo pro danou tabulku CHI = 1.69) a 0 v případě opačném.

Def. Míra M je asociativní právě když je neklesající vzhledem k uspořádání $\succcurlyeq$.

Asociativnost je dosti přirozeným požadavkem na míry resp.testy v 2x2 tabulce, chceme, abychom pro "lepší" tabulku dostali "lepší" výsledek : Míra M je asociativní právě když $A \geq a$, $D \geq d$ ("více pozorování v políčkách hlavní diagonály") a $B \leq b$, $C \leq c$ ("méně v políčkách vedlejší diagonály") implikuje $M(A,B,C,D) \geq M(a,b,c,d)$.

Tvrzení: Míry CHI, PSI, INTERACTION, LOGINT, YULE a (1-FISHER) jsou asociativní.

Test nezávislosti proti kladné souvislosti, založený na CHI i test Fisherův jsou asociativní pro každou hladinu významnosti.

Důkazy : viz [8] , str.163.

Tvrzení: Míra W n e n í asociativní.
Test nezávislosti proti kladné souvislosti založený na W je asociativní pro hladiny významnosoti $\alpha = 0.05$.

Důkazy : viz [13] , resp. [8] str.358.

Poznamenejme, že pojem asociativnosti, navržený a poprvé zkoumaný Petrem Hájkem, hraje důležitou roli v metodách mechanizované formace hypotéz. V rámci této teorie byly navrženy metody analýzy "mnohorozměrných" kontingenčních tabulek

pomocí vyšetřování hodnot jisté míry v mnoha odvozených 2x2 tabulkách (srovnej "asociační resp. "implikační" GUHA proceduru" v [8]). Touto mírou v 2x2 tabulce může být právě jakákoli asociativní míra.

2.2. POZNÁMKA O MAXIMÁLNÍCH HODNOTÁCH MĚR V 2x2 TABULKÁCH

Tvrzení předešlého odstavce o asociativnosti měr CHI, PSI, INTERACTION, LOGINT a YULE, tedy o jejich monotonii vůči uspořádání prostoru čtyřpolních tabulek $\succcurlyeq$, doplníme nyní informací o jejích maximálních nabývaných hodnotách.

Tvrzení : INTERACTION nabývá své maximální možné hodnoty $(+\infty)$ pro tabulky (T2) právě když $a.d > 0$ a $b.c = 0$. Totéž platí i pro monotonní transformace LOGINT $(+\infty)$ a YULE $(+1)$.

Tvrzení : Míra PSI nabývá své maximální možné hodnoty +1 právě když $a.d > 0$ a $b=c=0$.

Mějme dva dvouhodnotové znaky, oba nekonstantní ve výběrovém souboru. Míra INTERACTION (LOGINT, YULE) nabývá své maximální možné hodnoty v případě, že ve výběrovém souboru jeden znak logicky implikuje druhý nebo naopak. Míra PSI (resp. CHI při fixovaném součtu $n=a+b+c+d$) pak nabývá své maximální možné hodnoty právě když znaky jsou ve výběrovém souboru logicky ekvivalentní.

2.3. SROVNÁNÍ MĚR A SÍLY TESTU

V tomto odstavci srovnáme hodnoty některých měr a síly některých testů. Pro zkoumané míry uvedeme několik nerovností platících deterministicky, tj. v každém výběrovém souboru. Pokud tyto míry budou statistikami, užívanými v testech se stejnými kritickými obory $\langle K, +\infty)$, získáme tím tvrzení o síle těchto testů.

Tvrzení : Pro každou 2x2 tabulku platí následující nerovnosti:

$$|PSI| \leq |YULE|$$

$$YATES \leq CHI$$

$$W \leq CHI$$

a rovnost mezi PSI a YULE nastává jen když $PSI = 0$ nebo $|PSI| = 1$, rovnost mezi W a CHI jen když $CHI = 0$.

Důkaz : viz [14] .

Tvrzení : Pro každou RxC tabulku kladných četností platí

$$WSO \leq CHISQ$$

Důkaz : v rukopise.

Nerovnost posledních tvrzení může "pokažena" jen nahrazením některé nulové četnosti n_{ij} hodnotou 0.5 pro WSQ statistiku. Nerovnost $W \leq CHI$ však platí vždy, viz definici W v odstavci 1.2. Pro RxC tabulky s nulovými resp. malými četnostmi někteří autoři doporučují přičítat malé číslo (0.5) ke každé pozorované četnosti; v tom případě by platila nerovnost $WSQ \leq CHISQ$ bez výjimky.

Z uvedených nerovností plyne:

Důsledek: Test nezávislosti v 2x2 tabulce založený na Pearsonově statistice CHI je stejnoměrně silnější než test založený na logaritmické interakci.

Obdobně pro Pearsonův a Yatesův test v 2x2 tabulce a - s uvedenými výhradami - pro Pearsonův a interakční test v RxC tabulce.

Znalost obdobných vztahů má význam nejen pro interpretaci výsledků výpočtů v konkrétních datech, ale i pro konstrukci efektivních procedur : Chceme např. zjišťovat, zamítá-li test založený na interakční statistice WSQ hypotézu o nezávislosti ("$WSQ \geq CRIT$? "). Výpočetní čas můžeme uspořit, zjistíme-li nejdříve, zda $CHISQ \geq CRIT$; pokud ne, pak časově náročnější výpočet WSQ vůbec neprovádíme.

2.4. CHOVÁNÍ PEARSONOVY STATISTIKY VZHLEDEM KE KOLAPSOVÁNÍ KONTINGENČNÍ TABULKY

Tvrzení: Buď S_1 hodnota statistiky CHISQ v tabulce RxC, S_2 hodnota statistiky CHISQ v tabulce (R-1)xC, která vznikla z předchozí kolapsováním dvou řádků.

Pak $S_1 \geq S_2$ a rovnost nastává právě když jsou oba kolapsované řádky shodné až na multiplikativní konstantu.

Důsledek: Buď S_1 hodnota statistiky CHISQ v tabulce RxC, S_2 hodnota CHISQ v tabulce rxc (kde $2 \leq r \leq R$, $2 \leq c \leq C$), která vznikla z předchozí kolapsováním. Pak $S_1 \geq S_2$.

Počet stupňů volnosti v kolapsované tabulce je ovšem nižší než v původní, ze srovnání statistik CHISQ proto neplyne nic o síle testů. Nejvyšší dosažená hladina významnosti se může kolapsováním snížit i zvýšit.

Uvažujme nyní RxC tabulku T, ve které je CHISQ ≠ 0, a množinu X všech 2x2 tabulek kolapsovaných z tabulky T. Těchto tabulek je $(2^R-2)(2^C-2)$. V dalším si všimneme vlastností 2x2 kolapsované tabulky s maximální nabývanou hodnotou CHISQ. Nechť t je dále některá tabulka z množiny X, ve které míra PSI (a tudíž i CHISQ) nabývá maximální hodnoty, maximum je uvažováno přes množinu X.

Tvrzení: Nechť v RxC tabulce T je prvních V řádků shodných až na multiplikativní konstantu (tj. jde o týž vektor násobený obecně různými skaláry), obdobně prvních W sloupců. Nechť CHISQ ≠ 0 . Nechť t je kolapsovaná 2x2 tabulka s maximální hodnotou CHISQ. Potom řádky 1,...,V tabulky T byly kolapsovány do téže řádky tabulky t a obdobně sloupce 1,...,W tabulky T byly kolapsovány do téhož sloupce tabulky t.

Shrňme si některé důsledky, které vyplývají z již uvedených tvrzení pro "PSI-optimální" kolapsovanou 2x2 tabulku t :

(a) Pro libovolnou tabulku $\mathcal{T} \in X$ platí : t je asociativně lepší než $\mathcal{T}$ nebo t je s $\mathcal{T}$ nesrovnatelná. (srv.odstavec 2.1).

(b) Lze-li RxC tabulku T permutacemi řádků a permutacemi sloupců převést na tvar blokově diagonální matice, pak t má v obou políčkách vedlejší diagonály nuly. (srv.odstavec 2.2.)

(c) Shodné - případně až na multiplikativní konstantu shodné řádky jsou "kolapsovány společně", obdobně pro sloupce. (srv.poslední tvrzení.)

3. PROCEDURA COLLAPS

3.1. OBECNÁ FORMULACE ÚLOHY

Je dána RxC tabulka (T1) a parametry r,c,N,CRIT, MEASURE; $2 \leq r \leq R$, $2 \leq c \leq C$, $N \geq 1$ přirozená, CRIT ≥ 0 reálné, MEASURE je míra na rxc tabulkách.

Představme si, že všechny možné rxc tabulky (kolapsované z tabulky (T1)) byly uspořádány do posloupnosti podle klesající hodnoty MEASURE. Z této posloupnosti uvažujme pouze prvních N tabulek a z nich pak pouze ty s hodnotou MEASURE větší nebo rovnou CRIT.

Uvažované kolapsované tabulky považujeme za řešení úlohy optimálního kolapsování.

První tabulka v tomto seznamu je rxc kolapsovanou tabulkou s největší hodnotou MEASURE. Při rozumné volbě MEASURE (např. CHISQ) bude v této tabulce - přes zjednodušení původní RxC tabulky - zachováno v jistém smyslu co nejvíce informace o vzájemné závislosti znaků. (Srv. odstavec 2.4.) Následující tabulky seznamu pak nabízejí různé alternativní pohledy.

3.2. NEHIERARCHICKÁ PROCEDURA

Úlohu formulovanou v předchozím odstavci pro dvourozměrné tabulky by bylo možné snadno formulovat i pro tabulky vícerozměrné, my se však dále budeme věnovat naopak její algoritmizované a implementované restrikci.

Restrikce spočívá v položení MEASURE=PSI a r=c=2. Pro danou RxC tabulku procedura tady nalezne nejvýše N kolapsovaných 2x2 tabulek optimálních ve smyslu míry PSI.

Příklad. Zkoumejme z literatury známou tabulku (Snee) popisující vztah mezi barvou očí řádky a barvou vlasů sloupce v severoamerické populaci :

	A- ČERNÝ	B- BRUNET	C- ZRZAVÝ	D- BLONDÝN
1 HNĚDÉ	68	119	26	7
2 ŠEDÉ	15	54	14	10
3 ZELENÉ	5	29	14	16
4 MODRÉ	20	84	17	94

Hodnota statistiky CHISQ je 138.2, tedy významná při devíti stupních volnosti. Nehierarchická procedura COLLAPS zde nabízí následující tři kolapsované tabulky, "nejlepší" z 256 možných :

	D	A,B,C
3,4	110	169
1,2	17	296

PSI = 0.413

	D	A,B,C
4	94	121
1,2,3	33	296

PSI = 0.410

	D	A,B,C
2,3,4	120	252
1	7	213

PSI = 0.342

Hodnota PSI dvou prvních tabulek je přibližně stejná: obě tabulky vypovídají o souvislosti blond vlasů se světlejšími barvami očí.

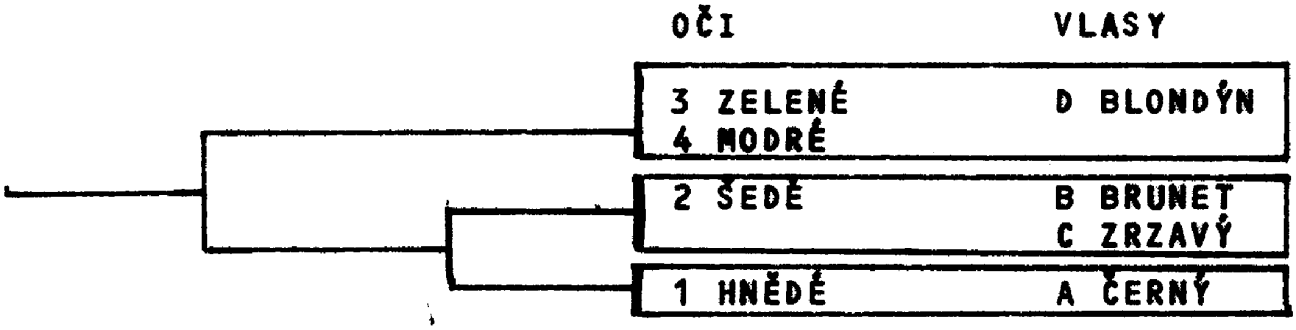
3.3. HIERARCHICKÁ PROCEDURA

První kolapsovaná 2x2 tabulka z řešení uvedeného příkladu hovoří o souvislosti kategorií 3 a 4 s kategorií D na straně jedné a o souvislosti kategorií 1 a 2 s kategoriemi A,B,C na straně druhé. Tázajíce se po podrobnějším popisu souvislosti kategorií 1,2 s kategoriemi A,B,C můžeme provést "rekursivní krok" : vytvořit podtabulku 2x3 s řádky 1,2 a sloupci A,B,C a znovu užít nehierarchickou proceduru COLLAPS. Nejlepší kolapsovanou 2x2 tabulkou je

	B,C	A
2	68	15
1	145	68

PSI = 0.139

Hierarchická procedura spočívá v rakursivním užití popsané procedury nehierarchické : Podle nejlepší kolapsované tabulky, nalezené v právě zkoumané tabulce podtabulce vytvoříme dvě nové podtabulky pro další zkoumání : První podtabulku vytvoříme z kategorií, které přispěly k levému hornímu políčku kolapsované tabulky, druhou podtabulku z kategorií které přispěly k pravému dolnímu políčku. Pokud se v právě vyšetřované podtabulce nenalezla žádná kolapsovaná tabulka s hodnotou PSI = CRIT, podtabulky se nevytvoří. Podtabulky "degenerované" (1xc nebo rx1) se dále nezkoumají. Výsledkem hierarchické procedury je korespondence mezi hierarchickými rozklady množin hodnot $\check{R} = \{1,\ldots,R\}$ a $\check{C} = \{1,\ldots,C\}$. Tato korespondence je určena nejlepšími kolapsovanými tabulkami nalezenými pro vyšetřované podtabulky. Lze ji graficky vyjádřit buď dendrogramem:



nebo schematem blokového rozkladu tabulky :

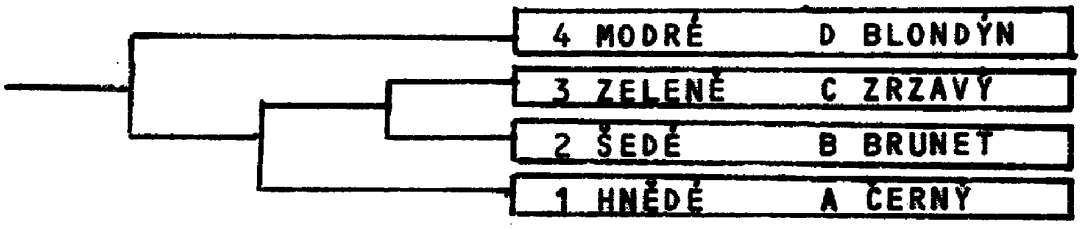
	D	B	C	A
3	2.28	-1.91	6.33	-6.67
4	47.88	-19.86	-8.78	-19.22
2	-9.95	9.08	2.85	-1.96
1	-40.19	12.72	-0.38	27.87

ve kterém můžeme sledovat kladnou souvislost v blocích ve směru hlavní diagonály. Políčka rozkladu mohou být vyplněna buď pozorovanými četnostmi nebo hodnotami některé jiné RxC matice popsané v odstavci 1.3, zde byly užity rozdíly pozorovaných a očekávaných četností $(n_{ij} - e_{ij})$.

3.4. PROCEDURA S ORÁKULEM

je hierarchickou procedurou, kde uživatel v každém kroku volí z nabídnutých N kolapsovaných tabulek jednu subjektivně nejvhodnější ("orakulum") pro generování podtabulek v dalších krocích. Srv. [15].

V prvním kroku analýzy Sneeovy tabulky byla zvolena druhá kolapsovaná tabulka, celkový rozklad pak byl :



3.5. KONZISTENCE ROZKLADU

Analyzovaná kontingenční tabulka (n_{ij}) vznikla výběrem z dvourozměrného multinomiálního rozdělení s hustotou danou maticí pravděpodobností (p_{ij}). Na tuto matici můžeme aplikovat popsanou hierarchickou proceduru, otázkou je, zda se optimální kolapsování v teoretické a výběrové struktuře budou shodovat. Obecně se dá ukázat, že pro danou matici pravděpodobností (p_{ij}) a dané $\varepsilon > 0$ existuje m_0 takové, že pro výběry rozsahu alespoň m_0 je optimální kolapsování ve výběrové struktuře také optimálním kolapsováním ve struktuře teoretické (resp. jedním z optimálních kolapsování ve struktuře teoretické) s pravděpodobností alespoň $1-\varepsilon$.

Zajímavý i užitečný by byl algoritmus, který by se znalostí tabulky pozorovaných četností (n_{ij}) (a neznalostí teoretických četností (p_{ij})) určil "hloubku", do níž máme rozklad v jednotlivých "větvích" provádět tak, aby optimalita takto restrikovaného rozkladu v teoretické struktuře byla zaručena s danou pravděpodobností. Jinými slovy, jde o návrh vhodného zastavovacího pravidla. Návrh nepříliš konzervativního pravidla s popsanou vlastností je otevřeným a patrně netriviální úlohou.

Řadu kroků v tomto směru učinil T.Havránek. Stručně o dvou z nich:

(a) Pro každou generovanou podtabulku se můžeme ptát, zda v ní je evidence závislosti, kterou bychom se pak snažili procedurou COLLAPS vysvětlit. K tomu lze užít běžného testu nezávislosti v dvourozměrné kontingenční tabulce. Takových testů však během hierarchického postupu provedeme více, proto je vhodné užít postupů simultánní inference. Užitečné je zde Holmovo zlepšení Bonferoniovského postupu (podrobněji viz [9]).

(b) K usnadnění posuzování optimality rozkladu sestrojil Havránek následující test : Zvolme pro dvourozměrnou kontingenční tabulku dvě její kolapsování na 2x2 tabulky; míra PSI v těchto tabulkách nabývá hodnot ψ_1 a ψ_2. Označme Ψ_1 a Ψ_2 příslušné hodnoty PSI v teoretické struktuře, tj. hodnoty PSI v 2x2 tabulkách kolapsovaných z tabulky teoretických četností (p_{ij}). Postupem popsaným v [9], testujeme hypotézu $\Psi_1 = \Psi_2$ proti alternativě $\Psi_1 > \Psi_2$.

Příklad : Srovnáme-li popsaným testem tři tabulky z příkladu 3.2, zjistíme významný rozdíl na hladině 0.05 mezi první a třetí tabulkou a obdobně mezi druhou a třetí tabulkou. Rozdíl mezi první a druhou tabulkou významný není.

3.6. IMPLEMENTACE PROCEDURY

Procedura COLLAPS je jednou z metod mechanizované formace hypotéz srv. [8] a je implementována v programovém systému GUHA. Program COLLAPS je napsán v jazyce PL/1 (s překladačem F). Program COLLAPS - i celý programový systém GUHA - lze implementovat na počítačích řady IBM/370 a počítačích kompatibilních, např. EC 1040 nebo EC 1033.

Program COLLAPS (viz uživatelskou dokumentaci [16]) umožňuje užití popsané nehierarchické i hierarchické procedury (srv.odst. 3.2 a 3.3) založené na míře CHI. Proceduru s orákulem (srv. 3.4) lze simulovat v několika běžích dávkového zpracování. Připravovaná je implementace měr PSI, YATES, W a složitějších zastavovacích pravidel (srv.3.5 (a),(b)).

Implementovaný algoritmus pro hledání optimálních kolapsovaných tabulek nezkoumá slepě všechny možnosti (jak činí tzv. "Algoritmy Britského Muzea"), ale využívá řady triků heuristického charakteru, umožňujících urychlení výpočtu.

Procedura COLLAPS byla s prospěchem užita při analýze fysiologických, lékařských a sociologických dat. Zrychlující techniky se ukázaly dostatečně účinnými; k řešení tabulek běžných rozměrů (cca 10x10) stačily zlomky minuty na IBM 370/135.

Literatura

[1] J.Anděl: On interactions in contingency tables. Aplikace matematiky 18(1973), 99-109.

[2] J.Anděl: The most significance interaction in a contingency table. Aplikace matematiky 19(1974), 246-252.

[3] M.B.Brown: The identification of sources of significance in two-way contingency table. Applied Statistics 23 (1974), 405-413.

[4] W.J.Dixon, M.B.Brown (Eds.): BMDP-79 Biomedical Computer Programs. University of California Press 1979.

[5] K.R.Gabriel: Simultaneous test procedures for multiple comparisons on categorical data. J.Amer.Statist. Assoc. 61(1966), 1081-1096.

[6] L.A.Goodman, W.H.Kruskal: Measures of association for cross-classification. J.Amer.Statist.Assoc49(1954), 732-764.

[7] S.J.Haberman: The analysis of residuals in cross-classified tables. Biometrics 29(1973), 205-220.

[8] P.Hájek, T.Havránek: Machanizing hypothesis formation. Mathematical foundation for a general theory. Springer Verlag(1978).

[9] T.Havránek: Some comments on the GUHA procedures. MSBÚ ČSAV, Praha(1980).

[10] T.Havránek, D.Pokorný: GUHA-state processing of mixed data. Internat.J.Man-Machine Studies 9(1977),439-447.

[11] J.Lancaster: Contingency tables treated by partition χ^2. J.Royal Statist.Soc.,Ser.B 5(1971), 242-259.

[12] F.Mosteller: Association and estimation of contingency tables. J.Amer.Statist.Assoc.63(1968), 1-28.

[13] D.Pokorný: Nominální kalkuly a zobecněné asociační kvantifikátory. Dipl.práce MFF UK, Praha(1975).

[14] D.Pokorný: Non-asymptotical relations between chi-square and interaction tests. Sdělení MSBÚ 12(4). MSBÚ ČSAV, Praha 1976.

[15] D.Pokorný: The GUHA method and desk calculators. Intern.J. Man-Machine Studies 10(1978), 75-86.

[16] D.Pokorný: COLLAPS. Uživatelský manuál. MSBÚ Praha (1979).

[17] D.Pokorný: Knowledge acquisition by the GUHA method. Intern. J.Policy Analysis and Information Systems 4(1980), 379-399.

[18] D.Pokorný, T.Havránek: On some procedures identifying sources of dependence in contingency tables. COMPSTAT 78, L.C.A.Corsten, J.Herman(Eds.),pp.221-227. Physica-Verlag, Wien (1978).