M - odhady a SA - odhady v lineárním regresním modelu

J. Novovičová

1. Úvod

Vznik a intenzivní rozvoj teorie robustních statistických odhadů je podmíněn růstem praktického využívání statistických metod v různých oblastech. Zkušenosti s praktickým používáním klasických optimálních metod odhadování ukazují, že tyto metody jsou vesměs citlivé na nesplnění podmínek jejich optimality, čímž se snižuje jejich efficience.

Úlohou teorie robustnosti je vypracování takových statistických postupů, které

(i) mají jen o málo nižší efficienci než klasické optimální metody při přesném splnění podmínek jejich optimality,

(ii) na rozdíl od klasických optimálních metod zůstávají vysoce efficientní při porušení těchto podmínek.

Termín robustnost v uvedeném smyslu byl zaveden Boxem. Přesněji je pojem robustnost definován v práci Hampela [3].

Jaké jsou argumenty ve prospěch robustnosti?

(i) Skutečnost, že nikdy přesně neznáme správné rozdělení pravděpodobnosti.

(ii) Kriteriální funkce některých klasických odhadů jsou velmi nestabilní při malých odchylkách od předpokládaného rozdělení.

(iii) Nepřesnosti struktury modelu (například jestliže předpokládaný lineární vztah není ve skutečnosti lineární).

Samozřejmě, že také některé jiné předpoklady mohou být porušeny, například předpoklad nezávislosti chyb pozorování atd.

Podle toho, vůči jakým předpokladům je metoda stabilní, mluvíme například o robustnosti vzhledem k rozdělení ("distributional robustness) nebo o robustnosti vzhledem k modelu ("model robustness" nebo "robustness of design").

V teorii regrese je kladen důraz na metody, které jsou méně citlivé vůči nesprávným předpokladům o tvaru základního rozdělení a vůči vlivu odlehlých pozorování. Jeden z možných přístupů ke konstrukci robustních odhadů regresních koeficientů navrhl Huber [4]. Uvažoval odhad typu maximální věrohodnosti (M-odhad) a přistupoval k problému robustnosti z hlediska minimaxového řešení, to je uvažoval odhad, který minimalizuje maximum asymptotického rozptylu v dané třídě distribučních funkcí. M-odhady vyžadují řešení nelineárních rovnic, které je obtížnější čím je počet pozorování větší. Další dvě třídy odhadů jsou L-odhady (založené na lineárních kombinacích pořadových statistik) navržené Bickelem [2] a R-odhady (odvozené z pořádkových testů), které uvažovali Adichie [1], Jaeckel [7], Jurečková [8], Koul [10]. Tyto odhady vyžadují operace uspořádání a tudíž nejsou z výpočetního hlediska atraktivní pro výběry o velkém rozsahu. M-, L-, a R-odhady nejsou vhodné pro odhadování v reálném čase nebo časově spojitých situacích a v teorii řízení.

V této práci je vedle M-odhadů uvažován další typ odhadů a to rekursivní odhad typu stochastických aproximací, tzv. SA-odhad, který má výpočetní přednosti před M-, L-, a R-odhady.

2. Formulace problému

Uvažujme obecný lineární regresní model

(2.1) $$\mathbf{y}_n = \mathbf{X}_n \theta^\circ + \mathbf{u}_n , \qquad n = 1, 2, \dots$$

kde

A1. $\mathbf{y}_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ je vektor nezávislých pozorování takový, že y_i, $i = 1, 2, \dots, n$ má distribuční funkci

(2.2) $$F(y - \mathbf{x}_i^T \theta^\circ) , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Předpokládejme, že $f(z) = \dfrac{dF(z)}{dz}$ existuje, je absolutně spojitá a má konečnou Fisherovu informaci, to je

(2.3) $$I(F) = \int \frac{f'(z)}{f(z)} f(z)\, dz < \infty$$

A2. $\theta^\circ = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T \in R^p$ je neznámý vektor regresních koeficientů.

A3. $\mathbf{X}_n = [x_{ij}]_{i = 1, 2, \dots, n}^{j = 1, 2, \dots, p}$ je daná n x p - matice plánu s řádky $\mathbf{x}_i^T$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Předpokládejme, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \Sigma = \Sigma$$ existuje a Σ je positivně

definitní matice, kde

(2.4) $$\Sigma_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

A4. $\mathbf{u}_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n$, u_i, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné chyby pozorování jejichž distribuční funkce F je symetrická vzhledem k nule $(F(z) = 1 - F(-z))$.

Cílem je odhadnout θ° na základě známé matice $\mathbf{X}_n$ a vektoru pozorování $\mathbf{y}_n$, jestliže není přesně znám tvar distribuční funkce F .

Obvykle odhadujeme neznámý vektor θ^{0} metodou nejmenších čtverců (LS) tj. za odhad bereme tu hodnotu θ , která minimalozuje součet čtverců

(2.5) $$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^T \theta)^2$$

neboli vektor θ , který je řešením soustavy p - rovnic

(2.6) $$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^T \theta) \cdot x_i = 0$$

Odhad $\hat{\theta}^{LS}$ je lineární, nestranný a má minimální rozptyl mezi všemi lineárními nestrannými odhady. Jestliže F je normální, potom je odhad efficientní. Je známo, že metoda LS je citlivá vůči odchylkám od normálního rozdělení a vůči hrubým chybám v měřeních. Proto vznikla potřeba hledat metody, které by byly méně citlivé vůči nesprávným předpokladům týkajícím se tvaru základního rozdělení chyb a vůči odlehlým pozorováním.

Existují různé přístupy ke konstrukci robustních odhadů vektoru regresních koeficientů. Přístup, který budeme uvažovat, je založen na koncepci minimaxu navrženém Huberem [4] pro odhadování jednoduchého parametru polohy $(x_{ij} = 1, p = 1$ v (2.1)).

3. Minimaxový přístup k robustnímu odhadování vektoru parametrů

V tomto přístupu se předpokládá, že informace o distribuční funkci rozdělení chyb pozorování, která je k dispozici, dává částečnou představu o této distribuční funkci a je využita k určení konvexní množiny $\mathcal{F}$ symetrických distribučních funkcí, která obsahuje F . Odhad $\hat{\theta}$ je definován posloupností $\{\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(y_1, y_2, \dots y_n), n = 1, 2, \dots\}$ estimátorů určených na základě n pozorování.

Jestliže $F \in \mathcal{F}$ a $\{\hat{\theta}_n\}$ je posloupnost vektorových funkcí $\hat{\theta}_n(y_1, y_2, \dots y_n) : R^n \to R^p$ pro které platí, že

(i) $\hat{\theta}_n \to \theta^\circ$ skoro jistě nebo podle pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

(ii) $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta^\circ)$ má asymptoticky p - normální rozdělení, když u_i má distribuční funkce F, s nulovým středem a asymptotickou kovarianční maticí $\mathbb{K}(\hat{\theta}, F)$, pak hledáme řešení pro následující problém P.

P : Najít dvojici $[\hat{\theta}_0, F_0]$, $F_0 \in \mathcal{F}$, $\hat{\theta}_0 \in \mathcal{T}$ tak, aby

(3.1) $\quad \mathbb{K}(\hat{\theta}_0, F) \leq \mathbb{K}(\hat{\theta}_0, F_0) \leq \mathbb{K}(\hat{\theta}, F_0)$

pro všechna $F \in \mathcal{F}$ a pro všechna $\hat{\theta} \in \mathcal{T}$, kde $\mathcal{T}$ je třída všech regulárních odhadů.

Poznámka 1. Jestliže platí (ii) budeme říkat, že odhad $\hat{\theta}_0$ je asymptoticky normální v F s asymptotickou kovarianční maticí $K(\hat{\theta}_0, F)$.

Jestliže za odhad neznámého vektoru θ° vezmeme $\hat{\theta}_0$ pak asymptotická kovarianční matice odhadu $\hat{\theta}_n$ nebude větší než $\mathbb{K}(\hat{\theta}_0, F_0)$ bez ohledu na rozdělení F ze třídy $\mathcal{F}$.

Definice 3.1. Nechť $\mathcal{F}$ je třída rozdělení, $\mathcal{T}$ je třída odhadů a $K(\hat{\theta}, F)$ je asymptotická kovarianční matice odhadu $\hat{\theta}$, $\hat{\theta} \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$.

Řekneme, že

$\hat{\theta}_0$ je minimaxový robustní odhad a

F_0 je nejméně příznivé rozdělení třídy $\mathcal{F}$, když pro $\hat{\theta}_0$ a F_0 platí (3.1).

Minimaxový robustní odhad $\hat{\theta}_0$ minimalizuje asymptotickou kovarianční matici maximalizovanou ve třídě rozdělení $\mathcal{F}$.

Jestliže informace o rozdělení chyb je poměrně úplná, pak příslušná třída rozdělení použitá jako model neurčitosti bude úzká a minimaxový odhad bude blízký optimálnímu pro každou individuální distribuční funkci ve třídě $\mathcal{F}$. Je-li informace chudá, $\mathcal{F}$ bude široká a minimaxový odhad se bude pro některé distribuční funkce ve třídě $\mathcal{F}$ značně lišit od efficientního.

Poznámka 2. Huber se dívá na robustnost jako na druh pojišťovacího problému: Jsem ochoten zaplatit (ztrátu efficience 5 - 10 % proti ideálnímu modelu), abych se pojistil proti špatným efektům způsobeným hrubými odchylkami od ideálního modelu.

Ukážeme, že problém P má řešení ve tvaru M-odhadů a SA-odhadů.

4. M - odhady v lineárním regresním modelu

Nechť $\mathcal{F}$ je třída symetrických rozdělení a $\rho(z)$ je reálná nekonstantní funkce, $z \in R^1$ s derivací $\rho' = \psi$.

Definice 4.1. Odhad $\hat{\theta}^M$ vektoru θ^0 určený vztahem

$$\hat{\theta}^M = \arg\min_{\theta \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i - x_i^T \theta) \tag{4.1}$$

neboli řešením systému p- rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i - x_i^T \theta) x_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \tag{4.2}$$

vzhledem k θ nazveme odhadem typu maximální věrohodnosti neboli M-odhadem generovaným funkcí ψ .

Metoda odhadu (4.2) se formálně shoduje s metodou maximální věrohodnosti, když $\varrho(z) = -\log f(z)$.

Asymptotické vlastnosti M-odhadů regresních koeficientů při pevném p vyšetřovali například Jurečková [9]. Huber [5] vyšetřoval asymptotické vlastnosti M-odhadů za předpokladu, že s rostoucím n roste i rozměr p vektoru parametrů regrese.

Předpoklady A1 - A4 řešeného problému rozšíříme o předpoklady týkající se funkce ψ , které ovšem nejsou jediné možné.

A5. Nechť $\psi(z)$ je lichá $(\psi(z) = -\psi(-z))$ a spojitá funkce až na konečný počet bodů; předpokládejme, že

$$E_F \psi^2 = \int_{R^1} \psi^2(z) f(z)\, dz < \infty \tag{4.3}$$

$$E_F \psi = \int_{R^1} \psi(z) f(z)\, dz = 0 \tag{4.4}$$

A6. $\psi(z)$ je neklesající o omezená.

A7. Funkce

$$m(\alpha) = -\int_{R^1} \psi(z-\alpha) f(z)\, dz \tag{4.5}$$

je diferencovatelná v nule a $0 < m'(0) < \infty$.

Za podmínek A1 - A7 kladených na distribuční funkci F , na generující funkci ψ a matici $\mathbb{X}_n$ je M-odhad $\hat{\theta}^M$ konsistentní a $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta} - \theta^0)$, je asymptoticky p- normální s nulovým středem a kovarianční maticí

$$\mathbb{K}(\hat{\theta}^M, F) = \Sigma^{-1} \frac{E_F \psi^2}{[m'(0)]^2} \tag{4.6}$$

Nechť $\mathcal{F}$ je konvexní třída symetrických rozdělení a nechť existuje $F_0 \in \mathcal{F}$ pro kterou je $I(F)$ minimální ve třídě $\mathcal{F}$, tj.

(4.7) $$F_0 = \arg\min_{F \in \mathcal{F}} I(F)$$

Dále nechť

(4.8) $$\psi_0 = (-\log f_0)' = -\frac{f_0'}{f_0}$$

a $\hat{\theta}_0^M$ je řešením soustavy p - rovnic

(4.9) $$\sum_{i=1}^{n} \psi_0 (y_i - x_i^T \theta) x_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Pak dvojice $[\hat{\theta}_0^M, F_0]$ řeší problém P.

Odhad určený (4.9) je maximálně věrohodný odhad pro rozdělení s distribuční funkcí F_0. M-odhad řešící problém P je úplně určen, je-li známo F_0 ve třídě $\mathcal{F}$. Nejméně příznivé rozdělení třídy $\mathcal{F}$ je totožné s rozdělením minimalizujícím Fisherovu informaci ve třídě $\mathcal{F}$.

Pro každé $F \in \mathcal{F}$ položme

(4.10) $$E_F \psi_0^2 = \int_{R^1} \psi_0^2(z) f(z)\,dz$$

(4.11) $$E_{F_0} \psi_0^2 = \int_{R^1} \psi_0^2(z) f_0(z)\,dz$$

(4.12) $$m_F(\alpha) = -\int_{R^1} \psi_0(z-\alpha) f(z)\,dz$$

kde f_0 a ψ_0 jsou určeny vztahy (4.7) a (4.8). Pak pro každé $F \in \mathcal{F}$ platí pro asymptotickou kovarianční matici odhadu $\hat{\theta}_0^M$ určeného (4.9)

(4.13) $$\mathbb{K}(\hat{\theta}_0^M, F) = \Sigma^{-1} \frac{E_F \psi_0^2}{[m_F'(0)]^2}$$

M-odhady vyžadují řešení soustavy rovnic (4.9). V obecném případě nemůže být soustava rovnic vyřešena explicitně a je třeba použít iterační postupy, při kterých je nutné uchovávat v paměti všechna y_i a x_{ij} (i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,p), což působí potíže s rostoucím počtem pozorování a kromě toho je třeba při každé iteraci počítat inverzi matice $X_n^T X_n$ a proto M-odhady nejsou vhodné pro aplikace v reálném čase. O numerických procedurách řešení soustavy (4.9) pojednává Huber v [6], kde jsou rovněž odkazy na další literaturu týkající se této problematiky.

5. SA - odhady v lineárním regresním modelu

V této části ukážeme, že za určitých podmínek regularity existuje odhad založený na algoritmu stochastických aproximací (SA) Robbins-Monroova (RM) typu, který řeší problém P. Martin [11] první nalezl, že robustní odhad parametrů lze získat pomocí SA-algoritmu RM typu. Nalezl SA-řešení pro jednoduchý problém odhadu parametru polohy robustní ve třídě - kontaminovaných normálních rozdělení. Price a Vandelinde [12] zobecnili práci [11] v tom smyslu, že ukázali, jak nalézt SA-řešení pro problém odhadu parametru polohy pro obecnou třídu rozdělení. Rozšíříme SA-přístup na problém odhadu regresních koeficientů. SA-odhady mají významné výpočetní přednosti před M-, L-, a R-odhady. SA-odhady jsou dány jednoduchým rekursivním vztahem a nevyžadují explicitně použít minulá pozorování při výpočtu běžného odhadu a jsou tudíž vhodné pro aplikace v reálném čase. Avšak minimaxové M-odhady konvergují rychleji než příslušné SA-odhady.

Definice 5.1. Odhad $\hat{\theta}^{SA}$ vektoru θ° definovaný rekursivním vztahem

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \frac{\gamma}{n} \Sigma^{-1} x_n \psi(y_n - x_n^T \hat{\theta}_{n-1}) \tag{5.1}$$

$n = 1, 2, \dots$

kde $\gamma > 0$ a počáteční odhad je libovolný, nazveme SA-odhadem příslušným funkci ψ.

Základní výsledky jsou obsaženy v následujících větách, které uvedeme bez důkazu.

Věta 5.1 ("Konsistence $\hat{\theta}_n$"). Za předpokladů A1 - A7, $\hat{\theta}_n$ v proceduře (5.1) konverguje k θ^o skoro jistě s $n \to \infty$.

Věta 5.2 ("Asymptotická normalita"). Jsou-li splněny předpoklady A1 - A7 a $m'(0) \cdot \gamma > \frac{1}{2}$, pak $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_n - \theta^o)$ je asymptoticky p - normální s nulovým středem a asymptotickou kovarianční maticí

$$(5.2) \qquad \mathbb{K}(\hat{\theta}^{SA}, F) = \sum\nolimits^{-1} \frac{\gamma^2 E_F \psi^2}{2\gamma m'(0) - 1}$$

Použijeme-li vztahů (4.7), (4.8), (4.10) - (4.12) a zvolíme

$$(5.3) \qquad \gamma = [I(F_o)]^{-1}$$

pak odtud $\hat{\theta}_o^{SA}$ je generován vztahem

$$(5.4) \qquad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \frac{1}{n}[I(F_o)\textstyle\sum]^{-1} x_n \psi_o(Y_n - x_n^T \hat{\theta}_{n-1})$$

a má asymptotickou kovarianční matici

$$(5.5) \qquad K(\hat{\theta}_o^{SA}, F) = \sum\nolimits^{-1} \frac{E_F \psi_o^2}{E_{F_o} \psi_o^2 [2 m_F'(0) - E_{F_o} \psi_o^2]}$$

Následující věta udává podmínky, za kterých SA-odhad řeší problém P ve třídě $\mathcal{F}$.

Věta 5.3. Nechť $\mathcal{F}$ je konvexní třída symetrických rozdělení s konečnou Fisherovou informací a F_o minimalizuje $I(F)$ ve třídě $\mathcal{F}$. Jestliže pro každé $F \in \mathcal{F}$ platí

(i) $\hat{\theta}_o^{SA}$ je konsistentní a asymptoticky normální s kovarianční maticí danou (5.5) a

(ii) $m_F'(0) = -\int_{R^1} \psi_0(z) f'(z)\,dz$

pak dvojice $[\hat{\theta}_0^{SA}, F_0]$ řeší problém P ve třídě $\mathcal{F}$.

Věta 5.4. $\mathbb{K}(\hat{\theta}_0^M, F) \leq \mathbb{K}(\hat{\theta}_0^{SA}, F)$, $F \in \mathcal{F}$,

přičemž rovnost nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $m_F'(0) = E_{F_0} \psi_0^2$.

Tudíž obecně minimaxový M-odhad konverguje rychleji než odpovídající SA-odhad.

Jak použít algoritmus (5.4), když neznáme matici Σ a konstantu $m_F'(0)$ závisející na F.

Matici $(n \cdot \Sigma)^{-1}$ je možné aproximovat maticí $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T\right)^{-1}$ a počítat rekursivně a $m_F'(0)$ lze nahradit veličinou $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_0'(y_i - x_i^T \hat{\theta}_{i-1})$. Tyto aproximace nás přivedou k algoritmu

(5.7) $$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + P_n x_n \psi_0(\Delta_n), \quad \Delta_n = y_n - x_n \hat{\theta}_{n-1}$$

(5.8) $$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{n-1} - \frac{\mathbb{P}_{n-1} x_n x_n^T \mathbb{P}_{n-1}}{[\psi_0'(\Delta_n)]^{-1} + x_n^T \mathbb{P}_{n-1} x_n}$$

V případě, že $\psi_0'(\Delta_n) = 0$, položíme $\psi_0'(\Delta_n) = \frac{1}{\Delta_n} \psi_0(\Delta_n)$

6. Třídy rozdělení, příklady robustních odhadů

Příklady tříd $\mathcal{F}$ a řešení variačních úloh minimalizace $I(F)$ ve třídě $\mathcal{F}$ jsou uvedeny v [13]. Omezíme se na některé třídy rozdělení, které vyjadřují druhy apriorní informace, se kterými se lze setkat v praktických úlohách.

Huber [4], [5] uvažoval dvě třídy symetrických rozdělení

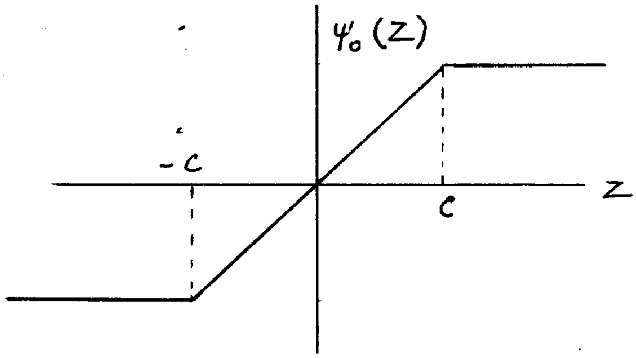
1) $\mathcal{F}_1$ je třída ε - kontaminovaných normálních rozdělení

(přibližně normálních), to je

$$\mathcal{F}_1 = \{F : F = (1-\varepsilon)\phi + \varepsilon H\}$$

kde ϕ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení, H je libovolná symetrická distribuční funkce, $0 \leq \varepsilon < 1$ je známá konstanta .

$$\psi_0(z) = z, \qquad |z| \leq c$$
$$= c \cdot \mathrm{sign}(z), \quad |z| > c$$

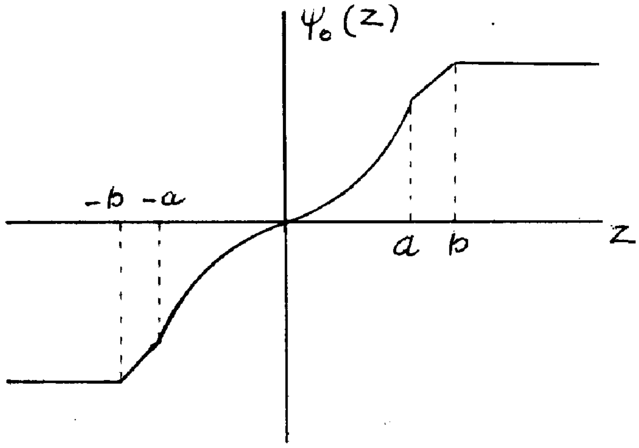


2) $\mathcal{F}_2$ - třída ε - normálních symetrických rozdělení

$$\mathcal{F}_2 = \{F : \sup_z |F(z) - \phi(z)| \leq \varepsilon, F \text{ symetrická}\}$$

Ve třídě $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$ je nejméně příznivým rozdělením rozdělení s exponenciálními chvosty.

$$\psi_0(z) = b_1 \operatorname{tg}(b_2 z), \quad |z| < a$$
$$= z, \qquad a < |z| < b$$
$$= b \cdot \mathrm{sign}(z), \quad |z| \geq b$$

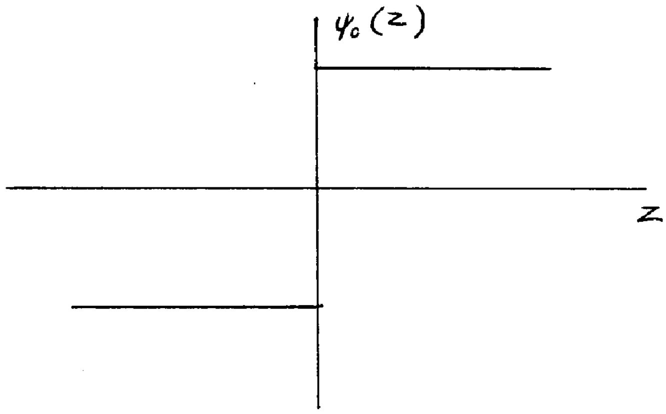


Další tři třídy uvažovali Poljak a Cypkin [13] .

3) $\mathcal{F}_3 = \{F : f(z)$ je spojitá v 0, $f(0) \geq a > 0\}$

$\mathcal{F}_3$ je nejširší třída rozdělení, odpovídá tomu, že chybí jakákoliv apriorní informace o rozdělení. Nejméně příznivé rozdělení je Laplaceovo.

$$\psi_0(z) = 2a \cdot \mathrm{sign}(z)$$

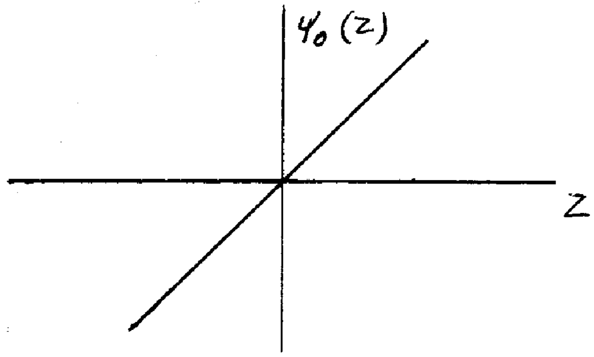


4) $\mathcal{F}_4$ - třída rozdělení s omezeným rozptylem

$$\mathcal{F}_4 = \{ F : E_F z^2 \leq \sigma^2 < \infty \}$$

Nejméně příznivé rozdělení je normální rozdělení.

$$\psi_0(z) = z$$

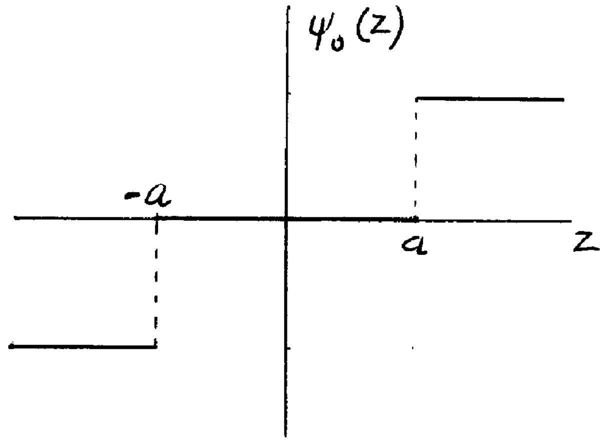


5) $\mathcal{F}_5$ - třída přibližně rovnoměrných rozdělení

$$\mathcal{F}_5 = \{ F : F = (1-\varepsilon) F_R + \varepsilon H \}$$

F_R je distribuční funkce rovnoměrného rozdělení $R(0, 2a)$, H je libovolná symetrická distribuční funkce, $0 < \varepsilon < 1$ je známá konstanta.

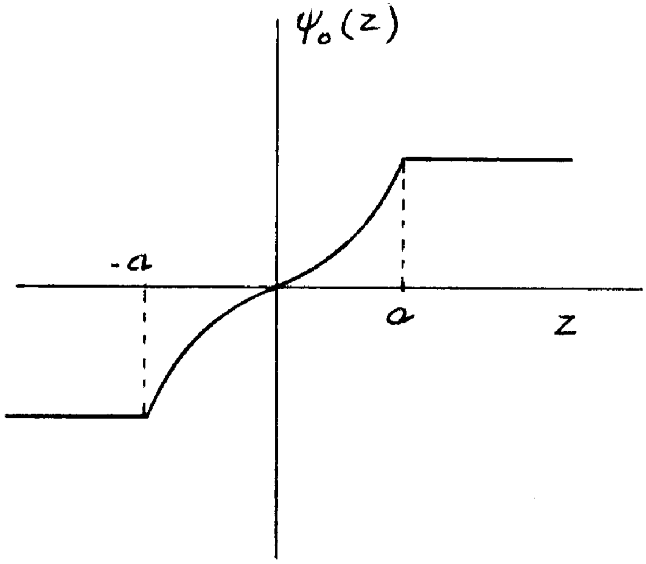
$$\psi_0(z) = 0, \qquad |z| \leq a$$
$$= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot a} \, sign(z), \quad |z| > a$$



6) $\mathcal{F}_6$ - třída přibližně finitních rozdělení

$$\mathcal{F}_6 = \left\{ F : \int_{-a}^{a} f(z)dz = 1-\varepsilon, \ 0 < \varepsilon < 1 \right\}$$

$$\psi_0(z) = tg(b_1 z), \quad |z| \leq a$$
$$= b_2 \, sign(z), \quad |z| > a$$



7. Závěry

Při praktickém používání M- a SA-odhadů vzniká řada otázek.

1) Který z uvedených odhadů použít (kterou funkci ψ_0 vybrat)? Odpověď závisí na apriorní informaci o rozdělení, kterou máme k dispozici. Použijeme ten odhad, který odpovídá možné třídě rozdělení. Jestliže o šumu nevíme nic, použijeme odhad, který odpovídá nejširší třídě $\mathcal{F}_3$.

2) Jak se chovají tyto odhady v případě, že skutečná distribuční funkce nepatří do vybrané třídy $\mathcal{F}$? Některé z tříd zde uvedených jsou dosti úzké ($\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_6$) a odhady sestrojené pro tyto třídy nejsou vhodné pro rozdělení, která do nich nepatří. Odhady zkonstruované pro třídy $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_5$ jsou použitelné pro libovolné rozdělení, i když nemají příliš vysokou efficienci.

3) Abychom mohli použít odhady odpovídající třídám $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_5$ je třeba znát dva parametry a to ε - úroveň kontaminace a parametr měřítka základního rozdělení (normálního nebo rovnoměrného). Vůči parametru ε nejsou odhady příliš citlivé. Parametr měřítka není apriori znám. Je možné v procesu zpracování dat tento parametr odhadovat [6].

4) Optimalita M-odhadů a SA-odhadů má asymptotický charakter. Avšak výsledky experimentů a teoretické výzkumy ukazují, že robustní odhady si zachovávají své vlastnosti i při nevelkých výběrech.

5) Popsané odhady jsou minimaxové v daných třídách. Vzniká otázka, zda nebudou tyto odhady počítané pro nejméně příznivá rozdělení příliš málo efficientní pro jiná rozdělení. Ztráta efficience je nevelká [13].

Literatura

[1] Adichie, J.N. (1967). Estimates of regression coefficients based on rank tests. Ann.Math.Statist. 38, 894-904.

[2] Bickel, P.J. (1973). On some analogues to linear combinations of order statistics in the linear model. Ann.Statist. 1, 597-616.

[3] Hampel, F.R. (1971). A general qualitative definition of robustness. Ann.Math.Statist. 42, 1887-1896.

[4] Huber, P.J. (1972). Robust statistics: a review. Ann.Math. Statist. 43, 1041-1067.

[5] Huber, P.J. (1973). Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo. Ann.Statist. 1, 799-821.

[6] Huber, P.J. (1977). Robust methods of estimation of regression coefficients. Math.Operationsforsch. Statist., Ser.Statistics, 8.

[7] Jaeckel, L.A. (1972). Estimating regression coefficients by minimizing the dispersion of the residuals. Ann.Math. Statist. 43, 1449-1458.

[8] Jurečková, J. (1971). Nonparametric estimate of regression coefficients. Ann.Math.Statist. 42, 1328-1338.

[9] Jurečková, J. (1977). Asymptotic relations of M-estimates and R-estimates in linear regression model. Ann.Math. statist. 5, 464-472.

[10] Koul, H.L. (1971). Asymptotic behavior of a class of confidence regions based on ranks in regression. Ann.Math. Statist. 42, 466-476.

[11] Martin, R.D. (1972). Robust estimation of signal amplitude. IEEE Trans.Inform.Th. IT-18, 596-606.

[12] Price E.L. Vandelinde V.D. (1979). Robust estimation using the Robbins-Monro stochastic approximation algorithm. IEEE Trans. of Inform.Th. IT-25, 693-704.

[13] Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. (1977). Огрубленный метод максимального правдоподобия. Сб. "Динамика систем", 12, 22-46.