ROBUSTNOST STATISTICKÝCH TOLERANČNÍCH MEZÍ PRO NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Miloš Jílek
Mikrobiologický ústav ČSAV, 142 20 Praha 4

1

V dosti rozsáhlé literatuře o statistických tolerančních mezích /11/ je věnováno jen málo pozornosti tomu, jak jsou toleranční meze citlivé na porušení předpokladu o tvaru rozdělení (/23/, /22/ - v obou případech jde o normální rozdělení). Tato práce uvádí (po zavedení pojmu tolerančních mezí v odst. 2 a typu robustnosti v odst. 3) přehled výsledků práce /23/, ve které se jako alternativa k normálnímu rozdělení uvažuje zobecněné normální rozdělení, tedy rozdělení symetrické (odst. 4), a závěry práce /22/, v níž se uvažuje nepříliš asymetrická alternativa k normálnímu rozdělení (odst. 5); jako silně asymetrická varianta k normálnímu rozdělení bylo uvažováno často užívané rozdělení logaritmicko-normální (odst. 6).

2

Nechť $\mathcal{X}$ označuje množinu všech možných výsledků, nechť $\mathcal{U}$ je σ-algebra podmnožin množiny $\mathcal{X}$, a nechť Ω je množina indexů. Předpokládejme, že na $\mathcal{U}$ je definována třída pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\ \theta \in \Omega\}$. Nechť n je přirozené číslo.

Statistiku S zobrazující $\mathcal{X}^n$ do $\mathcal{U}$ nazveme statistická toleranční oblast (obšírněji: statistická toleranční oblast při výběru rozsahu n).

Řekneme, že S je statistická toleranční oblast typu A (obšírněji: statistická toleranční oblast pro třídu pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\ \theta \in \Omega\}$ s pravděpodobnostním obsahem alespoň β na hladině spolehlivosti γ při výběru rozsahu n), jestliže pro daná čísla β a γ $(0 < \beta, \gamma < 1)$ a dané přirozené číslo n platí

$$(1) \qquad Pr_\theta \left\{ P_X^\theta(S(X_1, \ldots, X_n)) \geq \beta \right\} = \gamma$$

pro všechna $\theta \in \Omega$.

Řekneme, že S je statistická toleranční oblast typu B (obšírněji: statistická toleranční oblast pro třídu pravděpodobnostních měr $\{P_X^\theta;\ \theta \in \Omega\}$ se střední hodnotou pravděpodobnostního obsahu β při výběru rozsahu n), jestliže pro dané číslo β $(0 < \beta < 1)$ a dané přirozené číslo n platí

$$(2) \qquad E_{X_1, \ldots, X_n} \left\{ P_X^\theta(S(X_1, \ldots, X_n)) \right\} = \beta$$

pro všechna $\theta \in \Omega$.

Jestliže $\mathcal{X} \subseteq R^1$, jsou tolerančními oblastmi zpravidla intervaly - nazýváme je toleranční intervaly - a meze tolerančních intervalů nazýváme toleranční meze. Je-li toleranční interval ohraničen jen jednou toleranční mezí (shora nebo zdola), mluvíme o jednostranné (horní nebo dolní) toleranční mezi, jinak mluvíme o oboustranných tolerančních mezích.

Budeme říkat, že S je neparametrická toleranční oblast (pro třídu $\{P_X^\theta; \theta \in \Omega\}$), jestliže indukované rozdělení pravděpodobnostního obsahu $P_X^\theta(S)$ nezávisí na $\theta \in \Omega$.

Wilks ve své práci z r. 1941 /26/ (která se stala základem pro studium teorie statistických tolerančních mezí) použil ke konstrukci tolerančních mezí pořádkových statistik a dokázal za předpokladu spojitosti rozdělení, že toto řešení nezávisí na tvaru rozdělení ani na jeho parametrech a tedy že jde o neparametrické toleranční meze pro třídu všech spojitých rozdělení.

Vedle Wilksových neparametrických tolerančních mezí byly odvozeny statistické toleranční meze pro užší třídy pravděpodobnostních rozdělení (normální, exponenciální, gama, Weibullovo a některá další spojitá rozdělení, Poissonovo, binomické, negativně binomické).

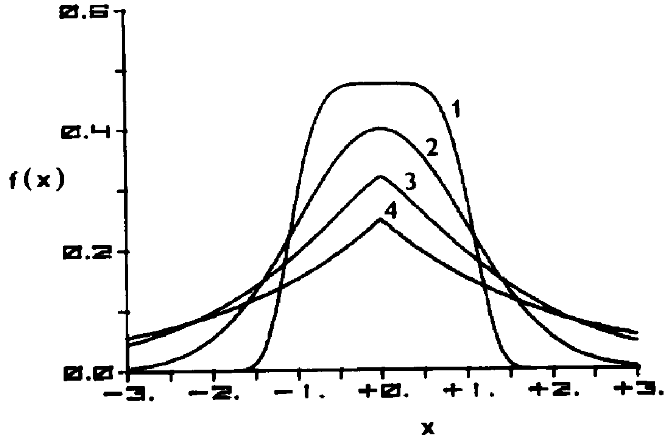
Toleranční meze pro takové třídy rozdělení jako je normální lze získat i na základě velmi malých výběrů, i když jsou toleranční intervaly při malých výběrech nevhodně „velké". (Stanovením vhodného rozsahu výběru se zde zabývat nebudeme - viz např. /5/, /4/, /9/, /12/, /13/.) Na druhé straně ke stanovení neparametrických tolerančních mezí je potřeba poměrně vělkých výběrů (viz /16/, tab. 38B), a při stejně velkých výběrech jsou neparametrické toleranční intervaly „větší" než intervaly získané pro užší třídu rozdělení za nějakých vhodných podmínek optimality (touto otázkou se zabývali GOODMAN a MADANSKY /7/, kteří porovnávali střední hodnotu délky neparametrického tolerančního intervalu a tolerančního intervalu odvozeného pro daný typ rozdělení v případě exponenciálního rozdělení při stejně velkém rozsahu výběru; pro normální rozdělení s oběma neznámými parametry je neparametrický oboustranný toleranční interval při běžně užívaných hodnotách β a γ (tj. 0,90 a vyšších) delší v průměru o 10-20% než toleranční interval pro normální rozdělení při témž rozsahu výběru).

Je tedy zřejmě výhodnější užívat tolerančních mezí pro co nejužší třídu rozdělení, pokud ovšem máme pro předpoklad o tvaru rozdělení dobré důvody. Což ovšem není vždycky pravda; vyvstává pak otázka, jak jsou toleranční meze citlivé na porušení předpokladu, že rozdělení patří do dané třídy (že jde např. o normální rozdělení s oběma neznámými parametry). Lze očekávat, že toleranční meze budou citlivé zvlášť na větší odchylky od předpokládaného tvaru rozdělení; této otázce byla zatím věnována jen malá pozornost (/23/, /22/), a dosažené výsledky - výhradně pro normální rozdělení - zde budou shrnuty.

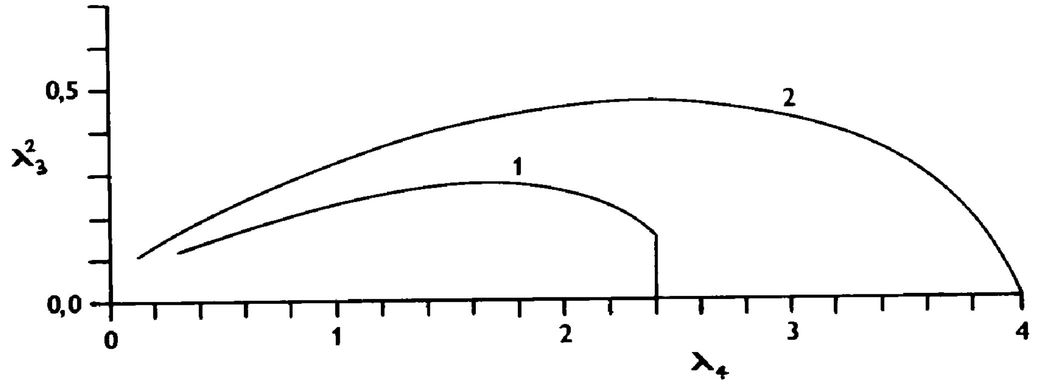
(Přehled teoretických výsledků studia statistických tolerančních mezí do r. 1970 podává ve své knize /10/ I. GUTTMAN.)

Obr. 1. Zobecněné normální rozdělení

c = -0,6 ... 1, 0,0 ... 2,
0,6 ... 3, 1,0 ... 4

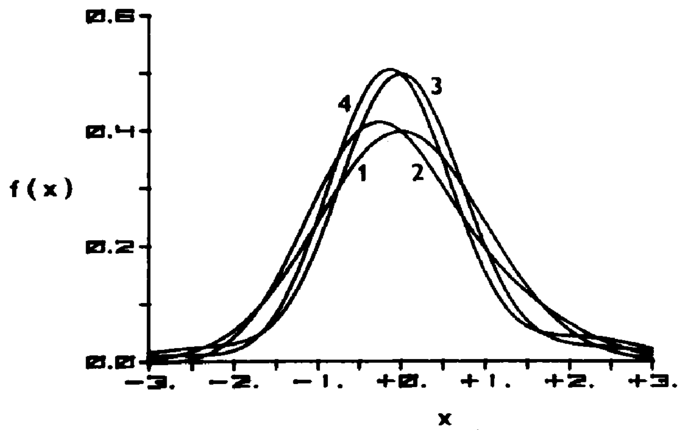


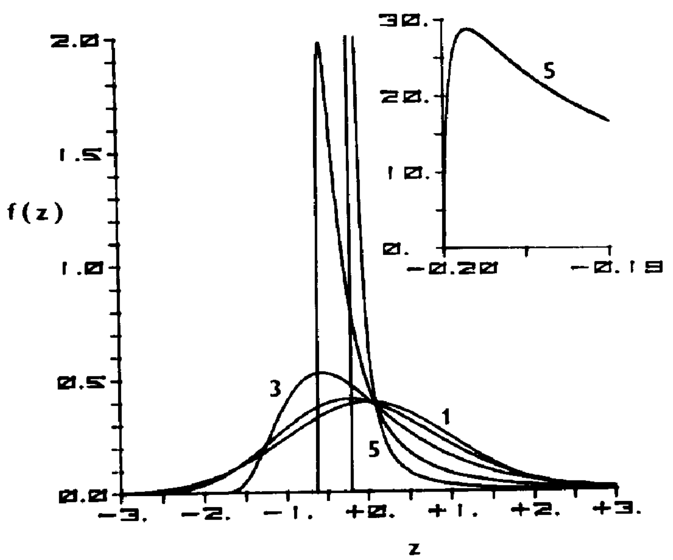
Obr. 2. Hranice jednovrcholovosti (křivka 1) a nezápornosti (křivka 2) funkce (5) - podle /1/



Obr. 3. Rozdělení (5)

$(\lambda_3; \lambda_4)$ =
(0,0; 0,0) ... 1
(0,5; 0,0) ... 2
(0,0; 2,0) ... 3
(0,5; 2,0) ... 4





Obr. 4. Standardizované logaritmicko-normální rozdělení

V_x^2 = 0,000025 1
0,025 2
0,25 3
2,5 4
25,0 5

3

SHARPE /23/ navrhuje rozlišovat při úvahách o tolerančních mezích dva typy robustnosti: robustnost kritéria a robustnost inference (tuto myšlenku přejímá z prací /2/ a /3/, kde však jde o robustnost t-testu a F-testu):

Mluvíme-li o robustnosti kritéria, pak máme na mysli změny pravděpodobností nebo jiných vlastností, ke kterým dojde, jestliže téhož kritéria užijeme pro různá rozdělení - jestliže např. na základě výběru z logaritmicko-normálního rozdělení vypočteme toleranční meze typu A tak, jako kdyby výběr pocházel z normálního rozdělení, lze očekávat, že dojde ke změně deklarované spolehlivosti γ (viz odst. 6).

Mluvíme o robustnosti inference, jestliže se zajímáme o změny vlastností tolerančních mezí v případě, že jsme současně se změnou rozdělení adaptovali i kritérium tak, aby odpovídalo danému rozdělení - např. pro zobecněné normální rozdělení je konstruujeme tak, jako kdyby šlo o normální rozdělení, ale toleranční faktory spočítáme tak, aby platilo (1) resp. (2) (viz odst. 4).

4

SHARPE /23/ se zabývá robustností tolerančních mezí typu A i B pro normální rozdělení se známou střední hodnotou $\mu = 0$ a neznámým rozptylem σ^2, jestliže skutečné rozdělení je tzv. zobecněné normální /2/ s hustotou pravděpodobnosti

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{2^{(c+3)/2}\,\Gamma\left(\frac{c+3}{2}\right)\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{2/(c+1)}\right\}$$

pro $-\infty < x < \infty$ $(-1 < c \leq 1)$, která je symetrická kolem střední hodnoty 0 (viz obr. 1).

Studuje robustnost inference i robustnost kritéria, a jako míru robustnosti navrhuje

$$(4) \qquad 100\,\frac{O - E}{E}\,,$$

kde O je střední hodnota toleranční meze za předpokladu normality, E je střední hodnota toleranční meze za předpokladu správného rozdělení.

Uvažuje (analogicky s obvykle užívanými tolerančními mezemi pro normální rozdělení) toleranční meze typu

$$\bar{x} \pm k.T_c^{(1+c)/2},$$

kde

$$T_c = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{2/(1+c)}$$

a k je toleranční faktor (závislý na n, β a eventuelně γ) a při studiu robustnosti užívá statistiky

$k_c T_c^{(1+c)/2}$ ... u tolerančních mezí založených na T_c (c známé) se střední hodnotou E

$k_o T_o^{1/2}$ ...... u tolerančních mezí založených na předpokladu normality (c = 0) bez ohledu na správnou hodnotu c se střední hodnotou 0

$K_c T_o^{1/2}$ ...... u tolerančních mezí založených na T_o (tedy na směrodatné odchylce), ale s faktorem K_c zvoleným tak, aby platilo (1) resp. (2); střední hodnota .... E_o

INFERENCE

KRITÉRIUM

Výsledkem numerické studie, při které počítal míru robustnosti inference pro toleranční meze typu A i B při β (= γ) = 0,95, n = 10, 20, 50, 100, c = -0,6(0,2)1,0 (vybrané hodnoty jsou uvedeny v tab. 1), je toto zjištění: chyba s rostoucím n klesá, u tolerančních mezí typu B je menší než u tolerančních mezí typu A.

Tab. 1

c \ n	A 10	A 100	B 10	B 100
-0,6	20,0%	8,3%	8,4%	4,1%
+1,0	-17,4%	-4,4%	-6,4%	-1,4%

Tab.2

c \ n	A 10
-0,6	16,6%
+0,6	-13,7%

Míru robustnosti **kritéria** numericky zjišťoval jen pro toleranční meze typu A, $\beta = \gamma = 0{,}95$, n = 10, c = -0,6(0,2)0,6; vybrané hodnoty jsou uvedeny v tab. 2.

SHARPE pak uvažoval o asymptotické robustnosti pro $n \to \infty$; výsledkem jeho analysy je důležité zjištění, že uvažovaná míra robustnosti (4) asymptoticky nezávisí na typu tolerančního intervalu (jestliže u tolerančních mezí typu A je $0 < \gamma < 1$) ani na typu robustnosti. Tab. 3 uvádí asymptotickou chybu (v %).

Tab. 3

c	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
chyba	3,7	1,9	0,7	.	-0,4	-0,5	-0,3	0,4	1,0

Další závěry Sharpova studia asymptotické robustnosti:

(a) Pro c v oboru $-0{,}8 \leq c \leq 1{,}0$ je asymptotická robustnost optimální pro v blízkosti 0,945.

(b) Pro $c < 0$ je asymptotická robustnost nejlepší pro β v blízkosti 0,93, pro $c > 0$ v blízkosti 0,95.

(c) Pro β vně intervalu (0,92; 0,97) je robustnost obecně horší, bez ohledu na rozsah výběru.

(d) Vzhledem k tomu, že za β se obvykle volí některá z hodnot 0,90, 0,95, 0,99, je vzhledem k robustnosti nejvhodnější hodnota $\beta = 0{,}95$ pro jednostranné toleranční meze, a $\beta = 0{,}90$ pro oboustranné toleranční meze.

Zdá se, že úvahy o asymptotické robustnosti lze v praxi aplikovat v případě tolerančních mezí typu B při $n \geq 50$, v případě tolerančních mezí typu A při $n \geq 200$.

Závěry o asymptotické robustnosti lze zřejmě vztáhnout i na obecnější případ, kdy neznáme střední hodnotu rozdělení (studium robustnosti v tomto případě naráží na sotva překonatelné potíže). Lze tedy doporučit hodnoty $\beta = 0{,}95$ pro jednostranné toleranční meze resp. 0,90 pro oboustranné toleranční meze, ovšem potřebný rozsah náhodných výběrů bude zřejmě větší.

5

RAO et al. /22/ užívají jako alternativu k normálnímu rozdělení asymetrické rozdělení s hustotou pravděpodobnosti /6/ danou součtem prvních členů Edgeworthova rozvoje

$$(5) \qquad f(x) = G^{I}(x) - \frac{\lambda_3}{6} G^{IV}(x) + \frac{\lambda_4}{24} G^{V}(x) + \frac{\lambda_3^2}{72} G^{VII}(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

kde $\lambda_3 = \beta_1^{1/2}$, $\lambda_4 = \beta_2 - 3$ (tedy standardizovaný 3. a 4. kumulant), a G^i je i-tá derivace distribuční funkce rozdělení N(0,1), tedy

$$G^{I}(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2), \ \ldots$$

Jde o rozdělení jen „středně nenormální", ježto se předpokládá, že je zanedbatelný vliv členů vyšších řádů závislých na $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_{34}, \ldots$

Kromě toho je možné použít - má-li být hustota všude nezáporná a má-li rozdělení zůstat jednovrcholové - jen nepříliš velkých hodnot λ_3 a λ_4 (jak ukazuje obr. 2, nakreslený podle /1/).

Hustota (5) je pro některá λ_3 a λ_4 užívaná autory zakreslena na obr. 3.

V uvedené práci /22/ se autoři zabývali studiem robustnosti Owenových oboustranných tolerančních mezí: Jde o toleranční meze (/19/, /20/, /21/) kontrolující podíl populace v obou koncích vně tolerančního intervalu - místo splnění (1) se požaduje, aby pro zvolená β', β'' ($\beta' + \beta'' = 1 - \beta$) platilo, že

$$\Pr(\Pr(X \leq T_1) \leq \beta' \text{ a } \Pr(X \geq T_2) \leq \beta'') = \gamma ,$$

kde T_1 a T_2 je dolní a horní toleranční mez; v případě normálního rozdělení, kdy Owenovy toleranční meze mají rovněž tvar

$$\bar{x} \pm \tilde{k} \cdot s$$

jako běžně užívané toleranční meze pro normální rozdělení, avšak (při $\beta' = \beta''$) jsou toleranční faktory $\tilde{k}$ poněkud vyšší než toleranční faktory počítané za požadavku (1) buď přesně /17/ nebo pomocí Waldovy-Wolfowitzovy aproximace /25/ (viz např. /16/).

Autoři pak počítají spolehlivost $\tilde{\gamma}$, když místo správných $\tilde{k}$ dosadí k (odpovídající $\gamma = 0{,}90$), pro různá λ_3 a λ_4 a pro $\beta = 0{,}80$, $0{,}90$, $0{,}95$, a uzavírají:

(a) Chyba roste s růstem β.

(b) Chyba závisí na λ_3 i na λ_4 .

(c) Chyba je (zhruba řečeno) větší při velkých n.

Kromě toho spočítali tabulku tolerančních faktorů $\tilde{k}$ pro n = 4(1)10(5)20, 30, 50, aby pro dané $\beta = 0{,}80$, $0{,}90$ nebo $0{,}95$ bylo $\gamma \geq 0{,}90$; ukazují, že pro větší n je shoda s hodnotami tolerančních faktorů pro normální rozdělení dost dobrá, zejména pro $\beta = 0{,}80$, ale i pro $\beta = 0{,}95$ (v tomto případě se ovšem toleranční faktory nenormálního rozdělení blíží k tolerančním faktorům normálního rozdělení jen velmi pomalu - v tabulkách autorů je maximální chyba pro n = 4 rovna 21%, pro n = 50 ještě 17%).

6

Jedním z rozdělení, s nimiž se v aplikacích často setkáváme, je rozdělení logaritmicko-normální, mající hustotu

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_y \, x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{- \frac{1}{2\sigma_y^2} (\ln x - \mu_y)^2 \right\}, \; x > 0; \tag{6}$$

náhodná veličina

$$Y = \ln X \tag{7}$$

má rozdělení $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, a mezi středními hodnotami a rozptyly veličin X a Y platí tyto vztahy /15/:

$$\mu_x = \exp(\mu_y + \tfrac{1}{2}\sigma_y^2),$$

$$\sigma_x^2 = \exp(2\mu_y + \sigma_y^2)(\exp(\sigma_y^2) - 1) = \mu_x^2(\exp(\sigma_y^2) - 1),$$

resp.

$$\mu_y = \ln \mu_x - \tfrac{1}{2} \ln U_x = \ln \mu_x - \tfrac{1}{2} \ln \sigma_y^2 ,$$

$$\sigma_y^2 = \ln U_x ,$$

kde $U_x = V_x^2 + 1$, a $V_x = \sigma_x/\mu_x$ $(= (\exp(\sigma_y^2) - 1)^{1/2})$ (variační koeficient náhodné veličiny X).

O tom, jak se mění tvar logaritmicko-normálního rozdělení se změnou střední hodnoty a rozptylu náhodné veličiny X si lze učinit představu z obr. 4, na kterém jsou zakresleny pro různá V_x hustoty standardizované náhodné veličiny $Z = (X - \mu_x)/\sigma_x$,

$$f(z) = V_x U_x^{-1/8}(2\pi \ln U_x)^{-1/2}(T(z))^{-5/4 - (\ln T(z))/(2 \ln U_x)} ,$$

$$z > -V_x^{-1},$$

kde $T(z) = V_x z + 1$.

Je zřejmé, že pro velká V_x se logaritmicko-normální rozdělení velmi výrazně odlišuje od normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem; pro malá V_x jsou rozdíly nepatrné. Může tedy logaritmicko-normální rozdělení posloužit jako asymetrická alternativa k normálnímu rozdělení pro posouzení robustnosti některých statistických metod vzhledem k porušení předpokladu normality. (Ostatně se nejednou setkáváme s tím, že se s logaritmicko-normálně rozdělenými náhodnými veličinami zachází tak, jako kdyby to byla normálně rozdělená veličina; tato skutečnost, pozorovaná v pracech s imunologickou tematikou /8/, byla podnětem k této studii, když se ukázala potřeba konstruovat toleranční meze pro logaritmicko-normálně rozdělenou náhodnou veličinu /24/.)

Stanovení tolerančních mezí při daném rozsahu výběru n z logaritmicko-normálního rozdělení lze tedy provést tak, že původní data zlogaritmujeme, vypočteme toleranční meze pro rozdělení náhodné veličiny Y a po odlogaritmování dostaneme toleranční meze pro rozdělení náhodné veličiny X (vzhledem k ryzí monotonnosti transformace (7) je jistě zachována platnost (1) nebo (2)); toleranční meze pak mají tvar

$$(8) \qquad \exp(\bar{y} \pm k.s_y),$$

kde k je příslušný toleranční faktor (/14/, /16/, /18/) a $\bar{y}$ a s_y jsou průměr a směrodatná odchylka vypočtená z $y_i = \ln x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Kdybychom toleranční meze stanovovali tak jako pro normální rozdělení, měly by tvar

$$\bar{x} \pm k.s_x \; ;$$

jaké by byly důsledky tohoto postupu, pokud by k byly toleranční faktory pro normální rozdělení? Je zřejmé, že při velkém V_x značné. Ukážeme to na případě jednostranných tolerančních mezí typu A. Výsledky celkem 1 450 000 pseudonáhodných experimentů jsou shrnuty v tab. 4 (odhady spolehlivosti γ, pochází-li výběr z logaritmicko-normálního rozdělení, jestliže byla nebo nebyla provedena logaritmická transformace dat; N je počet provedených výběrů daného rozsahu n).

Bylo by dobré dosavadní výsledky ještě rozšířit a doplnit, nicméně z dat soustředěných v tab. 4 lze učinit závěr, že

(a) $\tilde{\gamma}$ klesá pro rostoucí β,

(b) $\tilde{\gamma}$ klesá pro rostoucí V_x,

(c) $\tilde{\gamma}$ klesá pro rostoucí n

(přičemž tato tvrzení neplatí absolutně).

7

Závěrem lze shrnout - i když o robustnosti tolerančních mezí jistě ještě nepadlo poslední slovo - že toleranční meze konstruované pro normální rozdělení nejsou příliš citlivé na porušení normality, pokud toto porušení není příliš velké, že však jich nelze použít, je-li skutečné rozdělení výrazně asymetrické.

A tak, jestliže tvar rozdělení neznáme a nemůžeme se spolehnout na nějaký jeho odhad, je lépe užívat Wilksových neparametrických tolerančních mezí (i s jejich nevýhodami, o kterých byla zmínka v odst. 2) než tolerančních mezí zkonstruovaných pro nějaké rozdělení potenciálně dost odlišné.

L i t e r a t u r a

/1/ BARTON D. E., DENNIS K. E. (1952): The conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal. Biometrika 39, 425-427

/2/ BOX G. E. P., TIAO G. C. (1962): A further look at robustness via Bayes's theorem. Biometrika 49, 419-432

/3/ BOX G. E. P., TIAO G. C. (1964): A note on criterion and inference robustness. Biometrika 51, 169-173

/4/ FAULKENBERRY G. D., DALY J. C. (1970): Sample size for tolerance limits on a normal distribution. Technometrics 12, 813-821

/5/ FAULKENBERRY G. D., WEEKS D. L. (1968): Sample size determination for tolerance limits. Technometrics 10, 343-348

Tab. 4. Odhad pravděpodobnosti $\tilde{\gamma}$ (tj. relativní četnost splnění požadavku, aby uvnitř tolerančního intervalu ležel alespoň podíl β logaritmicko-normálního rozdělení), jestliže požadujeme, aby $\tilde{\gamma} = \gamma$

V_x^2	μ_x	σ_x^2	N	n	Toleranční mez byla stanovena správně (po logaritmické transformaci)				nesprávně (bez logaritmické transformace)			
					γ							
					0,95		0,99		0,95		0,99	
					β							
					0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
0,05	20	20	500	10	0,962	0,950	0,988	0,990	0,872	0,804	0,970	0,950
				20	0,954	0,956	0,994	0,990	0,846	0,716	0,944	0,884
				50	0,946	0,948	0,996	0,996	0,732	0,502	0,884	0,700
				100	0,950	0,952	0,996	0,994	0,670	0,246	0,848	0,460
25	20	10^4	500	10	0,954	0,958	0,986	0,988	0,456	0,170	0,536	0,212
				20	0,956	0,948	0,990	0,992	0,532	0,136	0,586	0,182
				50	0,972	0,970	0,998	0,998	0,672	0,164	0,708	0,176
				100	0,958	0,964	0,998	0,996	0,744	0,180	0,768	0,184
0,005	200	200	500	10	0,930	0,928	0,982	0,988	0,918	0,900	0,970	0,970
				20	0,964	0,958	0,992	0,992	0,926	0,918	0,982	0,980
				50	0,932	0,948	0,996	0,996	0,890	0,870	0,970	0,956
				100	0,958	0,962	0,988	0,988	0,890	0,812	0,970	0,950
2,5	200	10^5	1000	10	0,938	0,944	0,985	0,985	0,483	0,210	0,587	0,305
				20	0,940	0,936	0,978	0,981	0,503	0,172	0,630	0,224
				50	0,944	0,950	0,991	0,992	0,549	0,115	0,618	0,150
				100	0,947	0,967	0,991	0,990	0,577	0,061	0,646	0,084
				1000	0,955	0,959	0,991	0,990	0,761	0,011	0,796	0,012

/6/ GAYEN A. K. (1949): The distribution of "Student's" t - in random samples of any size drawn from non-normal universes. Biometrika 36, 353-369
/7/ GOODMAN L. A., MADANSKY A. (1962): Parameter-free and nonparametric tolerance limits: the exponential case. Technometrics 4, 75-96
/8/ GOTTLIEB C. F. (1974): Application of transformations to normalize the distribution of plaque-forming cells. J. Immunol. 113, 51-57
/9/ GUENTHER W. C. (1972): Tolerance intervals for univariate distributions. Naval Res. Logist. Quart. 19, 309-333
/10/ GUTTMAN I. (1970): Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian. Charles Griffin and Co., London
/11/ JÍLEK M. (1981): A bibliography of statistical tolerance regions. Math. Operationsforschung und Statistik, Ser. Statistics (v tisku)
/12/ JÍLEK M. (1981): Počet měření a odhad přesnosti chemických analys. Chem. Listy (v tisku)
/13/ JÍLEK M. (1981): Sample size and tolerance limits. Trabajos de Investigación Operativa y Estadística (odesláno do tisku)
/14/ JÍLEK M., LÍKAŘ O. (1959): Coefficents for the determination of one--sided tolerance limits of normal distribution. Ann. Inst. Statist. Math. 11, 45-48
/15/ JOHNSON N. L., KOTZ S. (1970): Continuous Univariate Distributions - 1. Houghton Mifflin Comp., Boston
/16/ LIKEŠ J., LAGA J. (1978): Základní statistické tabulky. SNTL, Praha
/17/ ODEH R. E. (1978): Tables of two-sided tolerance factors for a normal distribution. Commun. Statist. B 7, 183-201
/18/ OWEN D. B. (1962): Handbook of Statistical Tables. Addison-Wesley, Inc., Reading, Ma.
/19/ OWEN D. B. (1964): Control of percentages in both tails of the normal distribution. Technometrics 6, 377-387
/20/ OWEN D. B. (1965): A special case of a bivariate non-central t-distribution. Biometrika 52, 437-446
/21/ OWEN D. B., FRAWLEY W. H. (1971): Factors for tolerance limits which control both tails of the normal distribution. J. Quality Technol. 3 (2), 69-79
/22/ RAO J. N. K., SUBRAHMANIAM K.. OWEN D. B. (1970): Effect of non-normality on tolerance limits which control percentages in both tails of normal distribution. Tech. Rep. No. 1, Dept. of Statistics, University of Manitoba; zkrácená verse: Technometrics 14 (1972), 571-575
/23/ SHARPE K. (1970): Robustness of normal tolerance intervals. Biometrika 57, 71-78
/24/ TLASKALOVÁ-HOGENOVÁ H., ŠTERZL J., POSPÍŠIL M., HOFMAN J. (1977): The origin and development of immunocompetent B cells. In: Developmental Immunology (J. B. SOLOMON & J. D. HORTON, Eds.). Elsevier/North-Holland Biomedical Press, Amsterdam, 355-362
/25/ WALD A., WOLFOWITZ J. (1946): Tolerance limits for a normal distribution. Ann. Math. Statist. 17, 208-215
/26/ WILKS S. S. (1941): Determination of sample sizes for setting tolerance limits. Ann. Math. Statist. 12, 91-96