Informační Bulletin

*České Statistické Společnosti* *č. 4, prosinec 1995, ročník 6.*


# Enyky, benyky … aneb o spravedlnosti s podmínkou


*Stanislav Komenda*


## 1. Situace a její model

Uvažujme výbor (komisi, radu, orgán) s právem rozhodovat o podaných návrzích přijímat je nebo odmítat. Výbor se ve své činnosti řídí základními statutárními pravidly:

(a ) je usnášeníschopný, dostaví-li se na zasedání alespoň 3/5, tj. 60% jeho členů, a

(b1) schvaluje podaný návrh, hlasuje-li pro něj nadpoloviční většina jeho jmenovaných členů (rozhodovací verze „J")

anebo

(b2) schvaluje podaný návrh, hlasuje-li pro něj nadpoloviční většina z právě přítomných členů výboru (rozhodovací verze „P").

Označme $n$ počet osob do výboru jmenovaných a $p$ pravděpodobnost, že se člen výboru dostaví na svolané zasedání, $0 \leq p \leq 1$; předpokládá se, že tato míra docházkové kázně je stejná pro všechny členy výboru a že absentující členové nevytvářejí koalici (např. za účelem společného odchodu do hospody), tj. že na zasedání chybějí z individuálních, osobních důvodů. Jinak řečeno, přítomnost člena výboru na zasedání je dvouhodnotová (*přítomen, chybí*) náhodná veličina s pravděpodobnostním rozdělením $(p, 1-p)$ – stejná pro všechny členy výboru – s tím, že tyto náhodné veličiny jsou vzájemně nezávislé. Vlastní číselná hodnota parametru $p$ je charakteristikou poměru jedince k výboru, jehož je členem; řečeno v pojmech experimentální psychologie, parametr $p$ je kontrolován členy výboru.

Dále označme $q$ pravděpodobnost, že člen hlasuje proti podanému návrhu, odmítá ho; předpokládá se, že tato míra výhrad vůči návrhu je pro všechny členy výboru táž a že se tito ohledně projednávané věci předem nedomlouvají a nevytvářejí koalici. Parametr $q$ je kontrolován jak členy výboru (jeho hodnota je výrazem jejich náročnosti: vyšší náročnost zvyšuje hodnotu parametru $q$), tak kvalitou podaného návrhu (čím kvalitnější návrh, tím nižší bude hodnota parametru $q$). Postoj k návrhu tak představuje dvouhodnotovou náhodnou veličinu (o stavech *odmítnout, přijmout*) – stejnou pro všechny členy výboru; v jejich souboru jsou tyto veličiny navzájem nezávislé.

Je přirozené požadovat od rozhodovací procedury, aby rozhodnutí výboru o přijetí či odmítnutí návrhu citlivě reagovalo na změny parametru $q$ – při nízkých $q$ by měly být šance přijetí návrhu vysoké – a aby naopak procedura nebyla ovlivňována faktory irelevantními, jako jsou rozsah výboru $n$ a docházková kázeň $p$. Tomuto požadavku vyhovuje – jak ukážeme – každá z obou rozhodovacích verzí „J“ a „P“ odlišným způsobem. Právě to je předmětem předkládané kvantitativní studie.

Předpokládáme-li, že se chování (tj. prezence a způsob hlasování) jednotlivých členů výboru řídí zmíněnými parametry $p$ a $q$, lze chování výboru jako celku popsat pomocí následujících náhodných veličin:

$X$ ... udává počet členů výboru dostavivších se na zasedání; vzhledem k předpokladům výše uvedeným bude tato veličina rozdělena binomicky podle zákona $b(n,p)$, tj. bude nabývat hodnot $x = 0, 1, \ldots, n$ s pravděpodobnostmi

$$P(X = x|n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \tag{1}$$

kde $n$ je počet členů do výboru jmenovaných a $x$ je počet těch z nich, kteří se na zasedání dostavili.

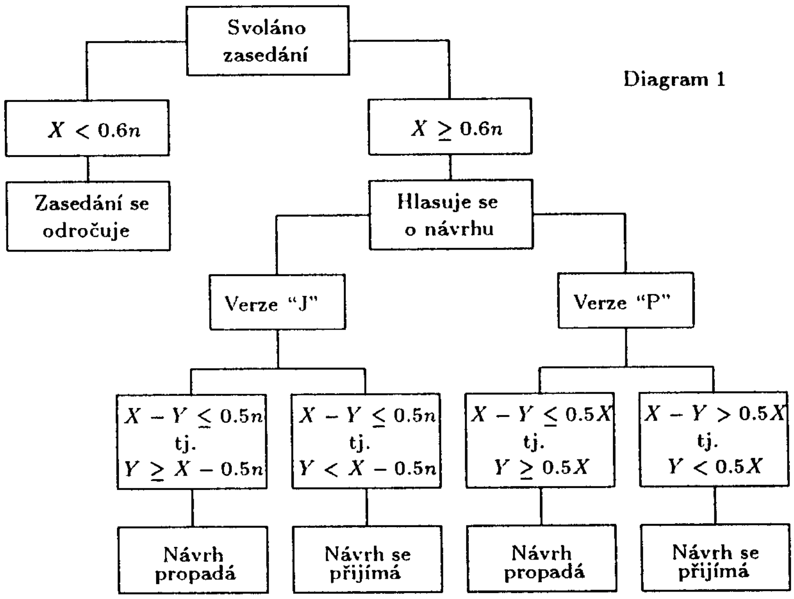
$Y$ ... udává počet členů výboru nesouhlasících s návrhem, z těch, kteří se na zasedání dostavili; pravděpodobnostní rozdělení této náhodné veličiny je binomické podle zákona $b(x,q)$, tj. veličina $Y$ nabývá hodnot $y, y = 0, 1, \ldots, x$, s pravděpodobnostmi

$$P(Y = y|x,q) = \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}, \tag{2}$$

kde $y$ je počet přítomných členů výboru, kteří odmítají podaný návrh.

Poté, co bylo svoláno zasedání výboru, události se vyvíjejí, jak naznačuje schéma na následujícím diagramu:

Diagram 1




Cílem studie je především porovnat vlastnosti obou verzí rozhodování „J" a „P".

Přitom je třeba si uvědomovat, že obě procedury se liší v názoru na (hypotetické) chování těch členů výboru, kteří se na zasedání nedostavili a o návrhu nehlasovali. Nemělo by nás mást, že o nich žádná z procedur explicitně nic neříká.

Klíčovým bodem je princip, že návrh by měl být přijímán pouze tehdy, souhlasí-li s ním nadpoloviční většina členů výboru, tj. vysloví se pro něj více než $n/2$ hlasů. Obě procedury se rozcházejí v tom, že zatímco verze „J" uvažuje explicitně vyjádřený souhlas alespoň $n/2$ členů přítomných na zasedání, má procedura „P" na zřeteli nadpoloviční většinu složenou případně i z těch, kteří sice nehlasovali (je jich $n - x$), ale z nichž by, kdyby byli přišli, hlasoval pro návrh očekávaný počet $(n - x)(1 - q)$ členů. Procedura „P" totiž předpokládá, že nepřítomní, kdyby byli bývali přítomní, by se chovali jako opravdu přítomní. Hodnota parametru $q$ se proto odhaduje jako $\hat{q} = y/x$, takže je očekávaný počet hypoteticky kladně hlasujících odhadován jako

$$(n - x)\left(1 - \frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

což dohromady s $x - y$ přítomnými členy hlasujícími pro návrh dává

$$(x-y)+(n-x)\left(1-\frac{y}{x}\right)=(x-y)\frac{n}{x} \qquad (4)$$

hlasů.

Z požadavku, aby tento sumární „hypoteticko-reálný" počet kladně hlasujících tvořil nadpoloviční většinu, vyplývá nerovnost

$$(x-y)\frac{n}{x}>\frac{n}{2}, \qquad (5)$$

z níž dostáváme požadavek na $y$ ve tvaru

$$y<\frac{x}{2}$$

To je ovšem právě zásada definující rozhodovací proceduru „P".

V dalším ukážeme, že verze „J" rozhodovací procedury vede ve svých důsledcích k výrazné závislosti šancí návrhu na počtu přítomných členů výboru $x$: vyhlídky návrhu, k rozhodování o němž se sešlo relativně málo členů, těsně nad hranicí usnášeníschopnosti, jsou touto skutečností výrazně poškozovány. To je ovšem závažným nedostatkem procedury rozhodování a projevem její nespravedlnosti – protože pro event. přijetí či zamítnutí návrhu by měla být podstatná jenom hodnota parametru $q$, tj. kvalita návrhu a náročnost výboru. Jinak řečeno, verze „J" připouští, aby dva stejně kvalitní návrhy podané témuž výboru měly podstatně rozdílné šance uspět – jen proto, že se k projednávání každého z nich sešel odlišný počet jeho členů.

## 2. Formulace úlohy

V souvislosti s modelovaným systémem lze formulovat následující otázky:

(A) Jak závisí usnášeníschopnost výboru, resp. pravděpodobnost, že zasedání bude nutno pro nedostatečnou účast odročit, na parametru docházkové kázně $p$ a na velikosti výboru $n$? Odpověď na tuto otázku dají příslušné hodnoty odvozené z distribuční funkce binomického rozdělení $B(n,p)$.

(B) Jak závisí pravděpodobnost přijetí návrhu (za předpokladu, že výbor je schopen se usnášet) na míře výhrad vůči návrhu $q$, ale také případně na počtu přítomných $x$, míře docházkové kázně $p$ a na velikosti výboru $n$? Přitom je žádoucí, aby šance návrhu uspět závisely na $q$ co nejvýrazněji, zatímco jejich závislost na parametrech $x, p$ a $n$ je nežádoucí. Posledně uvedené tři parametry jsou totiž vůči rozhodování o návrhu irelevantní.

Odpověď na otázku (B) poskytnou binomická rozdělení (1) a (2), resp. jejich distribuční funkce. Řešení se v případě verze „J" a verze „P" bude lišit.

(C) Jak závisí očekávaný (střední) počet kladných hlasů (v případě přijetí návrhu) na parametrech $q, x$, resp. $n$? Přitom lze vyjít z představy, že návrh, o jehož event. přijetí hlasuje menší počet přítomných, „má nárok" na to, aby byl přijímán „přiměřeně" nižším očekávaným počtem kladně hlasujících.

Ukážeme, že v případě obou verzí je návrh přijímán nižším očekávaným počtem kladných hlasů při nižším $q$ – což je sice nežádoucí, nicméně je tomu tak. Zároveň platí, že závislost očekávaného počtu kladných hlasů v případě přijatého návrhu na počtu přítomných (hlasujících) $x$ se v případě verze „P" odstraní, připočte-li se k očekávanému počtu explicitně kladně hlasujících ještě očekávaný počet implicitně kladně hlasujících mezi těmi $n - x$ členy výboru, kteří se na zasedání nedostavili, tj. hodnota $(n - x)(1 - q)$.

## 3. Specifikace ukazatelů účinnosti rozhodování

*Pravděpodobnost usnášeníschopnosti výboru* je rovna

$$P(X \geq 0,6n) = \sum_{x \geq 0,6n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{6}$$

Pro vybrané $n$ jsou množiny hodnot $(x, y)$ vymezujících oblast usnášeníschopnosti a rovněž oblasti přijetí či zamítnutí návrhu v případě verzí „J" a „P" zachyceny na schématu v Obr.1.

### Verze „J":

*Pravděpodobnost přijetí návrhu* ($n$ dané, $q$ dané, $x \geq 0,6n$)

$$P(Y < x - 0,5n) = \sum_{y < x - 0,5n} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}. \tag{7}$$

*Střední pravděpodobnost přijetí návrhu* ($n$ dané, $q$ dané)

$$E_X P(Y < x - 0,5n) = \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} P(Y < x - 0,5n) P(X = x)$$

$$= \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} \left\{ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \sum_{y < x - 0,5n} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y} \right\}. \tag{8}$$

Obr. 1-1. $n=11$; $0,6n=6,6$; $0,5n=5,5$. Kombinace hodnot $(x,y)$ vedoucí k přijetí resp. zamítnutí návrhu. Kroužek označuje přijetí podle verze "J" i "P", křížek zamítnutí podle verze "J" i "P", zatímco prázdná místa zastupují případy, kdy návrh by ještě byl přijat podle "J", avšak už zamítnut podle "P".

V řádku pro dané $x$ se tedy rozhodování řídí pravidly

o ... $y<x-n/2$

... $x-n/2\le y<x/2$

x ... $x/2\le y$

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | o | o | | | x | x | x | x | | | | |
| 8 | o | o | o | | x | x | x | x | x | | | |
| 9 | o | o | o | o | | x | x | x | x | x | | |
| 10 | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x | |
| 11 | o | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x |

Obr. 1-2. $n=17$; $0,6n=10,2$; $0,5n=8,5$

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | o | o | o | | | | x | x | x | x | x | x | | | | | | |
| 12 | o | o | o | o | | | x | x | x | x | x | x | x | | | | | |
| 13 | o | o | o | o | o | | | x | x | x | x | x | x | x | | | | |
| 14 | o | o | o | o | o | o | | x | x | x | x | x | x | x | x | | | |
| 15 | o | o | o | o | o | o | o | | x | x | x | x | x | x | x | x | | |
| 16 | o | o | o | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x | x | x | x | |
| 17 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x | x | x | x |

Obr. 1-3. $n=29$; $0,6n=17,4$; $0,5n=14,5$.

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | o | o | o | o | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | | | | | |
| 19 | o | o | o | o | o | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | | | | |
| 20 | o | o | o | o | o | o | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | | | |
| 21 | o | o | o | o | o | o | o | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | | |
| 22 | o | o | o | o | o | o | o | o | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | | |
| 23 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | | |
| 24 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | | |
| 25 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | | |
| 26 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | | |
| 27 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | | |
| 28 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | |
| 29 | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |

**Verze „P“:**

*Pravděpodobnost přijetí návrhu* ($n$ dané, $q$ dané, $x \geq 0,6n$)

$$P(Y < 0,5x) = \sum_{y<0,5x} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}. \tag{9}$$

*Střední pravděpodobnost přijetí návrhu* ($n$ dané, $q$ dané)

$$E_X P(Y < 0,5x) = \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} P(Y < 0,5x) P(X = x)))$$

$$= \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} \left\{ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \sum_{y<0,5x} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y} \right\}. \tag{10}$$

**Verze „J“:**

*Očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat – při účasti právě $x$ členů* ($n$ dané, $q$ dané, $x \geq 0,6n$)

$$E_Y P(X - Y | x; Y < x - 0,5n) = x - \frac{1}{P(Y < x - 0,5n)} \sum_{y < x - 0,5n} y P(Y = y)$$

$$= x - \frac{\sum_{y<x-0,5n} y \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}{\sum_{y<x-0,5n} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}} \tag{11}$$

Jak je patrno, omezuje se výpočet na manipulaci s binomickou distribuční funkcí, s event. posunutými parametry.

*Střední očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat* ($n$ dané, $q$ dané)

$$E_X E_Y (X - Y | Y < x - 0,5n; X \geq 0,6n) =$$

$$X_X(X | X \geq 0,6n) - E_X \left\{ \frac{1}{P(Y < x - 0,5n)} \sum_{y<x-0,5n} y P(Y = y) \right\}$$

$$= \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{y \geq 0,6n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} -$$

$$- \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} \frac{\sum_{y<x-0,5n} y \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}{\sum_{y<x-0,5n} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}. \tag{12}$$

**Verze „P“:**

*Očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat - při účasti právě $x$ členů* ($n$ dané, $q$ dané, $x \geq 0,6x$)

$$
\begin{aligned}
&E_Y P(X - Y|x; Y < 0,5x) = \\
&= x - \frac{1}{P(Y < 0,5x)} \sum_{y<0,5x} yP(Y = y) \\
&= x - \frac{\sum_{y<0,5x} y\binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}{\sum_{y<0,5x} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

*Střední očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat* ($n$ dané, $q$ dané)

$$
\begin{aligned}
&E_X E_Y (X - Y|Y < 0,5x; X \geq 0,6n) = \\
&E_X(X|X \geq 0,6n) - E_X \left\{ \frac{1}{P(Y < 0,5x)} \sum_{y<0,5x} yP(Y = y) \right\} \\
&= \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} x\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} - \\
&- \frac{1}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} \frac{\sum_{y<0,5x} y\binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}{\sum_{y<0,5x} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}}
\end{aligned} \tag{14}
$$

*Očekávaný počet nepřítomných členů výboru, kteří by byli hlasovali pro návrh, kdyby byli bývali přítomni - při účasti právě $x$ členů* ($n, q, x$ dané)

$$
E_Y(n - x - Y|n - x; p) = (n - x)(1 - q) \tag{15}
$$

*Střední očekávaný počet nepřítomných členů výboru, kteří by byli hlasovali pro návrh, kdyby byli bývali přítomni*

$$
\begin{aligned}
&E_X\left((n - X)(1 - q)|X \geq 0,6n\right) = \\
&= \frac{1-q}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} (n - x)P(X = x) \\
&= \frac{1-q}{P(X \geq 0,6n)} \sum_{x \geq 0,6n} (n - x)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned} \tag{16}
$$

## 4. Číselné výsledky

Výpočetní program sestavený Mgr. Janou Mazuchovou umožnil tabelovat hodnoty ukazatelů (6) až (16) a zachytit graficky jejich závislosti na parametrech modelu: $n, p, q$, resp. $x$. Pro ilustraci byly vybrány případy s $n = 11, 17$ a 29.

Tab. 1 kvantifikuje prezenci a usnášeníschopnost výboru v závislosti na rozsahu výboru $n$ a docházkové kázni $p$.

Tab. 2 ilustruje pravděpodobnosti přijetí návrhu (7) resp. (8), při aplikaci verze „J" rozhodování. Je zřejmá výrazná závislost ukazatele na počtu přítomných členů výboru $x$ – což je naprosto nežádoucí. Zároveň je tím kvantifikována neschopnost rozhodovací procedury. Zmíněné závislosti lze demonstrovat i graficky, jak činí Obr. 2 (ukazatel (7)) a Obr. 3 (ukazatel (8)).

Šance přijetí návrhu při aplikaci verze „P" rozhodování shrnuje Tab. 3. Uspořádání výsledků je stejné jako u Tab. 2., což usnadňuje srovnání. Nespravedlnost rozhodování (závislost ukazatele (9) na $x$) je odstraněna za cenu určitého snížení závislosti ukazatelů (9) a (10) na $q$.

Očekávaný počet kladně hlasujících členů výboru, v případě, že návrh byl přijat, udává Tab. 4 (ukazatele (11) a (12) pro verzi „J" a Tab. 5 (ukazatele (13) a (14) pro verzi „P" rozhodování. Žádoucí zřejmě je, aby byla hodnota ukazatele co možno vysoká – za všech okolností $p, q, n$, resp. $x$.

Tab. 6 se týká pouze verze „P". Hodnoty ukazatelů (15) a (16) udávají hypotetické počty nepřítomných členů výboru, kteří by se – v souladu s očekáváním, že budou hlasovat tak, jak hlasují členové přítomní – vyslovili pozitivně pro návrh.

## 5. Závěr

Pravidla rozhodování lze formulovat různě. Je však povinností toho, kdo rozhoduje o tom, podle jakých zásad se bude rozhodovat – aby vyvodil a zhodnotil důsledky svého rozhodnutí. To všechno k rozhodování o rozhodování, tj. k meta-rozhodování, patří.

Předkládaná studie je malou úvahou nad dvěma paralelně možnými procedurami rozhodování, které se v akademickém světě běžně užívají. Úvahou opírající se o jednoduchý pravděpodobnostní model posuzování situace.

Rozhodování o lidském jednání nebývá ani tak rozhodováním se mezi dobrým a špatným, jako spíš rozhodováním mezi lepším a horším. Naše studie poskytuje podklady – rozhodnout se musí každý sám.

Tab. 1-1. $n=11$; $0,6n=6,6$. Binomické pravděpodobnosti (1) a pravděpodobnosti usnášeníschopnosti výboru (6).

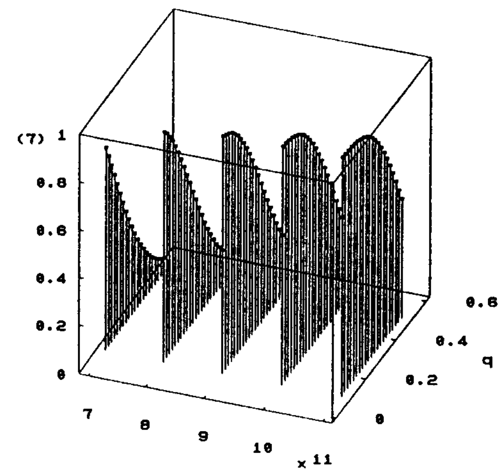
| $x$ | (1) $p=0,7$ | $p=0,8$ | $p=0,9$ |
|---|---|---|---|
| 7 | 0,220 | 0,111 | 0,016 |
| 8 | 0,257 | 0,221 | 0,071 |
| 9 | 0,200 | 0,295 | 0,213 |
| 10 | 0,093 | 0,236 | 0,384 |
| 11 | 0,020 | 0,086 | 0,314 |
| (6) | 0,790 | 0,949 | 0,998 |

Tab. 1-2. $n=17$; $0,6n=10,2$

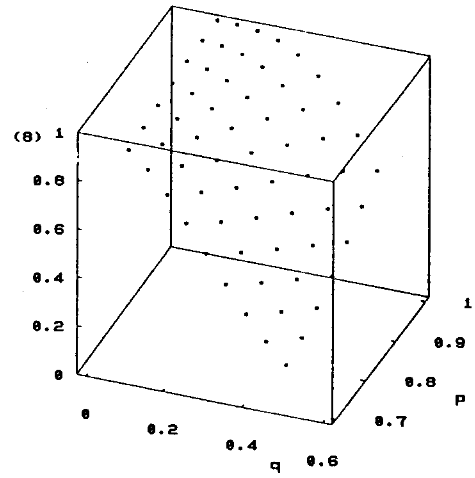
| $x$ | (1) $p=0,7$ | $p=0,8$ | $p=0,9$ |
|---|---|---|---|
| 11 | 0,178 | 0,068 | 0,004 |
| 12 | 0,208 | 0,136 | 0,020 |
| 13 | 0,187 | 0,209 | 0,060 |
| 14 | 0,125 | 0,239 | 0,155 |
| 15 | 0,058 | 0,191 | 0,280 |
| 16 | 0,017 | 0,096 | 0,315 |
| 17 | 0,002 | 0,023 | 0,167 |
| (6) | 0,775 | 0,962 | 1,000 |

Tab. 1-3. $n=29$; $0,6n=17,4$

| $x$ | (1) $p=0,7$ | $p=0,8$ | $p=0,9$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 0,100 | 0,013 | 0,000 |
| 19 | 0,135 | 0,030 | 0,000 |
| 20 | 0,157 | 0,059 | 0,001 |
| 21 | 0,157 | 0,101 | 0,005 |
| 22 | 0,133 | 0,147 | 0,015 |
| 23 | 0,095 | 0,179 | 0,042 |
| 24 | 0,055 | 0,179 | 0,095 |
| 25 | 0,026 | 0,143 | 0,171 |
| 26 | 0,009 | 0,088 | 0,236 |
| 27 | 0,002 | 0,039 | 0,236 |
| 28 | 0,000 | 0,011 | 0,152 |
| 29 | 0,000 | 0,002 | 0,047 |
| (6) | 0,871 | 0,993 | 1,000 |




Obr.2-1,n=11




Obr.3-1,n=11

Tab. 2-1. Verze "J", $n$=11. Podmíněné, resp. střední podmíněné pravděpodobnosti pojetí návrhu (7) resp. (8).

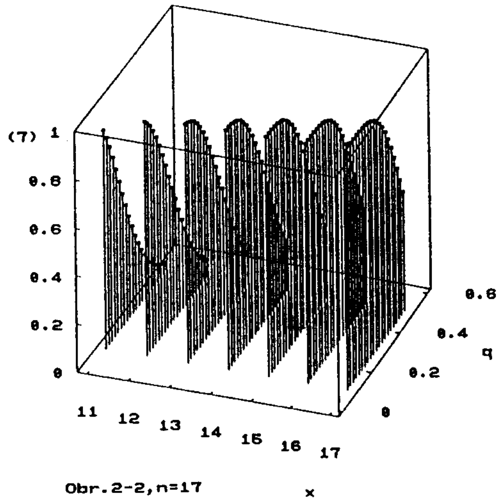
| | (7) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 7 | 0,850 | 0,577 | 0,329 | 0,159 | 0,063 |
| 8 | 0,962 | 0,797 | 0,552 | 0,315 | 0,145 |
| 9 | 0,992 | 0,914 | 0,730 | 0,483 | 0,254 |
| 10 | 0,998 | 0,967 | 0,850 | 0,633 | 0,377 |
| 11 | 1,000 | 0,988 | 0,922 | 0,754 | 0,500 |
| $p$=0,7 (8) | 0,944 | 0,790 | 0,578 | 0,363 | 0,186 |
| $p$=0,8 (8) | 0,970 | 0,867 | 0,689 | 0,468 | 0,259 |
| $p$=0,9 (8) | 0,992 | 0,943 | 0,817 | 0,609 | 0,368 |

Tab. 2-2. $n$=17

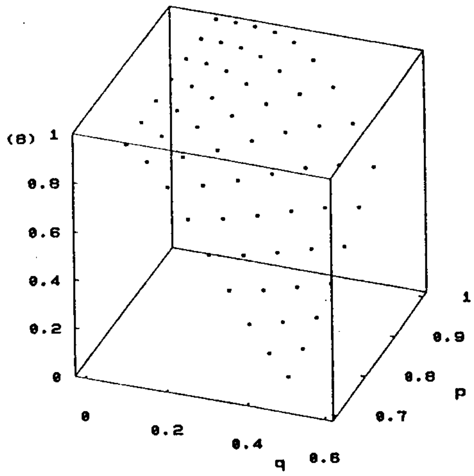
| | (7) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 11 | 0,910 | 0,617 | 0,313 | 0,119 | 0,033 |
| 12 | 0,974 | 0,795 | 0,492 | 0,225 | 0,073 |
| 13 | 0,994 | 0,901 | 0,654 | 0,353 | 0,133 |
| 14 | 0,999 | 0,956 | 0,781 | 0,486 | 0,212 |
| 15 | 1,000 | 0,982 | 0,869 | 0,610 | 0,304 |
| 16 | 1,000 | 0,993 | 0,926 | 0,716 | 0,402 |
| 17 | 1,000 | 0,997 | 0,960 | 0,801 | 0,500 |
| $p$=0,7 (8) | 0,972 | 0,825 | 0,575 | 0,315 | 0,126 |
| $p$=0,8 (8) | 0,988 | 0,906 | 0,715 | 0,450 | 0,208 |
| $p$=0,9 (8) | 0,998 | 0,974 | 0,866 | 0,631 | 0,338 |

Tab. 2-3. $n$=29

| | (7) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 18 | 0,902 | 0,501 | 0,165 | 0,033 | 0,004 |
| 19 | 0,965 | 0,673 | 0,282 | 0,070 | 0,010 |
| 20 | 0,989 | 0,804 | 0,416 | 0,126 | 0,021 |
| 21 | 0,997 | 0,891 | 0,551 | 0,200 | 0,039 |
| 22 | 0,999 | 0,944 | 0,671 | 0,290 | 0,067 |
| 23 | 1,000 | 0,973 | 0,771 | 0,388 | 0,105 |
| 24 | 1,000 | 0,987 | 0,847 | 0,489 | 0,154 |
| 25 | 1,000 | 0,994 | 0,902 | 0,586 | 0,212 |
| 26 | 1,000 | 0,998 | 0,940 | 0,674 | 0,279 |
| 27 | 1,000 | 0,999 | 0,964 | 0,750 | 0,351 |
| 28 | 1,000 | 1,000 | 0,979 | 0,813 | 0,425 |
| 29 | 1,000 | 1,000 | 0,988 | 0,864 | 0,500 |
| $p$=0,7 (8) | 0,980 | 0,825 | 0,518 | 0,217 | 0,055 |
| $p$=0,8 (8) | 0,997 | 0,945 | 0,748 | 0,417 | 0,137 |
| $p$=0,9 (8) | 1,000 | 0,995 | 0,924 | 0,675 | 0,294 |




Obr. 2-2, n=17




Obr. 3-2, n=17

Tab. 3-1. Verze "P", $n$=11. Podmíněné resp. střední pravděpodobnosti přijetí návrhu (9) resp. (10).

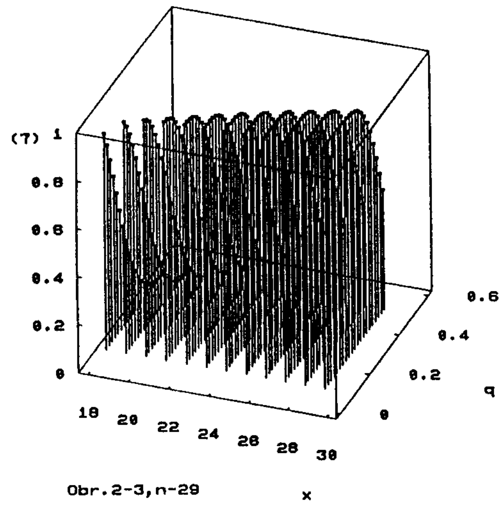
| $x$ | (9) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0,997 | 0,967 | 0,874 | 0,710 | 0,500 |
| 8 | 0,995 | 0,944 | 0,806 | 0,594 | 0,363 |
| 9 | 0,999 | 0,981 | 0,901 | 0,734 | 0,500 |
| 10 | 0,999 | 0,967 | 0,849 | 0,633 | 0,377 |
| 11 | 1,000 | 0,988 | 0,922 | 0,754 | 0,500 |
| p=0,7 (10) | 0,997 | 0,963 | 0,857 | 0,670 | 0,441 |
| p=0,8 (10) | 0,998 | 0,968 | 0,865 | 0,675 | 0,438 |
| p=0,9 (10) | 0,999 | 0,975 | 0,881 | 0,691 | 0,443 |

Tab. 3-2. $n$=17

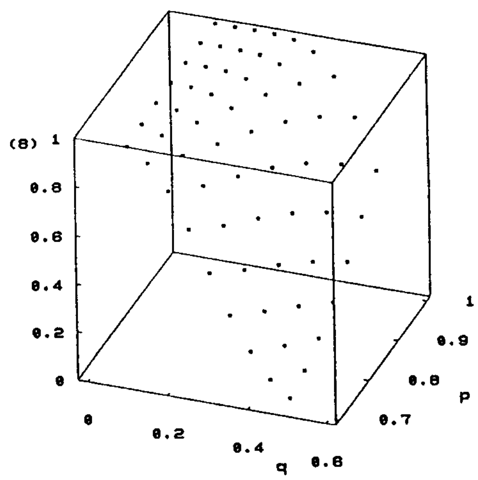
| $x$ | (9) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,999 | 0,988 | 0,921 | 0,753 | 0,500 |
| 12 | 0,999 | 0,980 | 0,882 | 0,665 | 0,387 |
| 13 | 0,999 | 0,992 | 0,938 | 0,771 | 0,500 |
| 14 | 0,999 | 0,988 | 0,907 | 0,692 | 0,395 |
| 15 | 0,999 | 0,996 | 0,949 | 0,787 | 0,500 |
| 16 | 0,999 | 0,993 | 0,926 | 0,841 | 0,402 |
| 17 | 0,999 | 0,997 | 0,960 | 0,801 | 0,500 |
| p=0,7 (10) | 0,999 | 0,988 | 0,915 | 0,726 | 0,450 |
| p=0,8 (10) | 0,999 | 0,990 | 0,923 | 0,734 | 0,448 |
| p=0,9 (10) | 0,999 | 0,994 | 0,935 | 0,749 | 0,451 |

Tab. 3-3. $n$=29

| $x$ | (9) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0,999 | 0,996 | 0,940 | 0,737 | 0,407 |
| 19 | 0,999 | 0,998 | 0,967 | 0,813 | 0,500 |
| 20 | 0,999 | 0,997 | 0,952 | 0,755 | 0,412 |
| 21 | 0,999 | 0,999 | 0,974 | 0,826 | 0,500 |
| 22 | 0,999 | 0,998 | 0,961 | 0,772 | 0,416 |
| 23 | 0,999 | 0,999 | 0,979 | 0,836 | 0,500 |
| 24 | 0,999 | 0,999 | 0,969 | 0,787 | 0,419 |
| 25 | 0,999 | 0,999 | 0,982 | 0,846 | 0,500 |
| 26 | 0,999 | 0,999 | 0,974 | 0,801 | 0,423 |
| 27 | 0,999 | 0,999 | 0,986 | 0,855 | 0,500 |
| 28 | 0,999 | 0,999 | 0,979 | 0,815 | 0,425 |
| 29 | 0,999 | 0,999 | 0,988 | 0,864 | 0,500 |
| p=0,7 (10) | 0,999 | 0,998 | 0,964 | 0,792 | 0,455 |
| p=0,8 (10) | 0,999 | 0,999 | 0,972 | 0,809 | 0,459 |
| p=0,9 (10) | 0,999 | 0,999 | 0,979 | 0,826 | 0,461 |




Obr.2-3,n-29




Obr.3-3,n=29

Tab. 4-1. Verze "J", $n$=11. Očekávaný počet resp. střední očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat - podle (11) resp. (12)

| | (11) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 7 | 6,562 | 6,363 | 6,250 | 6,176 | 6,125 |
| 8 | 7,293 | 6,842 | 6,567 | 6,391 | 6,270 |
| 9 | 8,127 | 7,431 | 6,958 | 6,647 | 6,438 |
| 10 | 9,006 | 8,109 | 7,424 | 6,951 | 6,632 |
| 11 | 9,901 | 8,847 | 7,958 | 7,303 | 6,854 |
| $p$=0,7 (12) | 7,568 | 7,058 | 6,714 | 6,485 | 6,330 |
| $p$=0,8 (12) | 8,129 | 7,466 | 6,991 | 6,667 | 6,448 |
| $p$=0,9 (12) | 8,940 | 8,079 | 7,413 | 6,945 | 6,627 |

Tab. 4.2. $n$=17

| | (11) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 11 | 10,11 | 9,66 | 9,43 | 9,29 | 9,19 |
| 12 | 10,88 | 10,14 | 9,71 | 9,47 | 9,31 |
| 13 | 11,73 | 10,71 | 10,06 | 9,68 | 9,44 |
| 14 | 12,61 | 11,36 | 10,48 | 9,93 | 9,59 |
| 15 | 13,50 | 12,08 | 10,96 | 10,22 | 9,76 |
| 16 | 14,40 | 12,84 | 11,49 | 10,55 | 9,96 |
| 17 | 15,30 | 13,62 | 12,08 | 10,92 | 10,17 |
| $p$=0,7 (12) | 11,47 | 10,58 | 9,99 | 9,64 | 9,41 |
| $p$=0,8 (12) | 12,41 | 11,27 | 10,44 | 9,91 | 9,58 |
| $p$=0,9 (12) | 13,78 | 12,34 | 11,16 | 10,35 | 9,84 |

Tab. 4-3. $n$=29

| | (11) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
| 18 | 16,48 | 15,78 | 15,46 | 15,29 | 15,19 |
| 19 | 17,22 | 16,17 | 15,68 | 15,42 | 15,27 |
| 20 | 18,05 | 16,65 | 15,93 | 15,57 | 15,36 |
| 21 | 18,92 | 17,21 | 16,24 | 15,73 | 15,45 |
| 22 | 19,81 | 17,84 | 16,59 | 15,92 | 15,56 |
| 23 | 20,70 | 18,54 | 16,99 | 16,13 | 15,67 |
| 24 | 21,60 | 19,27 | 17,45 | 16,38 | 15,80 |
| 25 | 22,50 | 20,04 | 17,96 | 16,65 | 15,94 |
| 26 | 23,40 | 20,82 | 18,51 | 16,96 | 16,10 |
| 27 | 24,30 | 21,61 | 19,11 | 17,30 | 16,27 |
| 28 | 25,20 | 22,40 | 19,73 | 17,67 | 16,46 |
| 29 | 26,10 | 23,20 | 20,38 | 18,08 | 16,67 |
| $p$=0,7 (12) | 18,89 | 17,29 | 16,30 | 15,76 | 15,47 |
| $p$=0,8 (12) | 20,94 | 18,81 | 17,21 | 16,25 | 15,73 |
| $p$=0,9 (12) | 23,49 | 20,91 | 18,62 | 17,03 | 16,14 |

Tab. 5-1. Verze "P", $n$=11. Očekávaný resp. střední očekávaný počet členů výboru hlasujících pro návrh, za předpokladu, že návrh bude přijat - podle (13) resp. (14)

| $x$ | (13) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 6,31 | 5,70 | 5,21 | 4,85 | 4,59 |
| 8 | 7,22 | 6,56 | 6,07 | 5,74 | 5,51 |
| 9 | 8,10 | 7,27 | 6,59 | 6,08 | 5,73 |
| 10 | 9,01 | 8,11 | 7,42 | 6,95 | 6,63 |
| 11 | 9,90 | 8,85 | 7,96 | 7,30 | 6,85 |
| $p$=0,7 (14) | 7,47 | 6,74 | 6,17 | 5,76 | 5,48 |
| $p$=0,8 (14) | 8,08 | 7,27 | 6,64 | 6,19 | 5,87 |
| $p$=0,9 (14) | 8,93 | 8,01 | 7,28 | 6,76 | 6,40 |

Tab. 5-2. $n$=17

| $x$ | (13) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 9,90 | 8,85 | 7,96 | 7,30 | 6,85 |
| 12 | 10,80 | 9,68 | 8,78 | 8,16 | 7,75 |
| 13 | 11,70 | 10,43 | 9,33 | 8,51 | 7,97 |
| 14 | 12,60 | 11,25 | 10,13 | 9,36 | 8,86 |
| 15 | 13,50 | 12,02 | 10,71 | 9,72 | 9,07 |
| 16 | 14,40 | 12,84 | 11,49 | 10,55 | 9,96 |
| 17 | 15,30 | 13,62 | 12,08 | 10,92 | 10,17 |
| $p$=0,7 (14) | 11,40 | 10,18 | 9,15 | 8,42 | 7,93 |
| $p$=0,8 (14) | 12,38 | 11,05 | 9,91 | 9,09 | 8,55 |
| $p$=0,9 (14) | 13,77 | 12,28 | 10,97 | 10,02 | 9,40 |

Tab. 5-3. $n$=29

| $x$ | (13) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 16,20 | 14,42 | 12,86 | 11,74 | 11,05 |
| 19 | 17,10 | 15,21 | 13,46 | 12,12 | 11,26 |
| 20 | 18,00 | 16,02 | 14,23 | 12,93 | 12,14 |
| 21 | 18,90 | 16,81 | 14,84 | 13,32 | 12,35 |
| 22 | 19,80 | 17,61 | 15,60 | 14,12 | 13,22 |
| 23 | 20,70 | 18,41 | 16,22 | 14,51 | 13,43 |
| 24 | 21,60 | 19,21 | 16,97 | 15,30 | 14,31 |
| 25 | 22,50 | 20,00 | 17,61 | 15,70 | 14,52 |
| 26 | 23,40 | 20,80 | 18,35 | 16,49 | 15,38 |
| 27 | 24,30 | 21,60 | 18,99 | 16,89 | 15,59 |
| 28 | 25,20 | 22,40 | 19,73 | 17,67 | 16,46 |
| 29 | 26,10 | 23,20 | 20,38 | 18,08 | 16,67 |
| $p$=0,7 (14) | 18,83 | 16,75 | 14,82 | 13,38 | 12,48 |
| $p$=0,8 (14) | 20,92 | 18,60 | 16,43 | 14,76 | 13,73 |
| $p$=0,9 (14) | 23,49 | 20,88 | 18,39 | 16,45 | 15,27 |

Tab. 6-1. $n$=11. Očekávaný počet resp. střední očekávaný počet nepřítomných členů výboru, kteří by byli hlasovali pro návrh, kdyby byli bývali přítomni - podle (15) resp. (16)

| $x$ | (15) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3,6 | 3,2 | 2,8 | 2,4 | 2,0 |
| 8 | 2,7 | 2,4 | 2,1 | 1,8 | 1,5 |
| 9 | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 1,2 | 1,0 |
| 10 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| p=0,7 (16) | 2,443 | 2,171 | 1,900 | 1,628 | 1,357 |
| p=0,8 (16) | 1,834 | 1,629 | 1,426 | 1,222 | 1,019 |
| p=0,9 (16) | 0,980 | 0,872 | 0,763 | 0,653 | 0,555 |

Tab. 6-2. $n$=29

| $x$ | (15) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 3,0 |
| 12 | 4,5 | 4,0 | 3,5 | 3,0 | 2,5 |
| 13 | 3,6 | 3,2 | 2,8 | 2,4 | 2,0 |
| 14 | 2,7 | 2,4 | 2,1 | 1,8 | 1,5 |
| 15 | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 1,2 | 1,0 |
| 16 | 0,5 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| p=0,7 (16) | 3,907 | 3,472 | 3,038 | 2,604 | 2,170 |
| p=0,8 (16) | 2,920 | 2,596 | 2,271 | 1,947 | 1,622 |
| p=0,9 (16) | 1,526 | 1,356 | 1,187 | 1,017 | 0,848 |

Tab. 6-3. $n$=29

| $x$ | (15) $q$=0,1 | $q$=0,2 | $q$=0,3 | $q$=0,4 | $q$=0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 9,9 | 8,8 | 7,7 | 6,6 | 5,5 |
| 19 | 9,0 | 8,0 | 7,0 | 6,0 | 5,0 |
| 20 | 8,1 | 7,2 | 6,3 | 5,4 | 4,5 |
| 21 | 7,2 | 6,4 | 5,6 | 4,8 | 4,0 |
| 22 | 6,3 | 5,6 | 4,9 | 4,2 | 3,5 |
| 23 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 3,0 |
| 24 | 4,5 | 4,0 | 3,5 | 3,0 | 2,5 |
| 25 | 3,6 | 3,2 | 2,8 | 2,4 | 2,0 |
| 26 | 2,7 | 2,4 | 2,1 | 1,8 | 1,5 |
| 27 | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 1,2 | 1,0 |
| 28 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 |
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| p=0,7 (16) | 7,273 | 6,465 | 5,657 | 4,849 | 4,040 |
| p=0,8 (16) | 5,178 | 4,603 | 4,028 | 3,452 | 2,877 |
| p=0,9 (16) | 2,610 | 2,320 | 2,030 | 1,740 | 1,450 |

## LITERATURA:

Likeš J., Laga J. : *Základní statistické tabulky* . SNTL Praha, 1978.

# Impact factor

*Jiří Anděl*

V současné době na některých fakultách probíhá proces zvaný evaluace. Přitom se kromě jiných činností hodnotí také vědecká práce fakulty. Jedním z ukazatelů je pochopitelně publikační aktivita. Přitom je snaha odlišit články, které jsou publikovány v málo známých či zcela neznámých časopisech, od článků, které vyšly v předních světových periodikách. Jednou z nejjednodušších metod, jak toho dosáhnout, je rozlišit časopisy na ty, které mají kladný impact factor, od těch, které ho nemají vůbec. Jak uvidíme na konci tohoto příspěvku, ani tento postup bohužel nedává zcela objektivní výsledky.

| Pořadí podle počtu impaktovaných časopisů | Obor | Počet časopisů | Zařazení |
|---|---|---|---|
| 6 | Mathematics | 115 | M |
| 7 | Computer Applications and Cybernetics | 114 | I |
| 18 | Mathematics, Applied | 74 | M |
| 23 | Physics | 63 | F |
| 43 | Physics, Applied | 43 | F |
| 47 | Mechanics | 42 | F |
| 48 | Polymer Science | 42 | F |
| 62 | Astronomy and Astrophysics | 35 | F |
| 64 | Biophysics | 34 | F |
| 67 | Statistics and Probability | 33 | M |
| 70 | Physics, Condensed Matter | 32 | F |
| 72 | Operation Research and Management Science | 29 | M |
| 75 | Meteorology and Atmospheric Sciences | 28 | F |
| 25 | Optics | 25 | F |
| 81 | Spectroscopy | 23 | F |
| 86 | Acoustic | 19 | F |
| 100 | Crystalography | 15 | F |
| 101 | Physics, Atomic, Molecular and Chemical | 15 | F |
| 105 | Physics, Nuclear | 14 | F |
| 111 | Microscopy | 11 | F |
| 113 | Physics, Mathematical | 11 | F |
| 117 | Physics, Fluids and Plasmas | 10 | F |
| 118 | Physics, Particles and Fields | 10 | F |
| 125 | Mathematics, Miscellaneous | 6 | M |

Tab. 1: Počet časopisů s *IF* v jednotlivých vědních oborech

O tom, co to je onen impact factor (dále jen *IF*), jsem psal již v článku *Publikace a citace*, který byl uveřejněn v *Bulletinu ČSS* v r. 1993 v čísle

1 na str. 3 až 5. Připomenu tedy již jen zcela stručně, že *IF* vyjadřuje četnost citací článků daného časopisu v daném roce připadající na jeden článek. Aktuální informace o *IF* se najdou v časopisu *Science Citation Index*. Podívejme se na rok 1993.

Věda je tu rozdělena do 127 oborů. Největší počet časopisů se zaznamenávaným *IF*, a to 149, má vědní obor Biochemistry and Molecular Biology; nejmenší počet, pouhé 4, má Andrology. Informaci o oborech souvisejících s matematikou, fyzikou a informatikou uvádím v tab. 1. Pořadí se vztahuje k tomu, kolik časopisů s *IF* je v daném oboru uváděno. Pro snazší orientaci píši také, kam daný obor zařazuji (F je fyzika, I je informatika a M je matematika). Hranice pro zařazení však jsou velmi neostré a možná i dosti sporné.

Z tab. 1 lze vyvodit, že fyzika má 472 časopisů s *IF*, informatika 114 a matematika 257.

Povšimněme si nyní, jak to vypadá s *IF* u časopisů z oblasti matematické statistiky a teorie pravděpodobnosti. Jak vidíme z tab. 1, je jich 33. Pokud si vzpomeneme na zmíněný článek Publikace a citace, tam bylo za rok 1988 uvedeno rovněž 33 časopisů s *IF* z této vědní oblasti. S překvapením jsem zjistil, že to jsou tytéž časopisy. Vývoj jejich *IF* zachycuje tab. 2.

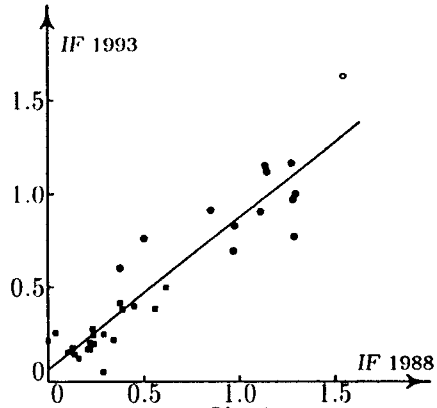
Je samozřejmé, že se během času *IF* mění. Změna, která mě však přece jen poněkud překvapila, se týká časopisu *Theory of Probability and its Applications*, kde *IF* poklesl z hodnoty 0.287 v roce 1988 na hodnotu 0.053 v roce 1993.

Pokud jde o časopisy vydávané v České republice, tak *Kybernetika* (uváděná v oboru Computer Applications and Cybernetics) měla v roce 1988 *IF* 0.279 a v r. 1993 měla *IF* 0.247. *Czech Mathematical Journal* v r. 1993 měl *IF* 0.124. To by snad šlo porovnat s *IF* časopisu *Czechoslovak Mathematical Journal*, kde hodnota *IF* v r. 1985 byla 0.065 a v r. 1986 byla 0.157.

Tabulka 2 již poskytuje tolik statistických dat, že stojí za to se na ni podívat i z odborného hlediska. Nejjednodušší postup by patrně spočíval v přímém vyhodnocení rozdílů. Průměrný rozdíl *IF* mezi rokem 1988 a 1993 je $-0.045$ a oboustranný jednovýběrový $t$ test ho označuje jako nevýznamný ($T = -1.553$, hladina 0.130). Tím bychom dospěli k závěru, že citovanost uvedených 33 periodik nepatrně poklesla, ale že tento pokles není statisticky významný. Zmíněný postup však nebere v úvahu případnou závislost na velikosti *IF*.

Každý časopis uvedený v tab. 2 je popsán bodem v rovině o souřadnicích (*IF* 1988, *IF* 1993). Na obr. 1 jsou tyto body vyneseny do grafu a je jimi proložena přímka metodou nejmenších čtverců. Rovnice této přímky je

$$y = 0.063 + 0.811x.$$




Obr. 1

Absolutní člen je nevýznamný ($T = 1.555$, hladina při oboustranném testu je 0.130), regresní koeficient je vysoce signifikantní ($T = 14.539$, hladina je 0.00000 při oboustranném testu). Chceme-li však testovat přirozenou hypotézu, že teoretický regresní koeficient je roven jedné, dostaneme hodnotu $T = -3.392$. Hladina tohoto výsledku při oboustranném testu je 0.00191. To tedy ukazuje, že přece jen k jistému snižování *IF* u těchto časopisů dochází.

Výběrový korelační koeficient vyšel 0.934. Mimochodem, Spearmanův korelační koeficient činí 0.893 a je také samozřejmě signifikantní s hladinou 0.0000.

Tyto výsledky vypovídají o tom, že zmíněné časopisy jsou z hlediska *IF* celkem stálice na obloze nad matematickou statistikou a teorií pravděpodobnosti. Jejich *IF* se mění relativně málo.

Kdyby nás napadlo provést shlukovou analýzu a rozhodli bychom se pro dva shluky, pak pomocí programu *STATGRAPHICS* metoda *AVERAGE* dá do jednoho shluku časopis *Journal of the Royal Statistical Society A* (*JRSS A*) a do druhého shluku všechny ostatní časopisy. V případě tří shluků to dopadne tak, jak vidíme na obr. 1. Jeden shluk tvoří bod s prázdným kolečkem, druhý shluk body s plnými kolečky a třetí shluk body označené jako čtverečky. Není asi třeba dodávat, že bod tvořící samostatný shluk je opět časopis *JRSS A*. Při použití jiných metod shlukové analýzy se dostanou výsledky více nebo méně odlišné. Např. metody *FURTHEST* a *MEDIAN* ze dvou černých kroužků zcela vlevo nad regresní přímkou udělají čtverečky.

| Jméno časopisu | *IF* 1988 | *IF* 1993 | Rozdíl | *S* |
|---|---|---|---|---|
| Journal of the Royal Statistical Society A | 1.545 | 1.628 | 0.083 | 1 |
| Biometrika | 1.293 | 1.000 | −0.293 | 2 |
| The American Statistician | 1.287 | 0.769 | −0.518 | 2 |
| Annals of Statistics | 1.278 | 0.967 | −0.311 | 2 |
| Journal of the American Statistical Association | 1.274 | 1.169 | −0.105 | 2 |
| Biometrics | 1.145 | 1.119 | −0.026 | 2 |
| Journal of the Royal Statistical Society B | 1.133 | 1.153 | 0.020 | 2 |
| Advances in Applied Probability | 1.110 | 0.904 | −0.206 | 2 |
| International Statistical Review | 0.976 | 0.825 | −0.151 | 2 |
| Annals of Probability | 0.968 | 0.689 | −0.279 | 2 |
| Technometrics | 0.849 | 0.911 | 0.062 | 2 |
| Probability Theory and Related Fields | 0.614 | 0.496 | −0.118 | 3 |
| Journal of Applied Probability | 0.558 | 0.383 | −0.175 | 3 |
| Applied Statistics (JRSS C) | 0.500 | 0.758 | 0.258 | 2 |
| Stochastic Processes and their Applications | 0.449 | 0.399 | −0.050 | 3 |
| Fuzzy Sets and Systems | 0.389 | 0.380 | −0.009 | 3 |
| Scandinavian Journal of Statistics | 0.375 | 0.600 | 0.225 | 2 |
| Journal of Multivariate Analysis | 0.374 | 0.416 | 0.042 | 3 |
| Statistics and Probability Letters | 0.339 | 0.223 | −0.116 | 3 |
| Journal of Statistical Planning and Inference | 0.288 | 0.251 | −0.037 | 3 |
| Theory of Probability and its Applications | 0.286 | 0.053 | −0.233 | 3 |
| South African Statistical Journal | 0.238 | 0.200 | −0.038 | 3 |
| Canadian Journal of Statistics | 0.236 | 0.250 | 0.014 | 3 |
| Annals of the Institute of Statistical Mathematics | 0.233 | 0.279 | 0.046 | 3 |
| Communications in Statistics — Data Analysis | 0.219 | 0.209 | −0.010 | 3 |
| The Statistician | 0.218 | 0.171 | −0.047 | 3 |
| Sankhyā A | 0.205 | 0.173 | −0.032 | 3 |
| Sankhyā B | 0.159 | 0.123 | −0.036 | 3 |
| Utilitatis Mathematicae | 0.136 | 0.145 | 0.009 | 3 |
| Communications in Statistics — Theory Methods | 0.128 | 0.180 | 0.052 | 3 |
| Communications in Statistics — Simulation | 0.103 | 0.157 | 0.054 | 3 |
| Annales de l'Institut Henri Poincaré | 0.040 | 0.260 | 0.220 | 3 |
| Stochastic Hydrology and Hydraulics | 0.000 | 0.217 | 0.217 | 3 |

Tab. 2: Časopisy s *IF* v oboru statistika a pravděpodobnost ($S$ = shluk)

Za jeden z velmi problematických bodů při používání *IF* pokládám to, že počet časopisů, v nichž se *IF* sleduje, je velmi omezený a zřejmě se v čase nemění. V oblasti matematické statistiky jsou například ignorovány časopisy *Journal of Time Series Analysis*, *Statistics*, *Journal of Forecasting* a mnohé další. Ostatní oblasti matematiky jsou na tom podobně. Ještě štěstí, že v seznamu máme *Kybernetiku* a *Czech Mathematical Journal*.

# Domesday Book

*Petra Coufalová a Jan Coufal, VŠE v Praze*

Anglie se na rozdíl od ostatních evropských zemí může pochlubit přesnými údaji o počtu obyvatel, zaznamenanými již koncem 11. století. *Vilém Dobyvatel* nařídil totiž roku 1086, dvacet let po svém vítězném tažení proti Anglii, aby jeho úředníci provedli v této zemi první sčítání lidu. Pokud bychom se zajímali o to kolik lidí, ale i koní, ovcí, drůbeže atd. bylo na konci 11. století v Anglii, stačí se obrátit na Domesday Book.

Rok 1066 byl v dějinách Anglie skutečně mimořádný. Na jejím královském trůnu se vystřídali tři králové [1], tři králové také zemřeli na anglické půdě [2] a v průběhu 24 dní se odehráli tři významné bitvy. V té rozhodující, 14. října u Hastingsu, padl král Harold II. Vítěz, normanský vévoda Vilém, byl o Vánocích korunován jako anglický král a stal se zakladatelem nové dynastie. Vládl v Anglii do své smrti roku 1087 a zapsal se do jejich dějin mnoha pozoruhodnými činy – mj. tím, že nařídil sčítání lidu, tak např. známe složení různých tříd po dvaceti letech normanského panství.

Rozhodnutí splnit tento gigantický úkol padlo v lednu 1086, protože v roce 1085 Vilém Dobyvatel *"přinesl svoji korunu do Gloucestru a měl tam učenou rozpravu se svými moudrými muži"* . Na tomto sněmu prohlásil, že *danegeld* [3] vybraný v minulém roce byl ošizený. *Danegeld* býval velmi vý-

[1] Eduard III. Vyznavač, *svatý Eduard* (* asi 1002 – †5.1.1066) – syn Ethelreda II. Anglický král od roku 1042 (po vyhnání Dánů), poslední z rodu Cerdikovců. Do roku 1042 žil v Normandii u normanského vévody Viléma I. Dobyvatele, kterého údajně roku 1051 určil za svého nástupce v Anglii, což vedlo k normanské invazi roku 1066. Roku 1161 kanonizován.

Harold II. (* asi 1022 – †14.10.1066) – poslední anglosaský anglický král, syn hraběte Godwina z Essexu. Nastoupil na trůn v roce 1066 po smrti posledního Cerdikovce Eduarda III. Vyznavače. 25.9.1066 porazil na severu Anglie u Stamford Bridge vojsko norského krále Haralda III. Krutého, nápadníka na anglický trůn, ale 14.10.1066 po francouzsko-normanské invazi na jihu Anglie byl poražen vojsky normanského vévody Viléma I. Dobyvatele a zabit v bitvě u Hastingsu.

Vilém I. Dobyvatel (* 1027 nebo 1028 – †6.9.1087) – od roku 1035 normanský vévoda, roku 1066 založil normanskou dynastii v Anglii. Spřízněn s anglosaským rodem Cerdikovců, vystoupil s nároky na jeho dědictví po smrti Eduarda III. Vyznavače; v říjnu 1066 se se svým vojskem vylodil na jihu Anglie a v bitvě u Hastingsu porazil vyčerpané vojsko posledního anglosaského krále Harolda II. Dobyl celou zemi, potlačil odpor anglosaské šlechty a konfiskovanou půdu přidělil normanským šlechticům.

[2] Eduard III. Vyznavač 5.1.1066, norský král Harald III. Krutý 25.9.1066 a poslední anglosaský král Harold II. 14.10.1066

[3] *Danegeld* – peníze pro Dány. V Anglosaské kronice je na stránkách, týkajících se druhé poloviny desátého století, stejně smutné líčení jako v dobách prvních vpádů Dánů

nosnou daní (v roce 999 vynesl deset tisíc liber, v roce 1002 dvacet čtyři tisíc liber a v roce 1018 – v době vlády dánského krále Knuta – sedmdesát dva tisíce liber), pokud však měl být její výběr úspěšný, bylo nutné mít přesný seznam všech pozemků království. Na této gloucesterské radě bylo rozhodnuto, že zemí projedou baroni jako zvláštní komisaři. Královští komisaři se svého nelehkého a jedinečného úkolu zhostili dokonale. První všeobecný census v Evropě od dob římského impéria se totiž týkal nejen lidí, ale i rozsahu obdělávané půdy, vlastnictví pozemků, jejich výměry a polohy, majetků jednotlivých panství, počtu lidí zaměstnávaných na velkostatcích, počtu kusů dobytka, drůbeže a všeho ostatního domácího zvířectva a vůbec majetkových poměrů všech rolníků, služebnictva, pánů ... Podle kronikáře dostali komisaři tyto pokyny: *"Královští baroni se měli pod přísahou dotázat šerifa, příslušného* shire, *všech baronů a jejich Francouzů, a pokud jde o* hundreds, *všech farářů,* reeves *(správců) a šesti* villeins *(poddaných sedláků) z každé vesnice, jak se jmenuje místní zámek, kdo v něm žil za vlády krále Eduarda a kdo v něm žije nyní, dále měli zjistit počet* hides [4] *jednotlivých pozemků, počet pluhů na panství, počet poddaných sedláků* [5] *, počet svobodníků, počet socmanů, rozlohu lesů, rozlohu luk, počet mlýnů, počet a velikost lovných rybníků, a to vše třikrát – podle stavu za krále Eduarda, podle stavu v době, kdy král Vilém panství propůjčil a podle současného stavu –, a konečně měli zjistit dotazem, o kolik je možné vytěžit více než nyní."*

Práce trvala osm až deset měsíců, komisaři tedy splnili uložený úkol. Vý-

---

(tj. období konce osmého století). Zpočátku je to jenom hrstka lupičů na sedmi nebo osmi člunech, později skutečné loďstvo, poté vojsko a nakonec vojska. Nový nájezd spadá do doby, kdy vládl neschopný král *Ethelred II*. Místo obrany se tento král vrátil k tomu nejzbabělejšímu způsobu a vykoupil se odjezd nepřátelských vojsk poplatkem v hodnotě deset tisíc liber. K zaplacení takové obromné částky musel uložit zvláštní daň – *danegeld*, která činila ti nebo čtyři šilinky na jednu hidu vlastněné země. Když nastoupil Dán Knut na anglický trůn, tak nadále vybíral *danegeld* neboli *geld*, tuto základní daň, kterou uznalo všechno obyvatelstvo, odkázal Vilému Dobyvateli.

[4] *hide* – lán – byl výměrou pozemku nutnou k životu jedné rodiny už ze saských dob

[5] V saských dobách byla hierarchie sedláků stejně složitá jako hierarchie šlechticů, protože získaná práva vytvářela rozdílné statuty. Tehdy se rozeznávali svobodní rolníci neboli svobodníci (*freemen*), rolníci s lenní povinností (*socmen*), kteří měli téměř stejný statut jako svobodníci, dále *cottarii* a *bordarii* (*cotters, bordars*). Normanští páni, kteří dost dobře nechápali rozdíly mezi těmito skupinami, nebrali na toto rozdělení prakticky žádné ohledy. Všichni rolníci se stávají poddanými (*villiens*) obdělávajícími jeden lán (*virgate*), přibližně třicet akrů, nebo cottery, obdělávajícími pouze čtyři nebo pět akrů. Pro malého svobodného nebo napůl svobodného hospodáře nastávají tvrdé časy., např. v cambridgském hrabství žilo za Eduarda Vyznavače asi devět set socmanů, a v roce 1086 již jenom asi dvě stě.

sledkem bylo 1666 pergamenů obsahujících všechny dostupné údaje o Anglii doby krále Viléma I. Dobyvatele nesoucích souhrnný název *Domesday Book* neboli *Kniha posledního soudu*. Název Domesday Book má původ v biblické knize posledního soudu, podle níž bude každý spravedlivě posuzován. Podobná statistická šetření se nepochybně prováděla i v době saských králů, protože bez nich by taková daň jako *danegeld* nemohla být vůbec vybírána, ale šetření, které nařídil Vilém Dobyvatel, vyniká svou úzkostlivou přesností. Soupis připravili autoři ve zjednodušené latině a rozdělili do dvou dílů

- tzv. Malého Domesday [6] , který obsahuje oblast hrabství Essex, Norfolk a Suffolk, a
- tzv. Velkého Domesday [7] , který zahrnuje zbytek Anglie kromě odlehlých krajů na severu u hranic se Skotskem a [8] tehdejších dvou nejlidnatějších měst Londýna a Winchestru.

Dílu padlo za oběť asi pět set až osm set ovcí. Jejich kůže byly potřebné pro výrobu pergamenu. Domesday Book i přes více než devět století od svého vzniku vypadá velmi dobře a jeho zachovalost udivila statisíce návštěvníků jubilejní výstavy v roce 1986, kdy byl vůbec poprvé v dějinách Anglie představen na veřejnosti.

Dva miliony slov díla potěšilo zajisté krále Viléma I. Netušil, že Domesday Book bude budit obdiv mnoho století po svém vzniku. Vilém I. umírá 6.9.1087, tak soupis obyvatel, pozemková kniha a stavy hospodářského zvířectva v jednom sloužily jeho bezprostředním nástupcům na anglickém trůnu jako mimořádně podrobný zdroj všemožných informací o říši, které měli vládnout. Tento mimořádný dokument obrovského rozsahu jim umožňoval panovat daleko efektivněji, než tomu bylo v kterékoli jiné evropské monarchii. Vše je v něm podrobně vypsáno: "*V Limpsfieldu (hrabství Surrey) je na panském statku pět pluhů s příslušným počtem potahů, je tu také dvacet pět poddaných sedláků, šest cotterů se čtrnácti pluhy dohromady, dále je zde jeden mlýn, který vynáší dva šilinky ročně, jeden malý rybník, jeden kostel, čtyři akry luk, jeden les, který může živit padesát vepřů, dva kamenné lomy, z nichž každý vynáší dva šilinky ročně, v lese dvě sokolí hnízda a deset otroků. Za vlády krále Eduarda vynášelo panství dvacet liber ročně, v roce 1066 patnáct liber a nyní dvacet čtyři libry.*" Dobyvatelovým vyšetřujícím komisařům neunikne ani ten nejvzdálenější člověk: "*Tady, uprostřed hlubokých lesů a mimo jakýkoli* hundred, *žije samotářský*

[6] nyní existuje ve třech svazcích

[7] nyní má dva svazky

[8] dodnes zůstalo záhadou proč

*statkář. Má osm volů a vlastní pluh. Polnosti, přibližně sto akrů, které si upravil vymýcením lesa, mu pomáhají obdělávat dva nevolníci (*serfs*). Neplatí daně a není vazalem nikoho.*" Zděšení saského kronikáře nad touto normanskou přesností je dojemné a trochu komické. Analista píše: "*Nechal si seznamy svými komisaři pořizovat tak podrobně, že jim neunikl jediný yard půdy, nejen to (hanba něco takového říci, ale králi nebylo hanba to dělat), ani jediný vůl, ani jediná kráva a jediný vepř.*" Pokud se sečtou všechna čísla, která uvádí *Domesday Book*, obdržíme devět tisíc tři sta držitelů, kteří jsou šlechtici a církevními hodnostáři, třicet pět tisíc socmanů a svobodníků, kteří žijí převážně na severovýchodě, sto osm tisíc poddaných (*villeins*), osmdesát devět tisíc cotterů a dvacet pět tisíc otroků (ti se v příštím století změní v nevolníky - *serfs*), to je dohromady asi tři sta tisíc hlav rodiny, což dovoluje odhadnout celkový počet obyvatel země na jeden a půl milionu, možná na dva miliony mužů, žen a dětí.

Dílo sloužilo po dlouhá léta jako registr majetku, jako jakési zemské desky, podle nichž bylo možné řešit pozemkové spory, ale také ukládat daně a různé poplatkové povinnosti. Takto sloužil Domesday Book až do katastru z roku 1522. Z tohoto vynikajícího díla, i když je psáno latinsky, také víme, jak asi vypadala angličtina doby Viléma I.

Dnes už jen několik anglických rodin může vystopovat svůj rodokmen až k zápisu v Domesday Book. Angličané chrání a pečují o dílo, které napsal přiostřený husí brk a které mělo sloužit tisíc let jako census, pozemková kniha a daňový seznam. Tolik let nesloužil, ale dodnes je studnicí vzácných a unikátních poznatků o době, kdy normanský vliv začal pomalu převládat nad anglosaským.

## LITERATURA

[1] Dowell:*History of Taxation.*

[2] Maitland:*Domesday Book and beyond.*

[3] André Maurois:*Dějiny Anglie*, doplněné o nejnovější období Michelem Mohrtem. Nakladatelství Lidové noviny, Praha 1995.

[4] Zdeněk Vaníček:*Domesday Book*. Lidé a země 4, 1995, s. 208.

[5] Vinogradoff:*English Society in the Eleventh Century.*

# Skutečná hladina testů o pravděpodobnosti v binomickém rozdělení

*Karel Zvára*

**Povinnost posoudit překládanou diplomovou práci [1], zejména ověřit spolehlivost simulací v ní uvedených, mě přivedla k výpočtu skutečné hladiny některých používaných testových statistik.**

Předpokládejme, že náhodná veličina $Y$ má binomické rozdělení s parametry $n$ a $\pi$, kde pravděpodobnost $\pi$ je neznámá. K testu hypotézy $\mathsf{H}_0$: $\pi = \pi_0$ uvádí pěkná a užitečná knížka [2] na straně 77 tři statistiky, která mají za hypotézy asymptoticky rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Všechny lze zapsat pomocí klasického odhadu pravděpodobnosti $\pi$, daného vztahem $p = Y/n$.

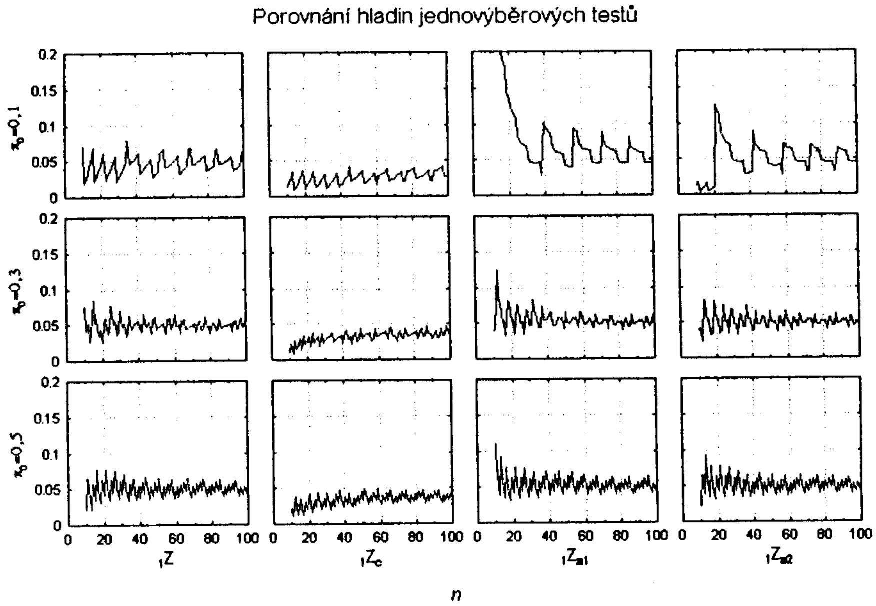
$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{p-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}},\\
Z_{a1} &= 2\sqrt{n}\,(\arcsin\sqrt{p} - \arcsin\sqrt{\pi_0})\,,\\
Z_{a2} &= \sqrt{4n+2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{8np+3}{8n+6}} - \arcsin\sqrt{\frac{8n\pi_0+3}{8n+6}}\right).
\end{aligned}
$$

Pro každou z uvedených statistik se nulová hypotéza zamítá ve prospěch oboustranné alternativy, kdykoliv absolutní hodnota statistiky překročí kritickou hodnotu normovaného normálního rozdělení $z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Tento postup se používá při větších hodnotách $n$, což Likeš s Machkem se pro $Z$ upřesňují na požadavek $n\pi_0(1-\pi_0) > 9$. S použitím tzv. opravy pro spojitost se někdy místo statistiky $Z$ doporučuje (viz např. (12.7.14′) v [3]) statistika

$$
Z_c = \frac{|p-\pi_0| - \dfrac{1}{2n}}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}},
$$

Skutečné hladiny nominálně 5% testů pro pravděpodobnosti $\pi_0$ rovné po řadě hodnotám 0,1, 0,3 a 0,5 jsou v závislosti na $n$ znázorněny na obrázku. Pro svoji pohodlnost (nepoužívat arkussinovou transformaci) mám nyní docela dobrou výmluvu.

Přejděme k testování homogenity dvou binomických rozdělení. Nechť $X$ má binomické rozdělení s parametry $m$, $\pi_1$, nechť $Y$ má binomické rozdělení s parametry $n$, $\pi_2$. Parametry $m, n$ známe, náhodné veličiny $X, Y$ jsou




nezávislé. Testujeme nulovou hypotézu $H_0$: $\pi_1 = \pi_2$ $(=\pi_0)$ proti oboustranné alternativě. Označme ještě relativní četnosti zdarů jako $p_1 = X/m$ a $p_2 = Y/n$. Nadbytečný parametr $\pi_0$, který není určen nulovou hypotézou, musíme nejprve odhadnout. Představa, že platí testovaná hypotéza, vede k odhadu

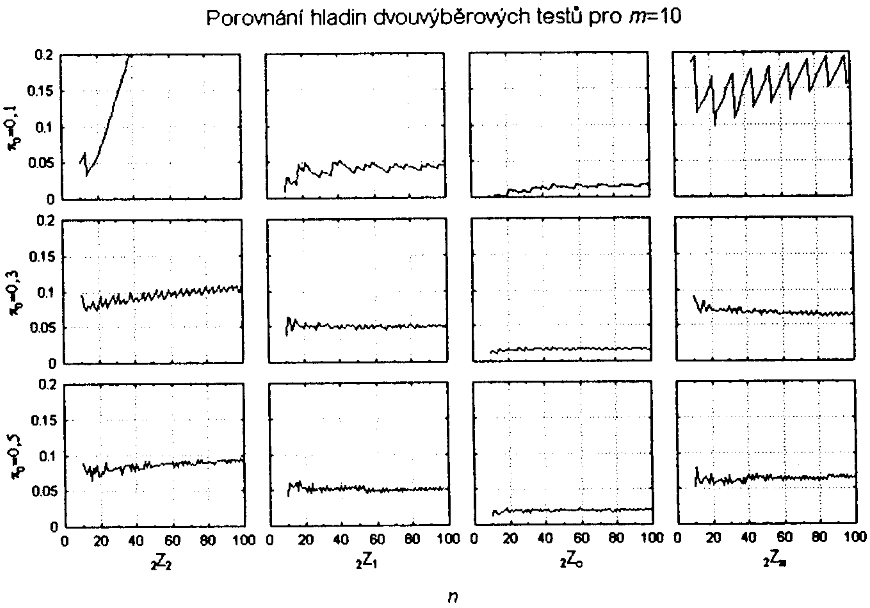
$$p_0 = \frac{X+Y}{m+n},$$

kdežto opatrnost může velet odhadnout raději každý z parametrů $\pi_1, \pi_2$ zvlášť a využít toho, že rozptyl rozdílu $p_1 - p_2$ je v obecném případě roven výrazu

$$\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{m} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n}.$$

Z těchto úvah dostaneme dvě statistiky bezprostředně založené na asymptotickém chování odhadů $p_1$ a $p_2$ (viz [2]):

$$
\begin{aligned}
{}_2Z_1 &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}},\\
{}_2Z_2 &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{m} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n}}}.
\end{aligned}
$$




Pro $m = n$ platí (viz [2]) $|_2Z_1| \leq |_2Z_2|$ s rovností právě pro $X = Y$.

Pokud použijeme arkussinovou transformaci, která by měla stabilizovat rozptyl, dostaneme statistiku

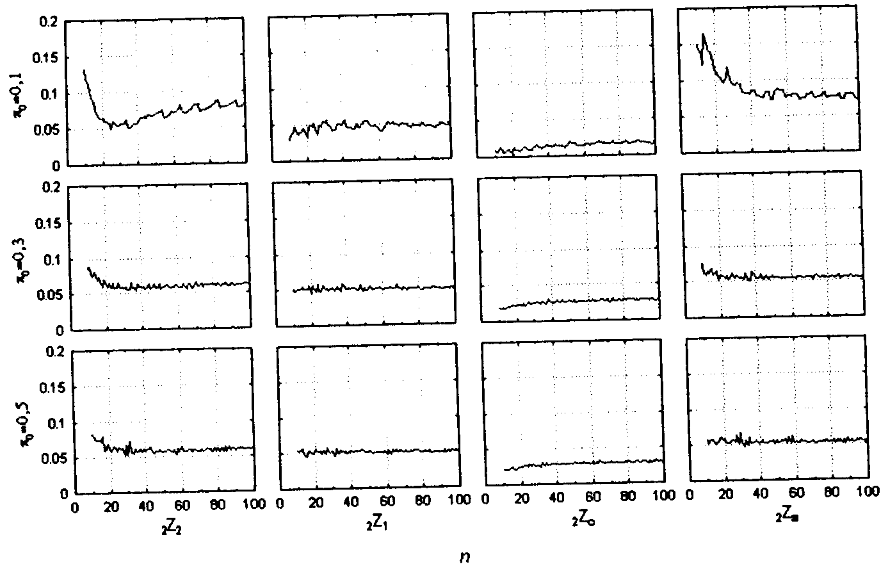
$$_2Z_a = 2\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\,(\arcsin\sqrt{p_1} - \arcsin\sqrt{p_2})\,.$$

Anděl uvádí v [2] pro případ $m = n$ ještě vylepšenou statistiku, založenou na arkussinové transformaci, ale ta dávala výsledky téměř totožné se statistikou $_2Z_a$, proto se o ní dál nebudeme zmiňovat. Uvedeme však modifikaci statistiky $_2Z_1$ s opravou na spojitost (viz (12.14.4′) v [3]):

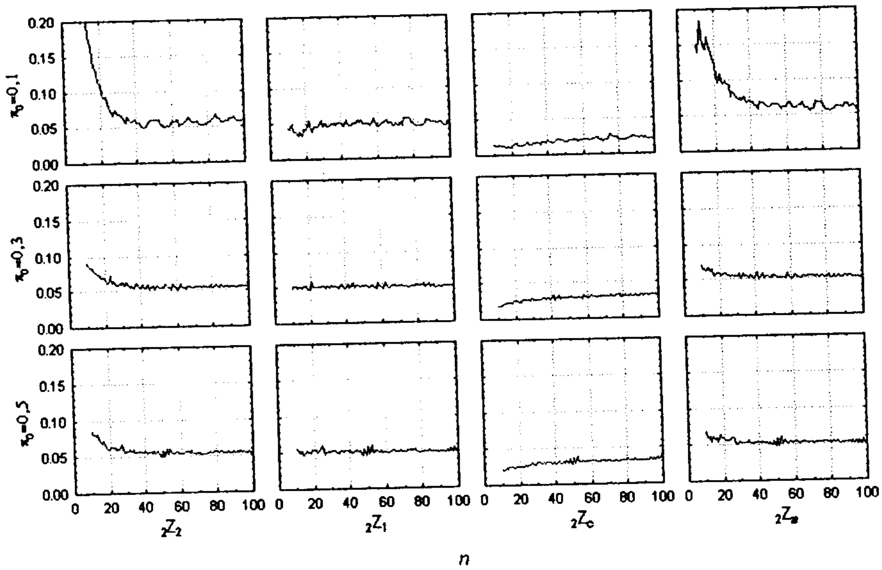
$$_2Z_c = \frac{|p_1 - p_2| - \dfrac{1}{2m} - \dfrac{1}{2n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}.$$

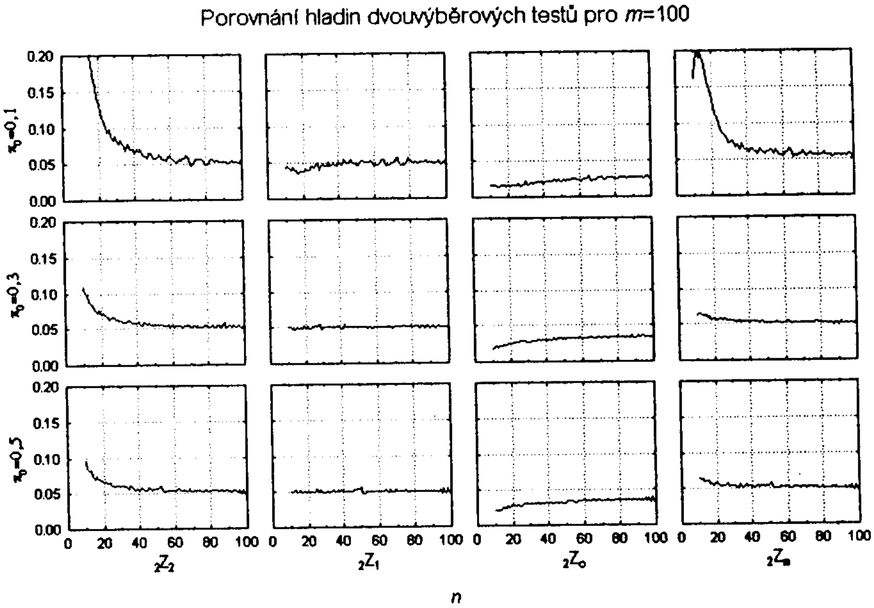
Chceme-li pro dvouvýběrový test porovnat chování uvedených statistik, musíme zvolit nejen skutečnou hodnotu $\pi_0$, ale také poměr počtů pozorování $m$ a $n$. Obrázky ukazují chování skutečné hladiny testů $_2Z_2$, $_2Z_1$, $_2Z_c$ a $_2Z_a$ v závislosti na $n$ (od 10 do 100) pro všechny kombinace hodnot

Porovnání hladin dvouvýběrových testů pro $m$=30




Porovnání hladin dvouvýběrových testů pro $m$=50






$\pi_0=0{,}1$, $0{,}3$ a $0{,}5$ a $m=10$, 30, 50 a 100. Pokud někde graf zdánlivě chybí, jsou odpovídající hladiny větší než 20%. Také pro dvouvýběrový test je výběr ze čtyř navržených statistik velice snadný. Statistika ${}_2Z_1$ se drží nominální hladiny jako jediná velmi spolehlivě.

## LITERATURA

[1] Kavalíř L.: *Testy v binomickém rozdělení.* Diplomová práce vedená J. Andělem. MFF UK Praha, 1995.

[2] Anděl J.: *Statistické metody.* MATFYZPRESS. Praha, 1993.

[3] Hátle J., Likeš J.: *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky.* SNTL, Praha 1974.

*Tato práce vznikla za podpory grantového projektu GAČR 313/93/0616*

# Vzorce pro kritické hodnoty Wilcoxonova párového testu a Kendallova tau

*Josef Bukač*

## Úvod

Přesné kritické hodnoty těchto testů je možné nalézt v tabulkách, někdy jsou dostupné jen v časopisech. Pokud vím, takové tabulky byly vypočteny pro velikosti výběrů do 100.

Obvykle se postupuje tak, že se v počítači vytvoří tabulky a v nich se pak vyhledává. Elegantnější je nalezení vzorců, které dávají přesné kritické hodnoty v daném rozsahu. I když to nebývá jednoduché, je práce s opisovánímm tabulek a vyhledávání v nich jednou pro vždy zbytečná.

Podobně se zachází nejen se sinem a kosinem, ale i s mnoha dalšími funkcemi. Řadu užitečných aproximací uvádí Hart, stojí za nahlédnutí. Zmíním se jen o funkci *gama*, pro kterou je dán jednoduchý vzorec. Používání rekurentních vztahů, jak je často uvedeno v příručkách o programování, je nesmysl.

Metoda zaokrouhlení aproximací byla již aplikována v práci Bukač na znaménkový test, jehož kritické hodnoty je možno přesně počítat do velikosti výběru 1500 pomocí jednoduchých vzorců.

## Popis metody

Hladinu významnosti budeme držet pevnou, protože se pak na kritické hodnoty díváme jako na funkci jedné proměnné a to velikosti výběru $N$. Když se nám podaří nalézt takový vzorec, který po zaokrouhlení dá přesnou kritickou hodnotu daného testu, jsme hotovi. Jinými slovy, hledáme vzorec, pro který je maximální absolutní hodnota rozdílu mezi kritickou hodnotou a tímto vzorcem menší než 0.5 pro všechna $N$ v požadovaném rozsahu.

Tím jsme se dostali do teorie aproximací pro normu Čebyševovu, užívá se i název nejlepší approximace nebo také minimax. O tom je možné se poučit v knize Collatz, pěkný úvod dává i Hart. Jedná se o rozsáhlý obor, který má pro nás velmi specifické aplikace. My budeme potřebovat jen tu část, která se týká diskrétních lineárních aproximací. Použijeme Stiefelův algoritmus, jak jej uvádí například Collatz.

Vybrali jsme si normu a bylo naznačeno jaký algoritmus použít, ale nevíme čím aproximovat, chceme jen, aby to byla funkce lineární v parametrech.

Použijeme-li normální aproximace pro velká $N$ a chceme získat přibližnou kritickou hodnotu, potřebujeme střední hodnotu $X_1(N)$ a směrodatnou odchylku $X_2(N)$ pro dané $N$ a vzorec je $X_1(N) + A_2.X_2(N)$, kde $A_2$ označuje příslušnou kritickou hodnotu normovaného normálního rozdělení. Již označení napovídá, co přidat, aby výraz byl lineární v parametrech. Zkusme $A_0 + A_1.X_1(N) + A_2.X_2(N)$. Jedná se tedy o numerické zlepšení normální aproximace tak, aby maximální chyba byla co nejmenší.

Dá-li výpočet chybu menší než 0.5, jsme hotovi. Kdyby byla chyba větší než 0.5, museli bychom hledat další metody. To se zde nebude rozvádět, protože tento případ nenastal.

### Popis tabulek

Aproximované kritické hodnoty jsou definovány jako největší celá čísla t, pro která $P(t \leq T, N) \leq \alpha$, kde $N$ je velikost výběru, $T$ je statistika, $P$ je kumulativní pravděpodobnost (levý chvost) a $\alpha$ je hladina významnosti. Kritické hodnoty neexistují pro velmi malá $N$. V tabulce je uvedeno pod hlavičkou OD, pro která $N$ vzorec platí. Řádek před tabulkou naznačuje kód v Pascalu.

Kendallův koeficient korelace pořadí

`A0 + A1*0.5*N*(N-1) + A2*sqrt(N*(N-1)*(2*N+5)/72.0)` pro $N \leq 100$

| HLADINA | OD | A0 | A1 | A2 | CHYBA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 4 | -1.11451313 | 0.50008962 | -1.28501235 | 0.4783 |
| 0.05 | 4 | -0.97417706 | 0.50011332 | -1.64874640 | 0.4777 |
| 0.025 | 5 | -0.90572855 | 0.49996393 | -1.95791019 | 0.4818 |
| 0.01 | 5 | -0.57235439 | 0.50001296 | -2.32391943 | 0.4884 |
| 0.005 | 6 | -0.50237808 | 0.49968695 | -2.56116655 | 0.4923 |
| 0.001 | 7 | 0.10428763 | 0.49913912 | -3.05418771 | 0.4921 |
| 0.0005 | 7 | 0.33376836 | 0.49900469 | -3.24600675 | 0.4577 |

Wilcoxonův test párový

`A0 + A1*0.5*N*(N+1) + A2*sqrt(N*(N+1)*(2*N+1)/24.0)` pro $N \leq 100$

| HLADINA | OD | A0 | A1 | A2 | CHYBA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 3 | -1.26547736 | 0.50023864 | -0.68000365 | 0.4946 |
| 0.1 | 4 | -1.22437711 | 0.50029461 | -1.28836504 | 0.4973 |
| 0.05 | 5 | -1.10069377 | 0.50001895 | -1.64555031 | 0.4899 |
| 0.025 | 6 | -0.73540515 | 0.49982642 | -1.95539087 | 0.4911 |
| 0.01 | 7 | -0.15182162 | 0.49926999 | -2.30851059 | 0.4980 |
| 0.005 | 8 | 0.48623915 | 0.49884733 | -2.54744271 | 0.4956 |

## Poznámky

Pozor na to, že testová kriteria a kritické hodnoty jsou různými autory definovány a tabelovány různě. Kontrola správnosti se musí provést porovnáním tabulek. Kritické hodnoty je možné převést až po jejich výpočtu včetně zaokrouhlení.

Kritické hodnoty pro Wilcoxonův párový test odpovídají tabulkám Likeš, Laga (1975), kritické hodnoty pro Kendallovo tau se shodují s kritickými hodnotami v tabulkách Likeš, Laga (1978).

Jak je vidět, místo stovky čísel máme jeden řádek programu. Ušetříme si nejen místo v programu, ale čísel k opisování je podstatně méně a tím méně překlepů.

Tabulka Bestova nebyla nikde publikována, zájemcům byla posílána poštou. V případě aproximací problémy s místem nejsou.

## Poznámka k výpočtu testového kriteria při shodách

U spojitého rozdělení chceme pomocí Wilcoxonova testu zjistit, zda je symetrické kolem nuly. Pokud jsou shody, víme, že vznikly zaokrouhlením. Tím říkáme, že původní hodnoty před zaokrouhlením by nedaly tyto shody. Tyto původní hodnoty neznáme, může jich být nespočetně mnoho, ale možných pořadí, v jakých se mohly vyskytnout, je konečný počet. Definice minimální či maximální hodnoty testového kriteria jsou tedy korektní.

Výpočet testového kriteria Wilcoxonova párového testu je nejlépe vidět na příkladě. Uspořádání je podle absolutní hodnoty.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ uspořádaná | -1 | +5 | +5 | -5 | +8 | +9 | +10 |
| pořadí | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Odtud dostaneme minimální pořadí kladných hodnot $X$, což je $2+3+5+6+7=23$. Maximum je $3+4+5+6+7=25$, což jsme dostali z jiného možného uspořádání -1, -5, +5, +5, +8, +9, +10.

Obecně výpočet provedeme tak, že projdeme všechny absolutní hodnoty výběru uspořádaného podle velikosti absolutních hodnot a určíme, jak přispívají tyto absolutní hodnoty k součtu pořadí. Příspěvek nejmenší, respektive největší, přičteme k součtu pořadí minimálnímu, respektive maximálnímu. Dostaneme interval, který obsahuje testové kriterium. Jestliže celý interval je v kritickém oboru, zamítáme nulovou hypotézu, v případě, že je celý interval v oboru přijetí, tuto hypotézu přijmeme.

Za povšimnutí stojí to, že střed intervalu, čili průměr maxima a minima, se rovná testovému kriteriu vypočtenému pomocí metody průměrných pořadí. Stačí si uvědomit, že průměrný příspěvek každé z absolutních hodnot je roven průměru minimálního a maximálního příspěvku.

Stejné myšlenky lze použít u nepárového Wilcoxonova testu a Kendallova tau.

## LITERATURA


[1] Best, D. J. (1973): *Extended tables for Kendall's tau.* Biometrika, Vol. **60**, 429 – 430.

[2] Bukač, J. (1975): *Critical values of the sign test, Algorithm AS85.* Applied Statistics, Vol. **24**, 265 – 267.

[3] Collatz, L. (1970): *Funkcionální analýza a numerická matematika.* SNTL, Praha.

[4] Hart, J. F. (1968): *Computer Approximations.* John Wiley and Sons, New York.

[5] Likeš, J., Laga, J. (1975): *Základní statistické tabulky.* SPN, Praha.

[6] Likeš, J., Laga, J. (1978): *Vybrané statistické tabulky.* SPN, Praha.

[7] Mc Cornack, R. L. (1965): *Extended tables of the Wilcoxon matched pair rank statistic.* JASA, Vol. **60**, 864 – 871.


*Autor předchozího příspěvku ve svém dopise redakci $\mathcal{TB}$ přidal ještě post scriptum, které by se někdy někomu mohlo hodit:*

P.S.: Jaký je den v týdnu $DT$ lze vypočítat z roku $R$, měsíce $M$ a dne $D$ pomocí následujícího algoritmu:

```
L:=2-R div 4*4 div R+R div 100*100 div R-R div 400*400 div R;
N:=489*M div 16-30+D-(M+27) div 30*L;
DT:=(R+5+N+(R-1) div 4-(R-1) div 100+(R-1) div 400) mod 7+1;
```

Srdečně zveme všechny členy společnosti na

**VI. výroční konferenci**
**České statistické společnosti**

která se bude konat
ve čtvrtek, 14. března 1996 od 13. hodin
v budově Českého statistického úřadu,
Sokolovská 142, Praha 8 v místnosti 115B

Na programu budou přednášky o výuce statistiky
na našich vysokých školách
a o činnosti ČSÚ.

**Informační Bulletin** České statistické společnosti vychází čtyřikrát do roka v českém vydání a jednou v roce v anglické verzi. Předseda společnosti: Ing. Zdeněk Roth, CSc., SZÚ Praha, MSP, Šrobárova 48, 10042 Praha 10, E-mail: szumsp@earn.cvut.cz. ISSN 1210 – 8022 Redakce: Dr. Gejza Dohnal, Jeronýmova 7, 130 00 Praha 3. E-mail: dohnal@fsick.cvut.cz