

INFORMAČNÍ BULLETIN



České statistické společnosti

Ročník 24, číslo 1, březen 2013

INFORMATION, MEMORY, LEARNING AND MATHEMATICS (FROM HERMANN EBBINGHAUS' EXPERIMENTS UNTIL THESE DAYS)

INFORMACE, PAMĚŤ, UČENÍ A MATEMATIKA (OD EBBINGHAUSOVÝCH POKUSŮ PO DNEŠEK)

Zdeněk Pulpán

Adresa: Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové 3

E-mail: zdenek.pulpan@uhk.cz

Abstract: The paper contains some possibilities of statistical approaches at the evaluation of psychological or pedagogical measurements. This paper highlights the importance of analysis of the application of statistical methods and the related possible restrictions of the interpretation of the resulting numerical values. Due to the high variability of the variables defined in the files of living individuals, education should also focus on the use of information theory. A modern cognitive psychology approach is also very important in this context.

Keywords: Psychology, Memory, Learning.

Abstrakt: Příspěvek ukazuje některé možnosti statistického přístupu k hodnocení některých psychologických nebo pedagogických měření. Článek zdůrazňuje význam analýzy aplikací statistických metod a souvisejících možných omezení výkladu výsledných číselných hodnot. Vzhledem k vysoké variabilitě proměnných, definovaných v souborech živých jedinců, by se vzdělávání mělo také zaměřit na využití informační teorie. Moderní přístup kognitivní psychologie ukazuje také v této souvislosti na důležitost takového přístupu.

Klíčová slova: Psychologie, paměť, pamatování, učení.

„Představa, že člověk je tím poučenější, čím více informace se mu dostane, se stává nesmyslnou ve chvíli, kdy se informace z různých zdrojů vzájemně popírají.“

Úvod

Koncem devatenáctého století se v pracích Ebbinghausových ([44]) a Thorndikových ([49]) začaly studovat kvantitativní, časově podmíněné vztahy, které

měly charakterizovat proces učení. Jako důležitá forma závislosti byla uvažována funkce logaritmická. Například již Ebbinghaus předpokládal, že množství zapomenutého je úměrné logaritmu času.

Thurstone byl první, kdo použil k vysvětlení procesu učení pravděpodobnosti ([45]), pak následovali další, jako byl Estes ([46]), Bush a Mosteller ([47]), Stone ([48]). Od padesátých let minulého století se postupně zaváděly i metody teorie her a markovských řetězců ([47]). Dnes dominují modely Raschovy ([35], [36], [38], [39], [41]), založené na teorii pravděpodobnosti a logistickém rozložení. Teorii psychometrických měření významně obohatil svými matematickými metodami v nedávné době Lord ([22]). K popisu procesu učení pomáhají také prostředky umožňující složitější modelování, jako jsou např. neuronové sítě.

Psychometrické metody v období 20.–50. let minulého století u nás rozvíjel hlavně J. Váňa ([17], [27]). Znovu se je snažil oživit až koncem 70. let S. Komenda ([10], [25], [33]), později také M. Katětov ([11]), v emigraci hlavně v souvislosti s učením tzv. superznaků M. Lánský ([43], [54]). Kriticky se k některým psychometrickým metodám vyslovil na stránkách tohoto časopisu I. Saxl ([54]) a na nesprávné interpretace určitých psychometrických vztahů upozornil K. Zvára ([55]).

*„Kdo svou víru lehkomyšlně věnuje bludům, svého
rozumu Stvořitelem mu svěřeného nepoužívá, darem
Stvořitele pohrdá a tím i Stvořitelem samotným.“*

1. Paměťové procesy

Paměťové procesy zajišťují přenos (realizovaný do mozku a z mozku i uvnitř samotného mozku) a uchování informace. *Paměť je schopnost uložit v mozku po určitou dobu informaci získanou z předchozí zkušenosti a také ji znovu vybavit.* Data (která ještě nemusí pro nás představovat informaci) procházejí na své cestě od smyslových orgánů k mozku procesem selekce i redukce, případně také transformace (smyslové orgány zachytí 300 bilionkrát více informace než může předvědomá paměť trvaleji uchovat). Vjem musí mít jisté trvání (asi 10 sekund), aby byl zachytitelný; dva vjemy chápeme jako rozdílné v subjektivním časovém intervalu (delším než asi 0,06 sekundy). Předpokládá se, že mozek má subjektivní dostatečně automatizovanou schopnost časově omezeného uchování jen malého objemu dat v *předvědomé paměti*.

Vědomá paměť vzniká postupným uvědomováním dat z předvědomé paměti a je za určitých podmínek efektivním časově závislým akumulátorem informace (realizuje se s časovým zpožděním a mění se s časem i v závislosti

na způsobu uložení v paměti). Informace je uložena v paměti buď neverbálně (pomocí tzv. superznaků) nebo v podobě verbální nebo s ní ekvivalentní. Míra velikosti informace obsažené v určitém souboru dat odpovídá hlavně jejich struktuře, méně jejich „objemu“, odhadovanému z prostého počtu datových prvků. Čím je struktura dat složitější (data jsou vázána rozsáhlou třídou vztahů), tím více informace obsahuje. Z uznávaného klasického Shannonova pojetí vyplývá, že míra množství informace je také dána mírou změny neurčitosti při identifikaci datového systému ([1], [3], [5]).

Protože se neurčitost systému dat může popsat pomocí pravděpodobnosti jeho určité konfigurace, je pak informace také vyjádřitelná pomocí pravděpodobnosti. (Čím je systém dat A méně pravděpodobný, tím více informace I přináší; $I \sim -\log P(A)$, kde P označuje pravděpodobnost.) Známý psychiatr a kybernetik W. R. Ashby ([4]) spojil představu informace s pojmem variety (rozmanitosti). Víme-li, jak kvantifikovat varietu W , pak informace I v tomto pojetí je $I \sim \log |W|$, kde $|W|$ označuje míru variety.

V obou pojetích hraje významnou roli logaritmická funkce. Ashbyho pojetí přináší ještě jeden důležitý pojem – *homeostat*. Mozek si můžeme představit jako dosti *autonomně fungující organismus*, kde příjem informace určitého druhu (např. sluchové, vizuální, ...) je doprovázen „vyrovnávacím“ efektem, který registrujeme jako ztrátu některé části dostupné informace.

Starší Atkinson-Shiffrinův model paměťové struktury ([9]) rozeznává tři hlavní úrovně: *senzorickou paměť* (je krátkodobá a vázaná na senzory, má však již určitou selektivní schopnost), *primární krátkodobou* (má také omezenou kapacitu a schopnost selekce, vědomě ji ale neovlivníme, je předvědomou pamětí), *druhotnou dlouhodobou paměť* (sem se snažíme ukládat informace, které představují jak fakta, tak i procesy a vztahy). Moderní pojetí zdůrazňuje schopnost mozku ukládat informace v různých formách a úrovních, paměť je „vrstevnatá“ a jednotlivé vrstvy mohou pracovat „paralelně“ s různě privilegovaným systémem spolupráce jednotlivých druhů paměti. Mozek je schopen v důsledku učení data různým způsobem transformovat a tak přímo uvnitř mozku přetvářet původní informaci na novou.

„Aby bylo jasno, musí se rozsvítit.
Někdy na stropě, — někdy v hlavě.“

2. Učení

„Učit se znamená pamatovat si a reagovat na základě zkušenosti vhodně pozměněným způsobem.“ ([10], str. 209) Učení snižuje u živého organismu nejistotu (nejistota je například popsatelná pomocí pravděpodobnosti prostřed-

nictvím statistické entropie) a děje se tak pomocí zpětné vazby. Proto bylo možné chápat *učební proces jako náhodný proces* ve kterém jsou časově závislé reakce ovlivňovány aktivitou subjektu jejímž důsledkem je spontánní snaha po snižování nejistoty. V této souvislosti je možné reakce jedince chápat závislé na pravděpodobnostech snížení nejistoty.

Teorie učení byly založeny na jistých *principech*, které každá z teorií upřednostňovala. Soustředíme se jen na tři z teorií učení: *asocianismus*, *behaviorální teorii* a *teorii tvarovou*. Tyto teorie spojíme s matematickými představami, které se při jejich popisu užily.

Asocianismus vycházel z principu spojování (asociace) jistých elementárních podnětů. Opakováním spojení se zvyšovala pevnost a stálost vznikající asociace. Podporována byla Pavlovovou reflexní teorií. Matematicky ji bylo možné zpracovávat ve tvaru mikromodelů (Estes, Hull, Atkinson, Bush, Mosteller, Norman), které zaváděly např. síly a brzdy asociace a potřebné prahové podněty. Z asocianismu vyšla představa *behaviorismu*. Ta vycházela ze zkušenosti, že učením se posiluje spoj stimul–reakce při současné spontánní aktivitě jedince při tvorbě *symbolů*. Symboly mohou mít funkci jak stimulu, tak i reakce. Schopnost operovat se symboly je podle této teorie hlavní charakteristikou lidské populace (Guthrie, Estes, Thorndike). Teorie učení se proto začala také zabývat znaky, obrazy a jazykem. *Tvarová (Gestalt-) psychologie* vychází z představy, že podněty se postupně neskládají v jeden celek (jak to naznačovaly předchozí dvě teorie), ale vnímají se přímo jako celky, najednou, procesem, který je *vhledem*. Proto je opakování podnětů nepodstatné. Teorie vzhledu mění původní představu o spojitě závislosti procesu učení na čase na závislost s možností nespojitosti ve formě skoku.

Je zřejmé, že každý z uvedených směrů užíval pro své zdůvodnění vždy třídu experimentální zkušenosti. Experimentální zkušenosti se většinou získávaly aplikací speciálně sestavených dotazníků. Dotazníky, které byly konstruovány s jistým specifickým cílem za dosti přesně definovaných podmínek zadávání, skórování i interpretace, dostaly později název *testy*.

Pro odhady informací o výsledku vzdělávání prostřednictvím testů se pak ustálil název *testování vědomostí*. Do teorie testování zasahovali významně matematici – statistici. Matematika totiž umožňuje v určitém stadiu rozpracovanosti kvalitativního náhledu definovat proces měření.

Uvedeme nyní několik formálních matematických modelů, které považujeme za reprezentativní pro celou škálu matematicko-statistických přístupů. Krom statistických modelů se v teorii učení užívaly i jiné modely, např. algebraické, aplikující teorie automatů, formální logiku apod. V současné době se hodně diskutují možnosti měření výsledků vzdělávání a proces učení je znovu

předmětem i politických úvah. Příspěvek naznačuje trnitou cestu k pedagogickým, resp. psychologickým měřením.

„Stvořitel nebyl matematik; vyplývá to z toho, že naše matematické modely nikdy nedokáží dokonale vystihnout jeho dílo.“

„Matematika neúprosně odhaluje tápání našich představ.“

3. Některé matematické modely

Nejjednodušším matematickým modelem vycházejícím z představ *asociativismu* je model „s jedním elementem“. Je popsán v [13], nalezneme ho však také podrobněji komentován v [10]. Vychází z experimentů, ve kterých se zjistilo, že naučená asociace se po delší době nemusí vybavit (pravděpodobnost vybavení s časem klesá). Vysvětluje se to tak, že bezprostředně po posílení je asociace sice „naučená“, ale do dlouhodobé paměti se ukládá s pravděpodobností c , do krátkodobé pak s pravděpodobností $1 - c$ (jak jsme se již zmínili, krátkodobá paměť má malou kapacitu a naučená asociace může zde být brzo nahrazena jinou informací). Subjekt může být v jistém čase právě v některém ze dvou stavů:

C – osvojení asociace,

$\overline{C}$ – neosvojení asociace.

Asociace se osvojuje jako celek, buď je osvojená nebo není. Subjekt tedy po každém posílení asociace prochází postupně stavy $C_1, C_2, \dots$, které můžeme chápat jako posloupnosti stavů homogenního Markovova řetězce určeného maticí přechodu, jejíž prvky jsou následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} P(C_{n+1} = C | C_n = C) &= 1, & P(C_{n+1} = \overline{C} | C_n = C) &= 0, \\ P(C_{n+1} = C | C_n = \overline{C}) &= c, & P(C_{n+1} = \overline{C} | C_n = \overline{C}) &= 1 - c. \end{aligned}$$

Tento řetězec je absorpční a konverguje s rostoucím počtem kroků ke stavu C . Pro vektor rozdělení $(P(C_n = C), P(C_n = \overline{C}))$ pak platí

$$(0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 - c \end{pmatrix}^n = (1 - (1 - c)^n, (1 - c)^n) \quad (1)$$

Nechť je $X_1, X_2, \dots$ posloupnost reakcí subjektu v jednotlivých krocích procesu učení, kdy označujeme $X_i = 1$ reakci správnou, $X_i = 0$ reakci nesprávnou. Pak podle věty o úplné pravděpodobnosti je

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= P(X_n = 1 | C_n = C) \cdot P(C_n = C) + \\ &\quad + P(X_n = 1 | C_n = \overline{C}) \cdot P(C_n = \overline{C}) = \\ &= 1 \cdot [1 - (1 - c)^n] + c \cdot (1 - c)^n = 1 - (1 - c)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

kde jsme vyšli z toho, že $P(X_n = 1|C_n = C) = 1$ a $P(X_n = 1|C_n = \overline{C}) = g$, kde g je pravděpodobnost pouhého uhodnutí správné asociace. Je také

$$P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1) = (1 - g) \cdot (1 - c)^n. \quad (3)$$

Vztah (2) představuje křivku učení (bez zapomínání). Důležitým znakem tohoto výsledku je, že vztah (2) představuje nelineární závislost P na n („naučenost“ s počtem posilování neroste přímo úměrně, jak vyplynulo již z Ebbinghausových pokusů ([9]) a je vidět i na obrázku grafu funkce (2)).

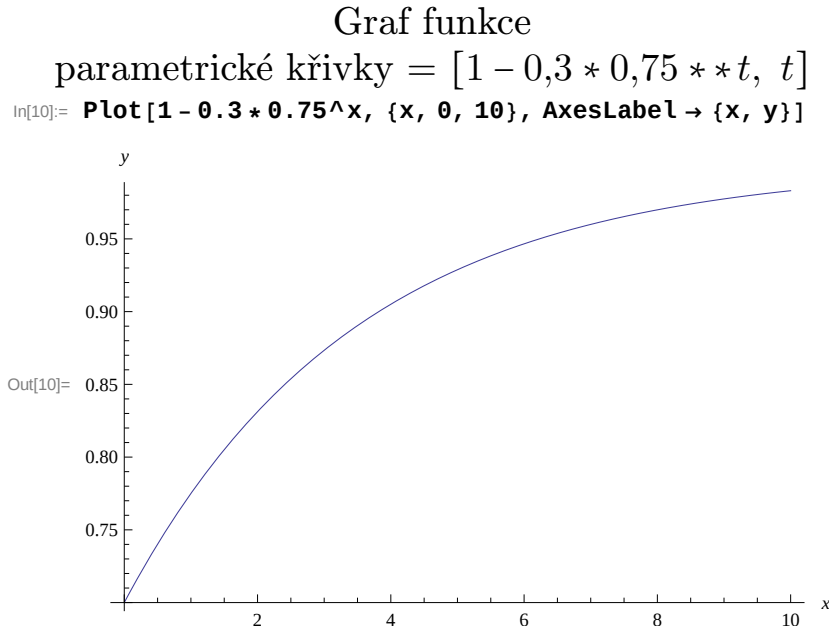
Z Bayesova vzorce můžeme také určit inverzní pravděpodobnosti, že subjekt je v určitém stavu, když reaguje správně, resp. nesprávně:

$$\begin{aligned} P(C_n = C|X_n = 1) &= P(X_n = 1|C_n = C) \cdot P(C_n = C) / P(X_n = 1) = \\ &= [1 - (1 - c)^n] / [1 - (1 - g) \cdot (1 - c)^n]; \end{aligned}$$

$$P(C_n = \overline{C}|X_n = 1) = 1 - P(C_n = C|X_n = 1); \quad (4)$$

$$P(C_n = C|X_n = 0) = 0; \quad P(C_n = \overline{C}|X_n = 0) = 1.$$

Parametr g lze z podmínek experimentu většinou apriorně odhadnout, není tedy parametrem závislým na subjektu ($g = 0$ znamená, že neexistuje možnost náhodného uhádnutí správné odpovědi).



Graf funkce (2) pro $g = 0,7$ a $c = 0,25$.

Poznámka: Uvedený model s „jedním elementem“ je velmi zjednodušený, neuvažuje zapomínání ani další charakteristiky subjektu. Modeluje tzv. diskrétně probíhající proces učení. Markovské řetězce mohou dobře vystihovat některé jednoduché procesy učení.

Z *tvarové psychologie* vycházíme, když je o něco komplikovanější proces učení registrován pomocí dotazníku. Dotazník sice „rozdrobí“ informaci na jednotlivé položky, ale obvykle se vyhodnocuje jako „celek“ (tak se to dělá např. v klasické testové teorii). Předpokládejme, že položky jsou skórovány tak, že i -té položce přiřadíme skóre $\mu_i \in \langle 0; 1 \rangle$ podle míry správnosti odpovědi (0 pro zcela nesprávnou odpověď, 1 pro zcela správnou, hodnoty uvnitř intervalu označují míru správnosti). Výsledek celého dotazníku pak interpretujeme jako fuzzy množinu

$$\underline{A} = \{i / \mu_i; i = 1, 2, \dots, k\}.$$

K uvedené fuzzy množině přiřadíme fuzzy neurčitost $H(\underline{A})$ vztahem

$$H(\underline{A}) = 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [2 \cdot \max(\mu_i, (1 - \mu_i)) - 1]. \quad (5)$$

Protože je $0 \leq H(\underline{A}) \leq 1$, můžeme odhadnout informaci, která svědčí o odstranění příslušné neurčitosti ve tvaru

$$I(\underline{A}) = 1 - H(\underline{A}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [2 \cdot \max(\mu_i, (1 - \mu_i)) - 1], \quad (6)$$

kde

$$0 \leq I(\underline{A}) \leq 1.$$

Podrobněji o tom v [14], [15] nebo [16].

Přijímaná informace však může být i zdrojem pomýlenosti. Míra informace akceptované subjektem, která je v souladu s položkami dotazníku, se pak určí ze vztahů (5) a (6), kde ale výraz v hranaté závorce bude mít hodnotu kladnou, když $\mu_i > 0,5$, a hodnotu zápornou, když $\mu_i \leq 0,5$. Označíme-li pak příslušnou hodnotu takto opravené neurčitosti $H^s(\underline{A})$, bude

$$0 \leq H^s(\underline{A}) \leq 2, \quad (7)$$

a příslušná hodnota informace $I^s(\underline{A})$, vypočtená s příslušnou „opravou“ podle (6), pak bude v intervalu $\langle -1; 1 \rangle$. Její záporná hodnota může být interpretována jako míra pomýlenosti. ([14], [15], [16], [32], [40])

Pokusme se ještě o sestavení jednoduchého modelu časového úbytku informace určitého druhu z druhotné dlouhodobé paměti za předpokladu spojitého procesu učení i zapomínání v čase v rámci *behaviorálního přístupu*. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ je hodnota uvažované informace rovna I_0 a její úbytek je úměrný aktuální velikosti informace $I(t)$ v čase t :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -k \cdot I(t), \quad (8)$$

kde $k > 0$ je vhodná konstanta. Tento předpoklad byl podporován experimenty, ve kterých se potvrdilo, že se informace nezapomíná lineárně v čase. Řešením diferenciální rovnice (8) je exponenciální funkce ve tvaru

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-kt}, \quad t > 0. \quad (9)$$

Závislosti (9) odpovídá tzv. křivka „čistého zapomínání“. Vždy bylo nutné předpokládat nenulovost tzv. „zbytkové“ informace ve vědomé paměti. Předpokládáme-li, že ztráta informace se na základě *homeostatického principu* vyrovnává příjmem nové, upravíme původní předpoklad (8) na tvar (10)

$$\frac{dI(t)}{dt} = c - k \cdot I(t), \quad c \geq 0, \quad k > 0, \quad (10)$$

kde písmenem c označujeme rychlost příjmu nové informace. Obě konstanty předpokládáme závislé na druhu informace i individu. Řešením diferenciální rovnice (10) je pak časová závislost ve tvaru součtu:

$$I(t) = \frac{c}{k} (1 - e^{-kt}) + I_0 \cdot e^{-kt}, \quad t > 0, \quad (11)$$

kde první sčítanec představuje časově závislý přírůstek informace, za daných předpokladů je $(1 - e^{-kt}) > 0$, a druhý je „čisté zapomínání“. ([2])

Německý psycholog H. Ebbinghaus (1850–1909) svými pokusy ukázal, že čas potřebný pro osvěžení již dříve naučené posloupnosti řad slabik bez smyslu (např. VEC – JAT – MIB – PEF – ..., mezi dvěma souhláskami je jedna samohláska) roste s délkou přestávky po naučení a má „velmi rychlý“ počáteční růst. Čas potřebný k doučení dříve naučené posloupnosti slabik je ale úměrný ztrátě informace po naučení. Můžeme tedy z Ebbinghausova měření odhadnout závislost úbytku dříve získané informace na čase. Zkusme proto porovnat vztah (11) s původním Ebbinghausovým měřením. Vyjdeme z tabulky měření tab. 1, jejíž data jsme získali z [6], str. 77.

Jak uvádí Pietrasiński v [6], z Ebbinghausových výzkumů také vyplynulo, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \neq 0, \quad (12)$$

proto porovnáním se vztahem (11) dostáváme podmínku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{c}{k} \neq 0, \quad (13)$$

tedy $c \neq 0$.

Odhadneme-li pro Ebbinghausovo měření z tab. 1 za předpokladu $I(0) = 100$ metodou nejmenších čtverců parametry $c > 0$ a $k > 0$, dostaneme $k \sim$

Číslo měření i	Délka přestávky v minutách t_i	Procenta z celkového času měření	$\frac{I(t_i)}{I_0} \cdot 100$ [%]	I_1 [%]	I_2 [%]	I_3 [%]
1.	19	41,8	58,2	56,4	67,1	52,8
2.	63	55,8	44,2	27,8	41,8	52,7
3.	525	64,2	35,8	23,0	21,4	52,4
4.	1 440	66,3	33,7	23,0	21,0	51,6
5.	2 880	72,2	27,8	23,0	21,0	50,4
6.	8 640	74,6	25,4	23,0	21,0	44,9
7.	44 640	78,9	21,1	23,0	21,0	-11,1

Tabulka 1. Původní Ebbinghausovo měření
a odhady z teoretických vztahů (11) a (13).

0,044, $c \sim 1,02$. Pak můžeme doplnit poslední sloupec tab. 1 odhady $I_1(t_i)$ podle (11) vztahem (13):

$$I_1(t_i) = 23 \left(1 - e^{-0,044 \cdot t_i}\right) + 100 \cdot e^{-0,044 \cdot t_i}, \text{ [%]} \quad (13)$$

pro $i = 1, 2, \dots, 7$ (čas dosazujeme do (13) v minutách). Porovnáním hodnot v tab. 1 ve sloupci pro $I(t_i)/I_0$ a $I_1(t_i)$ si můžeme utvořit představu o míře přesnosti tohoto odhadu.

S. Beer v [7] věří v odhad „křivky zapomínání“, který pochází od H. von Förstera. H. von Förster vycházel také z předpokladu obnovy paměti, např. vědomým či nevědomým vzpomínáním. Zařadil do rovnice činitele μ , charakterizujícího efektivnost opakovaného učení a působícího proti zapomínání. Předpokládal, že příjem nové informace je úměrný jak okamžité informaci, tak i informačnímu deficitu, a působí v mozku jako projev zpětné vazby:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -k \cdot I(t) + \mu \cdot I(t) \cdot (100 - I(t)), \quad k > 0, \quad \mu > 0. \quad (14)$$

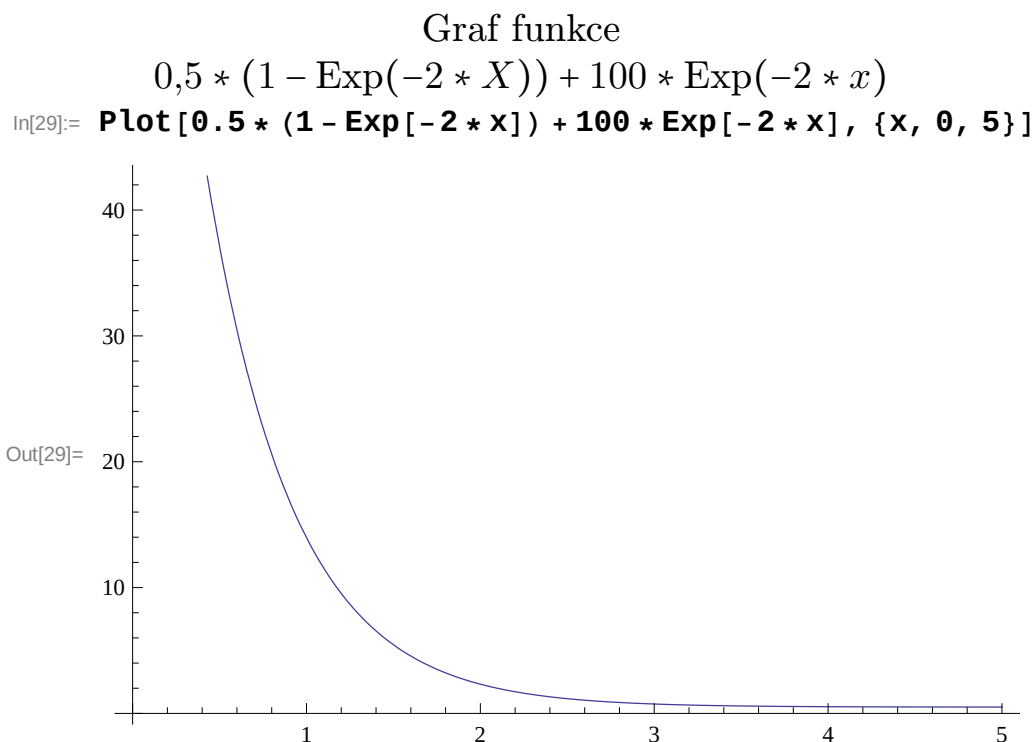
Řešením této diferenciální rovnice (opět za předpokladu $I(0) = 100$ a času t měřeného v minutách) je

$$I_2(t) = \frac{10^2 \cdot (10^2 \mu - k)}{10^2 \cdot \mu - k \cdot e^{-(10^2 \mu - k) \cdot t}} \text{ [%]}, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Využijeme-li opět empirických dat z tab. 1 a odhadneme parametry k , μ ze vztahu (15), máme

$$k \sim 0,028; \mu \sim 0,00035.$$

Pro tyto hodnoty parametrů jsou v předposledním sloupci tab. 1 také uvedeny příslušné odhady $I_2(t)$ z (15). Ani v tomto případě sice nedošlo k významné shodě s empirickým šetřením, přesto empirické zkušenosti nejsou v rozporu s předpoklady, ze kterých byly oba tvary závislostí (11) a (15) odvozeny.



Připomeňme ještě, že nelze aproximovat (aspoň s takovou „přesností“ jako předchozími vztahy (13) a (15)) Ebbinghausovy výsledky např. kvadratickou funkcí $I(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Tato funkce nemá zmiňované podstatné základní vlastnosti všech „křivek zapomínání“ (počáteční rychlý pokles a ustálenou nenulovou hodnotu pro větší hodnoty času od měření). Pozn. Pro data z tab. 1 je odhadem uvedená kvadratická funkce $I(t) = 52,8 - 1,13t - 0,03t^2$, kde čas dosazujeme ve dnech, její hodnoty jsou v tab. 1 označeny I_3 .

Behaviorální přístup byl podpořen modely teorie her. Hledání optimální strategie maximalizací užitku při současné minimalizaci ztrát bylo principem chování „ideálního“ subjektu, které pak mohlo být zeslabeno formulací chování p -inteligentního subjektu. ([9], [10], [42])

Speciální třídou behaviorálních modelů učení jsou modely hledající vztah v určité množině stimulů a reakcí. Často jsou formulovány jako markovské

řetězce určitého typu, speciální třída Estesových modelů učení je popsána v [42].

Klasická testová teorie (CTT) v testech znalostí zpočátku využívala jen všeobecně známých postupů redukce primárních dat z tzv. hrubých testových skóre pomocí např. měr polohy, variability, koeficientů vyjadřujících šikmost, či špičatost histogramu rozložení četností. Hrubé skóre se určovalo z počtu správně zodpovězených (vyřešených resp. kladně hodnocených) položek. Ze statistického hlediska je hrubý testový skór chápán jako náhodná veličina Z , která je součtem pro téhož respondenta stejně obtížných alternativních položkových náhodných veličin Y_i :

$$Z = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

kde n je celkový počet testových položek. Z důvodů zjednodušení se někdy veličiny Y_i uvažují jako vzájemně nezávislé. Rozložení náhodné veličiny Z je pak apriorně binomické (pro $n > 30$ případně aproximovatelné normálním rozložením). Tak se uvažuje zvláště v psychologii, kde je silná snaha dosáhnout normality téměř každé přímo měřené náhodné veličiny Z třeba i vhodnou volbou testových položek (s přibližně stejnou pravděpodobností kladné odpovědi). Tato praxe je zdůvodňována analogií s biologickou variabilitou vykazující velmi často normalitu svého rozložení. Hrubé testové skóre Z bylo – a dosud je – východiskem pro posuzování výkonu nejen jednotlivých respondentů, ale i vlastností položek.

Experimenty však ukazují, že je třeba předpokládat v testech znalostí větší rozptyl než by odpovídalo aproximací binomickým rozdělením. ([33]) Veškeré normy získané z hrubého testového skóre závisejí na populaci, ze které byly odhadnuty. Přispívají tak k vytváření obrazu „středního respondenta“, ke kterému se vztahují testové charakteristiky. Jde například o míry snadnosti či obtížnosti položek, míry úspěšnosti jedince, atd. Toto pojetí, vycházející z *tvarové psychologie*, chápe dotazník jako „celek“ – dotazník je „měřícím prostředkem“. Proto se tato teorie snažila objektivizovat výběr testových položek, snažila se vytvořit strategii taxonomie (Bloom [52] a další).

Histogram rozložení 0 – 1 výsledků testování ale nedává dobrou informaci o reakcích subjektu na určitou testovou položku. Výrazně lepší informaci dává např. diagram relativních četností správné odpovědi na položku v závislosti na hrubém celkovém testovém skóru. Dostaneme tak informaci o vlivu jisté položky na hrubý skór v souboru zkoumaných jedinců.

Dlouhodobější zkoumání takového diagramu upřednostňuje *hypotézu o esovitém tvaru* aproximující křivky této závislosti. Jako teoretický základ to však

CTT apriorně neuvažuje, pro ni to je pouze experimentální zkušenost. Chce-li CTT zobecňovat, musí experimentovat na reprezentativním souboru jedinců. Všechny své hypotézy opírá o zjišťování na určitém výběrovém soboru. Proto popis jeho vytváření je jedním z důležitých východisek kontroly kvality šetření; reprezentativní výběr umožňuje věrohodně aplikovat metody statistické indukce, nerepresentativní výběr nemůže poskytnout věrohodná zobecnění. ([10], [12], [17], [18], [19], [20], [21])

Naproti tomu teorie odpovědí na položky – *item response theory* (IRT) vychází z hlubší analýzy odpovědí na *jednu* položku. Základem je intuitivně předpokládaná a částečně experimentálně ověřená hypotéza, že za reakcí subjektu na položku je jistá kvantita schopnosti, která se má odhadnout. Předmětem zkoumání v IRT jsou na jedné straně položky, na druhé straně jedinec (respondent). Upouští se proto od představy „středního respondenta“. Vychází se z představy, že schopnější subjekt má vyšší pravděpodobnost správné reakce na položku než méně schopný. Obrazem závislosti pravděpodobnosti správné odpovědi na úrovni schopnosti jedince je esovitá křivka s hodnotami od nuly do jedné, v intervalu škály schopností od mínus do plus nekonečna. Každá položka je touto specifickou esovitou křivkou charakterizována; popisují ji jisté parametry.

Za vzor oné esovité křivky lze volit například normální distribuční funkci $F_n(x)$:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (16)$$

s parametry μ a σ^2 (ϕ je distribuční funkce normovaného normálního rozložení) nebo logistickou křivku $R_b(x)$:

$$R_b(x) = \frac{1}{1 + e^{-(x-b)}} \quad (17)$$

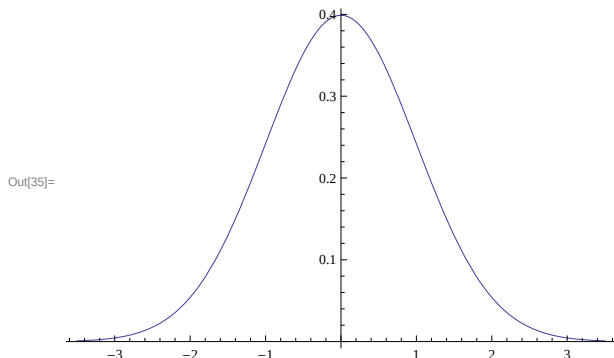
s parametrem b ; jak jsme již poznamenali, v obou případech x probíhá škálu schopnosti v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Model (17) byl v 60. letech navržen dánským matematikem G. Raschem a nese proto v literatuře jeho jméno. ([22], [23], [24], [25], [33], [34], [35], [37], [38], [39], [41])

Obtížnost položky se v IRT definuje jako ten bod na škále schopností, ve kterém se hodnoty esovitých funkcí rovnají 0,5. V prvním případě tuto podmínku splňuje pochopitelně hodnota parametru μ , ve druhém případě b .

Poznamenejme, že v CTT se často obtížnost položky o definuje jako pravděpodobnost q nesprávného vyřešení položky a odhaduje se proto z výběrové populace rozsahu N určením počtu M správných odpovědí na uvažovanou

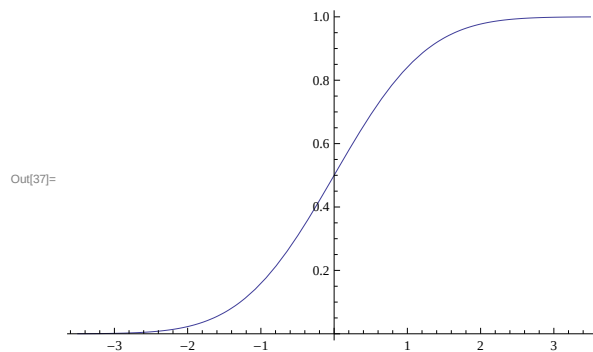
Funkce hustoty pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení

In[35]:= `Plot[Evaluate@Table[PDF[NormalDistribution[0, σ], x],
{σ, {1}}, {x, -3.5, 3.5}]`

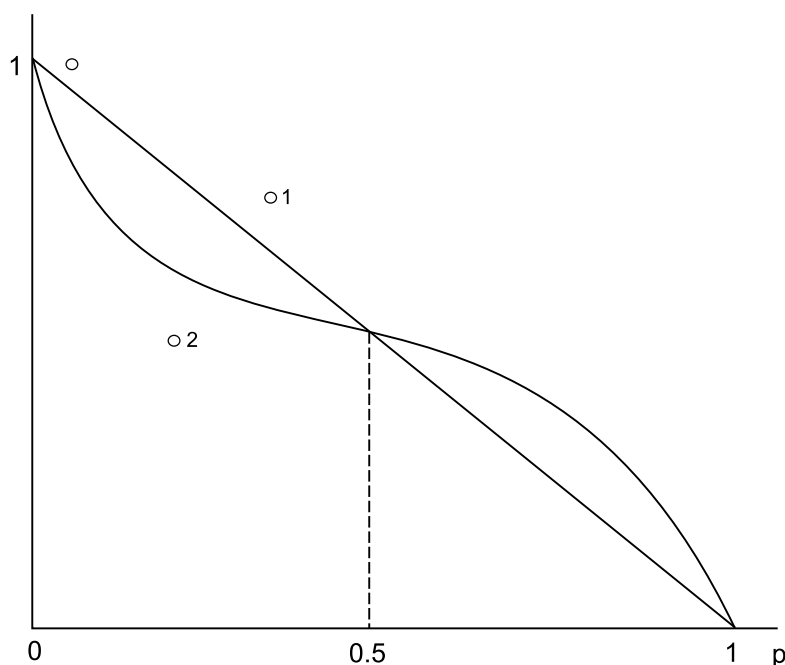


Distribuční funkce $p = \text{normal}(x; 0; 1)$

Plot[Evaluate@Table[CDF[NormalDistribution[0, σ], x],
{σ, {1}}, {x, -3.5, 3.5}]



Hustota a distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.



Obtížnost položky, určovaná ze vztahu (18) a (19).

položku:

$$o_1 = q = 1 - p \sim 1 - \frac{M}{N} \quad (18)$$

a je tudíž silně závislá na zkoumané populaci.

Podobně i jiné, komplikovanější míry obtížnosti mají hodnoty, které jsou populačními charakteristikami, např. (19):

$$o_2 = \begin{cases} 1 - \frac{h(p)}{2}, & \text{když } 0 \leq p < 0,5, \\ \frac{h(p)}{2}, & \text{když } 0,5 \leq p \leq 1, \end{cases} \quad (19)$$

kde $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$. Pak je také $o_2 \in \langle 0; 1 \rangle$ s podobnou interpretací jako o_1 ; pro $p \rightarrow 1^-$ je $o_2 \rightarrow 0^+$ a pro $p \rightarrow 0^+$ je $o_2 \rightarrow 1^-$; klademe přitom $0 \cdot \log_2 0 = 0$. ([18], [26])

Stupnice schopnosti definovaná vztahem (16) se nazývá *probitová*, vztahem (17) *logitová*.

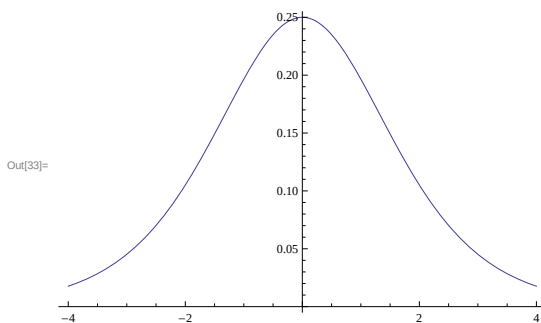
Birnbaum ([31]) rozšířil model (17) o další parametr $a > 0$, který měl charakterizovat diskriminační funkci položky:

$$B_{ir}(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}. \quad (20)$$

Funkce hustoty pravděpodobnosti

$$y = \text{logis}(x; 0; 1)$$

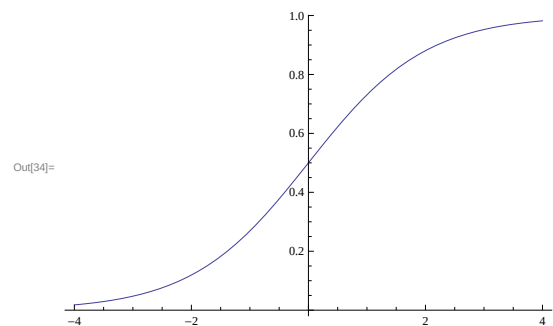
Plot[Evaluate@Table[PDF[LogisticDistribution[μ, 1], x],
{μ, {0}}, {x, -4, 4}]]



Distribuční funkce

$$p = \text{ilogis}(x; 0; 1)$$

Plot[Evaluate@Table[CDF[LogisticDistribution[μ, 1], x],
{μ, {0}}, {x, -4, 4}]]



Graf derivace funkce B_{ir} a funkce $B_{ir}(a = 1, b = 0)$.

Jde o podobnost průběhu distribuční funkce normovaného normálního rozdělení a funkce B_{ir} .

Diskriminační funkce položky se posuzuje podle derivace esovité funkce v bodě charakterizujícím obtížnost. Pro funkci (16) tak dostáváme v bodě $x = \mu$ hodnotu diskriminační funkce položky rovnu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ a pro funkci (20) je v bodě $x = b$ tato hodnota rovna $\frac{a}{4}$. V prvním případě je diskriminační funkce vyjádřena prostřednictvím parametru σ , ve druhém pak prostřednictvím parametru a ; uvedené parametry přísluší položce, hodnoty proměnné X charakterizují schopnosti jedince.

Funkce (16), (17) a (20) odpovídají našim představám o určenosti pravděpodobnosti $P(Y = 1|X = x)$ správné odpovědi (označené zde $Y = 1$) na položku podmíněné na přímým měřením nezjistitelné hodnotě schopnosti $X = x$. Mluvíme pak o proměnné X jako o latentní proměnné příslušné určitému jedinci. Její hodnoty zjišťujeme z hodnot inverzních funkcí k funkcím (16), (17), resp. (20). Každá z funkcí s pevně stanovenými parametry reprezentuje jisté „měřidlo“ s implicitně určenou jednotkou. Problémem je však vhodný odhad

parametrů modelů z výsledků tak, aby předpokládaný model byl v co nejlepším souhlasu s daty. Raschovými modely je možné současně „měřit“ úroveň respondenta (jeho „schopnost“) i obtížnost dotazníkových položek, obojí na škálách latentní proměnné. ([33], [38])

Učení bychom měli chápat jako *komplexní činnost*, jejíž součástí je *řešení problémů*. Předpokládejme proto, že určitý problém je rozložen na řadu problémů dílčích, formulovaných v položkách C-R testu (výkonového testu, typu tzv. criterion referenced test). Respondent musí řešit položky postupně tak, jak jsou mu předkládány. V tomto testu by respondent neměl vyřešit správně položku následující bez vyřešení položky předchozí. Budeme se držet situace, popsané autorem v [53].

Předpokládejme, že se od určitého okamžiku respondent připravuje řešit některý z problémů a že čas přípravných činností má exponenciální rozložení s parametrem λ :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; & \lambda > 0; t \geq 0; \\ 0; & \text{pro } t < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Parametr λ rozložení (21) bude mírou aktivity respondenta.

Můžeme předpokládat, že i čas vlastního řešení problému bude mít exponenciální rozložení s jistým parametrem μ :

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}; & \mu > 0; t \geq 0; \\ 0; & \text{pro } t < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Postup respondenta v C-R testu pak budeme modelovat vzhledem k dvojici respondent–test; respondent si po vyřešení jednoho problému vybírá problém další, atd. až do vyřešení problému hlavního. Schematicky to vyjadřuje chování naší dvojice ve spojitém čase pomocí dvou stavů: x_0 – přípravná fáze, x_1 – řešení dílčího problému.

Označme $p_0(t)$, resp. $p_1(t)$ pravděpodobnost, že systém je v čase t ve stavu x_0 , resp. x_1 . Pak můžeme sledovat děj, který probíhá v našem systému od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$ podle věty o úplné pravděpodobnosti

$$p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t)e^{-\lambda\Delta t} + p_1(t)(1 - e^{-\mu\Delta t}). \quad (23)$$

Z (23) postupně nahrazením $e^{-\lambda\Delta t}$ a $e^{-\mu\Delta t}$ jejich odhady při zanedbání nekonečně malých veličin řádu vyššího než Δt a limitním přechodem pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme z (24) vztah (25)

$$p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t, \quad (24)$$

$$p'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (25)$$

Protože ještě platí (26)

$$p_0(t) + p_1(t) = 1, \quad (26)$$

můžeme z (25) nalézt obecné řešení (27) pro $p_0(t)$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + Ce^{-(\lambda + \mu)t}, \text{ kde } C \text{ je konstanta.} \quad (27)$$

Vzhledem k tomu, že musí být $p_0(0) = 1$ získáme konstantu C ve tvaru rovnice (28):

$$C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (28)$$

Po úpravě pak vztahy pro časovou závislost $p_0(t)$ a $p_1(t)$ mají tvar rovnic (29) a (30):

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \quad (29)$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (30)$$

Ukažme si některé důsledky (29) a (30) pro velmi zjednodušující představu řešení problému, kdy čas přípravy na jeden dílčí problém je vždy $1/k$, $k > 1$, z celkového času T , věnovaného přípravě i jeho řešení.

Vzhledem k tomu, že pro rozložení (21) je střední hodnota $ET = 1/\lambda$, platí (31) a (32)

$$\lambda \approx \frac{k}{T}, \quad (31)$$

$$\mu \approx \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{T}. \quad (32)$$

Dosazením (31), (32) do (29) a (30) dostaneme vztahy (33), (34):

$$p_0(t) = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} e^{-\alpha t}, \quad (33)$$

$$p_1(t) = \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k} e^{-\alpha t}, \quad (34)$$

kde jsme označili

$$\alpha = \frac{k^2}{k-1} \cdot \frac{1}{T}.$$

Pro ustálený stav, kdy předpokládáme, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = p_0 = \text{konstanta}, \quad (35)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = p_1 = \text{konstanta}, \quad (36)$$

máme pro konstanty p_0 a p_1 hodnoty

$$p_0 = \frac{1}{k}; \quad p_1 = \frac{k-1}{k}. \quad (37)$$

V kterémkoli čase t je pravděpodobnost, že se náš systém nachází v přípravné fázi při řešení některého dílčího problému $p_0(t) > 0$, tj. přípravná fáze je podle našeho modelu stále možná. Model však také více odpovídá jen řešení nekonečné série jednoduchých homogenních, tj. stejně subjektivně málo obtížných dílčích problémů.

Přímo ze vztahů (29) a (30) vidíme, že ideální děj jimi popisovaný probíhá bez ukončení:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 1.$$

Existence emočního zdvihu nám však umožní upravit vztahy (29) a (30) do reálnější podoby.

Naše zkušenost říká, že řešení problémů probíhá ve „skocích“, které psychologové označují jako vhléd nebo emoční zdvih. Tuto situaci (odpovídající názoru tvarových psychologů) můžeme chápat jako určenou subjektivním okamžikem t_1 , od kterého se skokem sníží pravděpodobnost přípravné fáze. Pak však musíme předpokládat, že vztahy (29) a (30) platí jen pro $t \in \langle 0; t_1 \rangle$.

Předpokládáme-li, že hlavní problém je v důsledku jediného emočního zdvihu vyřešen v čase T , musí být $p_1(T) = 1$, resp. $p_0(T) = 0$. Z těchto podmínek můžeme stanovit velikost emočního zdvihu Δ :

$$p_1(T) + \Delta = 1,$$

kde na levé straně výraz pro p_1 je z (30). Pak po elementárních úpravách dostaneme

$$p_1(T) + \Delta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)T}) + \Delta = 1$$

a z toho pro Δ

$$\Delta = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)T}). \quad (38)$$

Pro $p_1(t)$ tedy platí úprava (39):

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) \quad \text{pro } t < t_1; \\ p_1(t) &= 1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (e^{-(\lambda + \mu)T} - e^{-(\lambda + \mu)t}) \quad \text{pro } t_1 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (39)$$

Parametry λ a μ jsou subjektivní a závislé na problému, proto se obtížně odhadují. Snadněji, avšak ne zcela přesně, se odhaduje čas pro t_1 , který je sice také subjektivní, ale pozorovatelný, představuje především „náhlou“ kvalitativní změnu při řešení problému. Jestliže se podaří odhadnout hodnotu pravděpodobnosti řešení problému těsně před okamžikem vzhledu (emočního zdvihu) $p_1(t_1 - 0)$ a krátce po něm $p_1(t_1)$, je možné odhadnout pak i λ a μ ze vztahů (40) a (41):

$$p_1(t_1 - 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) \approx A, \quad (40)$$

$$p_1(t_1) = 1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (e^{-(\lambda + \mu)T} - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) \approx B, \quad (41)$$

kde A, B jsou příslušné odhady levých stran (40) a (41).

Je-li třeba uskutečnit celkem v emočních zdvihů v časových okamžicích $t_1, t_2, \dots, t_v$, přejde vztah (39) na tvar (42)

$$p_1(t) = K_i - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}; \quad t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle, \quad (42)$$

$i = 1, 2, \dots, v + 1$, kde označujeme počátek $t_0 = 0$ a časový okamžik úplného vyřešení problému $t_{v+1} = T$. Pro $t \geq T$ platí $p_0(t) = 0$. Konstanty K_i volíme tak, aby

$$p_1(t_i) - p_1(t_i - 0) = \Delta_i > 0; \quad p_1(T) = 1.$$

Připomínáme, že pro všechna $t \in \langle 0; T \rangle$ je

$$p_0(t) + p_1(t) = 1 \quad (43)$$

Na následujícím příkladě ukážeme, jak je možné z určitých experimentálních dat řešení úlohy (úloh) respondentem v C-R testu konkrétněji modelovat proces učení.

4. Příklad

Jedním z testových úkolů je ukázat, že $\sqrt{3}$ je číslo iracionální. Jeho řešení předpokládá například následující posloupnost dílčích znalostí (reprezentovaných v C-R testu příslušným sledem úloh):

- a) vyjádření racionálních čísel zlomkem s celými nesoudělnými čísly;
- b) vyjádření čísel iracionálních pomocí racionálních;
- c) princip nepřímého důkazu;

- d) když nějaké prvočíslo dělí druhou mocninu jistého čísla, pak musí toto celé číslo i dělit;
- e) odhalení sporu v posloupnosti dílčích tvrzení.

Je-li v dané populaci např. d) klíčová znalost (jádro pro řešení celého úkolu), projeví se to i tím, že většina z těch respondentů, kteří vyřeší d), vyřeší pak i celý daný úkol.

Máme-li zaznamenány počty správných řešitelů procházejících jednotlivými kroky:

$$50 \rightarrow^a 45 \rightarrow^b 37 \rightarrow^c 30 \rightarrow^d 17 \rightarrow^e 16,$$

je pro časový okamžik t_d , při kterém dojde u jistého řešitele k vyřešení d), podle (40) a (41)

$$p_1(t_d - 0) \approx \frac{16}{30} = A; \quad p_1(t_d) \approx \frac{16}{17} = B.$$

Položme $R = e^{-T}$, $S = e^{-t_d}$, pak dostaneme z poměru (44)

$$\frac{p_1(t_d) - 1}{p_1(t_d - 0)} = \frac{R^{\lambda+\mu} - S^{\lambda+\mu}}{1 - S^{\lambda+\mu}} \approx \frac{B - 1}{A} \quad (44)$$

a z rozdílu (45)

$$p_1(t_d) - p_1(t_d - 0) = 1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (R^{\lambda+\mu} - 1) \approx B - A \quad (45)$$

hodnoty $\lambda = 0,16$ a $\mu = 0,11$.

i	t_i [min]	$p_1(t_i)$	$\delta(t_i) = \frac{p_1(t_i + \Delta t_i) - p_1(t_i)}{\Delta t_i}$	Odhady $\lambda + \mu$
0	0	0	0,03	0,29
1	5	$16/50 = 0,32$	0,04	-0,35
2	6	$16/45 = 0,35$	0,02	0,25
3	8	$16/37 = 0,43$	0,09	0,82
4	14	$16/30 = 0,53$	0,47	
5	16	$16/17 = 0,94$		

Tabulka 2: Tabulka relativních diferencí a pravděpodobností $p_1(t_i)$.

Musíme-li předpokládat existenci více emočních zdvihů, řešíme daný problém v příslušných intervalech času určených t_{i-1} , t_i , t_{i+1} s využitím odhadů

$p_1(t_i)$, $p_1(t_i - 0)$. Výslednou křivku závislosti $p_1(t)$ pak dostaneme spojením takových závislostí v jednotlivých intervalech.

Nyní provedeme trochu jinou úvahu. Jestliže $p_1(t)$ ve vztahu (39) derivujeme, dostaneme pro celý interval $\langle 0; T \rangle$ stejný tvar derivace (46)

$$p'(t) = \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (46)$$

Parametry λ a μ budeme odhadovat ze srovnání relativních diferencí $\delta(t_i)$ z odhadů $p_1(t)$. Vyjdeme z tabulky 2.

Poměry relativních diferencí $\delta(t_{i+1})/\delta(t_i)$ pro $i = 0, 1, 2, 3, 4$ by pak měly být „souměřitelné“ s $e^{-(\lambda+\mu)\Delta t_i}$; $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. V pátém sloupci tabulky 2 jsou pak určeny odhady $\lambda + \mu$ z těchto poměrů. Průměr odhadů je $\overline{\lambda + \mu} = 0,25$.

Předpokládáme-li, že máme jediný „skok“ v bodě $t_d = t_3$ a že pro jeho výšku musí platit (47)

$$B - A > \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (47)$$

dostáváme z našich hodnot odhad pro λ

$$0,41 > \frac{\lambda}{0,25} \text{ a z toho } 0 < \lambda < 0,25 \cdot 0,41 = 0,10, \quad 0,15 < \mu < 0,25.$$

Předpokládáme-li že na začátku (v čase $t = 0$) je množství celkové relevantní informace $I(0) = I_0$, můžeme vztah pro informaci potřebnou k vyřešení daného problému v čase t psát ve tvaru

$$I(t) = \frac{I_{\max}}{\log_2(1 + K)} \cdot \log_2(p_1(t) + K), \quad (48)$$

kde kladnou konstantu K volíme tak, aby když $I(T) = I_{\max}$, bylo i

$$I_0 - \frac{I_{\max}}{\log_2(1 + K)} \cdot \log_2 K = 0. \quad (49)$$

Předpokládejme, že $I_{\max}/I_0 = r > 0$ je dáno. Pak z (49) plyne, že

$$\frac{\log_2(1 + K)}{\log_2 K} = r,$$

a z toho dostaneme podmínku pro K ve tvaru

$$K \cdot 2^r - K - 1 = 0.$$

Jedna z možností objektivního určení r předpokládá znalost odhadů pravděpodobností p_i , $i = 1, 2, \dots, k$, vyřešení každé z k položek C-R testu.

Mějme funkci

$$h(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \text{ pro } p \in (0; 1)$$

$$h(p) = 0 \text{ pro } p = 0, \text{ resp. } 1.$$

Dále definujeme funkci $I(p)$, reprezentující množství informace potřebné k vyřešení dané položky „průměrným respondentem“ vztahem

$$I(p) = h(p) \text{ pro } p \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$2 - h(p) \text{ pro } p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Pak $I_{\max}$ určíme například jako součet přes všech k testových položek, jako vztah

$$I_{\max} = \sum_{i=1}^k I(p_i).$$

Hodnotu počáteční informace I_0 určíme buď z tzv. „bílého šumu“, nebo jako

$$I_0 = k \cdot I\left(\frac{1}{2}\right) = k.$$

Ze závislosti $p_1(t)$ můžeme také odhadnout množství informace potřebné k vyřešení problému v intervalu (t_1, t_2) :

$$\Delta I(t_1, t_2) = I(t_2) - I(t_1) = \frac{I_{\max}}{\log_2(1 + K)} \cdot \log_2 \frac{p_1(t_2) + K}{p_1(t_1) + K}, \quad (50)$$

speciálně odhadneme i množství informace, které je zapotřebí k překonání emočního zdvihu v čase t_d podle (51):

$$\Delta I(t_d) = \frac{I_{\max}}{\log_2(1 + K)} \cdot \log \frac{p_1(t_d) + K}{p_1(t_d - 0) + K}. \quad (51)$$

Množství informace $I(t)$ je tedy v tomto pojetí nespojitá funkce času na $\langle 0; T \rangle$ s vnitřními body nespojitosti v okamžicích, kdy dochází ke změně řešení v důsledku vhladu (emočního zdvihu). *Množství informace* je určitý druh popisu experimentální situace umožňující kvantifikaci přesněji popsanych reakcí subjektu. Navržený postup není univerzálním prostředkem měření, je závislý na mnoha specifických okolnostech sledovaného experimentu.

Úvahy byly provedeny navíc za předpokladu nepřetržité aktivity jedince, kde funkce $p_1(t)$ je rostoucí a obecně nespojitá na $\langle 0; T \rangle$. Je však známo,

že aktivita jedince se rovněž časem mění a dochází k obdobím relativního poklesu aktivity. Zvláště u parametru λ musíme předpokládat změny závislé na čase a emocích. Takovou změnu je třeba předpokládat tím spíše, čím větší je T a čím složitější je řešený problém.

Proces učení je velmi složitý a matematizace tohoto procesu se neobejde bez podstatného zjednodušení. Na druhé straně to však poukazuje na důležitost kvalitativních metod výzkumu, které dávají jak podněty pro zpracování kvantitativní, tak i poukazují na nedostatky metod kvantitativních.

*„Jednoduché řešení je elegantní.
A právě té intelektuální elegance se nám nedostává.“*

5. Diskuse a závěr

Ebbinghaus (1850–1909) byl chytrý experimentátor, který inspiroval velkou řadu následovníků. Ti další získávali nové zkušenosti s rozdílnými druhy paměti (vizuální, akustické, ...). Matematicky orientované psychology později zaujala snaha o „odvození“ křivek zapomínání i učení. Postupně se však díky „pedagogicky“ zaměřeným experimentátorům ukázalo, že nejdůležitější je kvalita uložené informace, a tak mohly být precizovány podmínky efektivního učení, které jsou platné dosud.

Význam matematizace zpočátku spočíval jen v odhalování podmínek efektivního učení v souvislosti s tvarem i parametry matematického modelu. Například se potvrdila správnost úvah spojujících učení se zapomínáním; snadno se již z Ebbinghausových dat zjistí, že nelze uspokojivě vyhovět např. prostému exponenciálnímu modelu, který uvažuje jen úbytek informace s časem a neuvažuje současně i učení např. sebeuvědomováním.

Učení bezesmyslovému textu se ale podstatně liší od učení, kdy máme pochopit smysl. A právě co nejjednodušší zabudování do matematických modelů „smyslu naučeného“ se stalo nepřekonatelným problémem do dnešní doby, vhodný analytický tvar křivky učení se dosud nenašel. Schází dostatečně promyšlená kvalitativní teorie, o kterou by se mohly matematické úvahy opřít. Proto se novější výzkumy soustřeďují např. na další rozvoj Piagetovy teorie. ([51])

Zdá se zbytečné znovu rozebírat více než 100 let staré Ebbinghausovy výsledky a dávat je do souvislosti s úvahami o padesát i sto let mladšími, které jsou neúprosně konfrontovány s moderní technologií. Na výzkum mozku máme dnes přece přístroje, které mohou zobrazit místa, kde se „naše informace“ právě nachází, jaký asi má účinek na nervové buňky, odhadneme rych-

lost učení i zapomínání jedince v závislosti na mnoha rozdílných parametrech (zde jsme užili jen dva).

Informaci se učíme stále dokonaleji (ale přitom složitěji) měřit. Máme na to různé prostředky popisu: od statistických po fuzzy technologii, umělé neuronové sítě, metodu genetických algoritmů atd. Přesto však uvedené starší úvahy mají některé důsledky, které dávají jednoduchý a tím také *jasný a stále v dostatečné obecnosti platný návod pro „běžné“ učení*:

1. mozek od narození až do smrti přijímá a zase zapomíná informace; o trvalosti určité informace rozhoduje metoda učení; je-li informace používána nebo je ve vztahu s jinými používanými informacemi, je trvalejší a snadněji se vybavuje;
2. proti velmi rychlé ztrátě informace těsně po naučení se můžeme bránit včasným opakováním; křivky zapomínání jsou individuální;
3. informace má různé podoby (vizuální, akustickou, sémantickou, ...) a v mozku se kóduje a také časem překódovává (transformuje), postupně zůstává jen její jistá část, schopná vybavení; vhodným učením můžeme napomoci tomu, aby v mozku zůstávala k aktivnímu vybavení ta část původní informace, která může sloužit k novému vybavování určité části dříve uložené informace;
4. experimenty s pamětí je třeba realizovat hlavně v přirozených podmínkách; v aparátu teorie informace matematika nabízí možnosti zachycení a odhadu velikosti informace různého druhu a může tak přispět k objevu důležitých vlastností mozku při učení.

Literatura

- [1] Attneave F.: *Informationstheorie in der Psychologie*, Verlag Hans Huber, Bern und Stuttgart, 1969.
- [2] Stríženec M.: Problémy teorie informace v psychologii, in *Kybernetika a její využití*, NČSAV, Praha, 1965.
- [3] Shannon C.: *Raboty po tĕorii informacii i kibernetike*, překlad z angličtiny, Moskva IL, 1963.
- [4] Ashby W. R.: *Kybernetika*, Orbis, Praha, 1961.
- [5] Shannon C., Werner W.: *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana, 1949.
- [6] Pietrasiński Z.: *Umění učit se*, SPN, Praha, 1968.
- [7] Beer S.: *Kybernetika a řízení*, Svoboda, Praha, 1966.

- [8] Förster H.: *Quantume Theory of Memory, Transactions of Sixth American Conference on Cybernetics*, New York, 1950.
- [9] Atkinson R. C., Shiffrin R. M.: Human memory: A proposed system and its kontrol processes, in Spence J. T. *The psychology of learning and motivation* (Volume 2), Academic Press, New York, 1968.
- [10] Komenda S., Klementa J.: *Analýza náhodného v pedagogickém experimentu a praxi*, SPN, 1981.
- [11] Katětov M.: Matematické modely v psychologii, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 19(4): 187–199, 1974. ISSN 0032-2423.
- [12] Guilford J. P.: *Psychometric Methods*, Wiley, New York, 1954.
- [13] Atkinson R. C., Bower G. H., Crothers E. J.: *An Introduction to Mathematical Learning Theory*, John Wiley, New York, 1965, ruský překlad, Mir, Moskva, 1969.
- [14] Příhoda V.: *Teorie školského měření*, Praha, 1930.
- [15] Půlpán Z.: *Odhad informace z dat vágní povahy*, 1. vyd., Gerstner, Academia, Praha, 2012.
- [16] Půlpán Z.: Předávání poznatků ve škole jako přenos informace, *Pedagogika*, 4, 1971.
- [17] Váňa J.: *Psychometrika*, Praha 1926.
- [18] Lienert G. A.: *Testaufbau und Testanalyse*, 2. Aufl, Weinheim, 1967.
- [19] Lindquist E. F.: *Statistical Analysis in Educational Research*, Boston, 1940, český překlad *Statistická analýza v pedagogickém výzkumu*, SPN, Praha, 1967.
- [20] Mittenecker E.: *Planung und statistische Auswertung von Experimenten*, Vrlg. Franz Deuticke, Viena 1963, český překlad *Plánování a statistické hodnocení experimentů*, SPN, Praha, 1968.
- [21] Guilford J. P.: *Fundamental Statistics in Psychology and Education*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
- [22] Lord F. M.: *Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems*, Hillsdale, NJ, Erlbaum, 1980. ISBN 0-89859-006-X.
- [23] Hambleton R. K., Swaminathan H., Rogers H. J.: *Fundamentals of Item Response Theory*, Sage, 1991. ISBN 0-8039-3646-X.
- [24] Baker F. C.: *The Basics of Item Response Theory*, ERIC, University of Wisconsin, Madison, 2001. ISBN 1-886047-03-0.
- [25] Komenda S.: *Měření a metaměření znalostí*, Olomouc, 2003. ISBN 80-244-0776-0.

- [26] Cronbach L.: *Essentials of Psychological Testing*, 2. vyd., Harper & Row, New York, 1960. ISBN 978-0471419785.
- [27] Váňa J.: *Měření inteligence*, Praha, 1933.
- [28] Fisher R.: *The Design of Experiments*, 6. vyd., Hafner, New York, 1951.
- [29] Tate M.: *Statistics in Education*, Macmillan, New York, 1955.
- [30] Kerlinger F. N.: *Foundations of Behavioral Research*, Holt, New York, 1964, český překlad *Základy výzkumu chování*, Academia, Praha, 1972.
- [31] Birnbaum A.: Statistical theory for the logistic mental tests models with a prior distribution of ability, *Journal of Mathematical Psychology*, 6(2): 258–276, 1969. ISSN 0022-2496. doi: 10.1016/0022-2496(69)90005-4
- [32] Půlpán Z.: *Informační vlastnosti didaktického testu z fyziky*, Studie ČSAV č. 11, Academia, Praha, 1977.
- [33] Komenda S., Zapletalová J.: *Analýza didaktického testu a její počítačová podpora*, Olomouc, 1996.
- [34] Andersen E. B.: Sufficient Statistics and Latent Trait Models, *Psychometrika*, 42(1): 69–81, 1977. ISSN 0033-3123. doi: 10.1007/BF02293746
- [35] Andrich D.: *Relationships Between the Thurstone and Rasch Approaches to Item Scaling*, Applied Psychological Measurement, 2(3): 451–462, 1978. doi: 10.1177/014662167800200319
- [36] Andrich D.: *Rasch Models for Measurement*, Beverly Hills: Sage Publications, 1998. ISBN 978-0803927414.
- [37] Birnbaum A.: Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability, in Lord F. N., Novick M. R. (Eds.): *Statistical theories of mental test scores*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1968. ISBN 978-0394347714.
- [38] Fisher G. H., Molenaar I. W.: *Rasch models: foundations, recent developments and applications*, New York, Springer-Verlag, 1995. ISBN 978-0387944999.
- [39] Rasch G.: *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*, Copenhagen, Danish Institute for Educational Research, expanded edition, The University of Chicago Press, 1980 (1960–1980). ISBN 978-0226705545.
- [40] Půlpán Z.: *K problematice zpracování empirických šetření v humanitních vědách*, Academia, Praha, 2004. ISBN 80-200-1221-4.
- [41] Rasch G.: *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*, Danish Institute for Educational Research, Copenhagen, 1960.

- [42] Kemeny J. G., Snell J. L., Thompson G. L.: *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice Hall, New York, 1957, český překlad SNTL, Praha, 1971. ISBN 978-0134838342.
- [43] Lánský M.: Fortführung der Formaldidaktiken: Sequo-Verbal, *grkg/ Humankybernetik*, Band 31, Heft 3, 1990.
- [44] Ebbinghaus H.: *Über das Gedächtnis*, Leip-Duncer, 1885.
- [45] Thurstone L. L.: The learning curve equation, *Psychological Monographs*, 26(3): 1–51, 1919. ISSN 0096-9753.
- [46] Estes W. K.: Toward a statistical theory of learning, *Psychological Review*, 57(2): 94–107, 1950. ISSN 0033-295X. doi: 10.1037/h0058559
- [47] Bush R. R., Mosteller F.: *Stochastic models for learning*, Wiley, New York, 1955.
- [48] Stone M.: Models for Choice-Reaction Time, *Psychometrika*, 25(3): 251–260, 1960. ISSN 0033-3123. doi: 10.1007/BF02289729
- [49] Thorndike E. L.: Animal intelligence: an experimental study of the associative processes in animals, *Psychological Monographs*, 2(8), 1898. ISSN 0096-9753.
- [50] Frank H.: Rechtfertigung von Rechner- und Sprachmodellen durch die kybernetische Transfertheorie, *grkg/ Humankybernetik*, Band 31, Heft 3, 1990.
- [51] Piaget J., Garcia R.: *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York, 1989. ISBN 0231059922.
- [52] Bloom B. S.: *Taxonomy of Educational Objectives*, New York, Cognitive Domain, 1956.
- [53] Půlpán Z.: *K problematice hledání podstatného v humanitních vědách*, Academia, Praha, 2001. ISBN 80-200-0855-1.
- [54] Lánský M.: On the Subjective Information of the Text Including the Super – Signs, *Association Internationale de Cybernétique*, Namur, 67–78, 1968.
- [55] Saxl I.: Alfréd Binet a počátky testování intelligence, *Informační bulletin ČStS*, 19(4): 10–24, 2008. ISSN 1210-8022. doi: 10.5300/IB
- [56] Zvára K.: Měření reliability aneb bacha na Cronbacha, *Informační bulletin ČStS*, 13(2): 13–20, 2002. ISSN 1210-8022. doi: 10.5300/IB

Citáty byly vybrány z knížky Stanislava Komendy *Vzdušné zámky, Větrné mlýny*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2005.

ZVYŠOVANIE MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI ŽIAKOV ZÁKLADNEJ ŠKOLY V OBLASTI KOMBINATORIKY, PRAVDEPODOBNOSTI A ŠTATISTIKY

Mária Kóšová, Eva Uhrinová, Ľubomír Rybanský

Adresa: Tr. Andeja Hlinku 1, SK-94974 Nitra, Slovenská republika

E-mail: maria.kosova@ukf.sk, eva.uhrinova@ukf.sk, lubomir.rybansky@ukf.sk

Podakovanie: Tento článok bol podporený grantom KEGA 3/7001/09.

Abstrakt: V príspevku poukazujeme na potrebu zvyšovania matematickej gramotnosti žiakov ZŠ v oblasti náhodnosť. Tejto problematike sa na Slovensku venuje projekt KEGA 3/7001/09, ktorý prebieha už štvrtý rok a v súčasnosti je do neho zapojených približne 750 žiakov z 30 škôl. Chceme prezentovať niektoré z doteraz vytvorených materiálov v rámci riešenia tohto projektu v oblasti náhodnosť pozostávajúcich z úloh predstavujúcich riešenie problémov z reálneho sveta a taktiež metodických pokynov pre vyučujúcich. Zároveň informujeme o doterajších výsledkoch riešenia tohto projektu.

Kľúčové slová: Výučba, pravdepodobnosť, štatistika.

1. Úvod

Obsah tohto príspevku tvorí popis projektu KEGA (3/7001/09) – *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií – alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA*. Konkrétne sa budeme zaoberať tematickou oblasťou Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika. Tento projekt priamo vychádza z cieľov Štátneho vzdelávacieho programu platného na Slovensku od roku 2008 a aj z výsledkov medzinárodnej porovnávacej štúdie PISA, v ktorej v roku 2003, kedy bola táto zameraná práve na matematickú gramotnosť, dosiahlo Slovensko v matematickej gramotnosti 21. miesto zo 46. zapojených krajín. Najhoršie v tejto štúdii dopadla práve oblasť náhodnosť.

2. Školská reforma na Slovensku

V roku 2008 prebehla na Slovensku školská reforma. V súvislosti s ňou nastalo v slovenskom školstve viacero zmien. Vstúpil do platnosti nový Školský zákon, ktorý obsah vzdelávania v predmete matematika rozdelil na 5 vzdelávacích oblastí:

1. Čísla, premenné, počtové výkony s číslami.
2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy.
3. Geometria a meranie.
4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika.
5. Logika, dôvodenie, dôkazy.

Oblasť Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika bola pred spomínanou školskou reformou zaradovaná do vyučovania zväčša na konci školského roka v rámci doplnujúceho učiva, čo mnohokrát spôsobilo, že sa táto oblasť nestihla ani odučiť. Práve preto učitelia často nemajú dostatočné skúsenosti s výučbou tejto vzdelávacej oblasti. Rovnako tak nový Školský zákon upravil aj hodinovú dotáciu jednotlivých oblastí. Vzdelávacej oblasti Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika je teraz venovaných až trojnásobne viac vyučovacích hodín (približne 31 hodín pred reformou a 68 hodín po reforme). Navyše učitelia nemajú k dispozícii potrebné učebné materiály. Aj tieto problémy sa snaží spomínaný projekt čiastočne riešiť.

3. Projekt KEGA (3/7001/09)

V rámci tohto projektu prebieha experiment, ktorý začal náhodným rozdelením škôl zapojených do výskumu na experimentálne a kontrolné, vypracovaním a napísaním vstupného testu. Štatistické spracovanie výsledkov tohto testu je uvedené v článku [2]. V každom roku riešenia sú pripravené materiály pre niektorý ročník ZŠ. V školskom roku 2009/2010 bol tento výskum venovaný príprave učebných materiálov a overeniu efektívnosti ich použitia vo vyučovaní v 5. ročníku ZŠ. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu v spomínanom roku riešenia projektu je uvedené v článku [3]. Cieľom tohto výskumu v školskom roku 2010/2011 bola príprava učebných materiálov predmetu Matematika pre žiakov 6. ročníka ZŠ a overenie efektívnosti vyučovania pomocou týchto materiálov v školskej praxi. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu sú uvedené v [1].

V prebiehajúcim školskom roku 2011/2012 sa zameriavame na prípravu a na overenie efektívnosti vyučovania pomocou učebných materiálov pre žiakov 7. ročníka ZŠ. Všetky pripravené materiály sú zamerané hlavne na zvyšovanie matematických kompetencií pri riešení úloh z bežného života a tým aj na prípravu žiakov na medzinárodné testovanie vedomostí. Tieto materiály obsahujú okrem znenia a riešenia úloh aj metodické pokyny. Pomocou nich oboznamujeme učiteľov so skúmanou problematikou, vysvetľujeme niektoré dôležité pojmy a odporúčame spôsob výučby prostredníctvom konkrétnej úlohy. Dá sa povedať, že cez ne sa snažíme učiteľov v školskej praxi vzdelávať. Tieto materiály plánujeme použiť aj pri výučbe didaktiky mate-

matiky. Podrobnejšie informácie o tomto projekte ako aj znenie testov možno nájsť na internetovej stránke <http://www.kega.fss.ukf.sk/>.

4. Vytvorené materiály

Vytvorené úlohy a príklady sú distribuované učiteľom prostredníctvom internetovej stránky, kde si ich každý učiteľ môže po prihlásení stiahnuť. Ako ukážku uvádzame jednu úlohu, ktorá bola zaradená do tematického okruhu kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika v 5. ročníku ZŠ a dve úlohy zaradené do rovnakej oblasti v 6. ročníku ZŠ.

4.1. Výber strany ihriska

Pred začiatkom stretnutia mini volejbalu sa celé družstvo postaví na základnú čiaru ihriska a pozdraví súpera. Pokyn na pozdrav dáva kapitán družstva, ktorý po pozdrave podíde k rozhodcovi, kde spolu s kapitánom súpera vykonajú žrebovanie o podanie, prihrávku, resp. výber strany ihriska. Samotná hra sa začína podaním lopty do hry družstvom, ktoré si toto právo vyžrebovalo (http://www.kometake.sk/mm_metodika/pravidla.pdf). Žrebovanie sa najčastejšie uskutočňuje pomocou hodu mincou. Minca má rub a líce. Líce je (averz) tá strana mince, na ktorej je vyznačený obrazom a písmom vydavateľ mince (mincový pán), viz (<http://www.fhv.umb.sk/app/user.php?user=liskova&ID=969>).



Úloha 1. Ktorá strana mince 1 Euro je líce a ktorá strana je rub?

Úloha 2. Ty si kapitán družstva a volíš si stranu pravidelnej mince 1 Euro, ktorá sa bude hádzať pre výber strany ihriska. Rozhodca vyhodí mincu a ak padne strana, ktorú si zvolil, vyberieš si stranu ihriska. Ktorú stranu mince si zvolíš a prečo? Padá niektorá strana mince častejšie ako druhá? Ako sa o tom dá presvedčiť?

Metodické pokyny:

Matematici hádzali veľakrát mincou, aby dokázali, že približne rovnako často padá líce aj rub. Pearson hodil mincou 24 000 krát a 12 012 krát mu padlo líce.

Žiakov by sme mali o tom tiež presvedčiť. Snáď postačí, ak každý žiak hodí mincou 10-krát a zapíše si počet padnutí líca a počet padnutí rubu. Výsledky sa zosumarizujú.

4.2. Weiss na zraze pred Chorvátskom privítal len polovicu hráčov

Prvýkrát po **úspešných** majstrovstvách sveta v JAR sa v nedeľu na seneckom zraze pred prípravným zápasom s Chorvátskom (streda 11. augusta, Pasienky, 20.30 h) stretla slovenská futbalová reprezentácia.

Tréner osemfinalistu afrického šampionátu Vladimír Weiss privítal na podvečernom zraze v hoteli Dolphin len polovicu z nominovaných hráčov, zvyšok sa k tímu pripojí neskôr, káder by mal byť kompletný na pondelňajšom večernom tréningu.

K tímu sa postupne pridajú kapitán Marek Hamšík, Juraj Kucka, Stanislav Šesták, Róbert Vittek či ďalší, ktorí mali ešte povinnosti v kluboch počas víkendu. Slováci si po splnení povinností s médiami podvečer v senecskom NTC zatrénovali (18.30, tréning zatvorený), v pondelok mali v pláne absolvovať až dve tréningové jednotky (10.00 a 18.30).

Zdroj: <http://www.pluska.sk/sport/futbal/reprezentacie/slovenska-reprezentacia/weiss-zraze-pred-chorvatskom-privital-polovicu-hracov.html>

Úloha 1. V akých rôznych poradiach sa mohli pripojiť Marek Hamšík, Juraj Kucka a Róbert Vittek k mužstvu?

Úloha 2. Počas zápasu má tréner Vladimír Weiss možnosť troch striedaní. Aj napriek niekoľkým sľubným šanciam sa žiadnemu z hráčov nepodarilo do 50-tej minúty streliť gól. Rovnako tak Slovensko dovtedy gól neinkasovalo. Tréner Weiss sa preto domnieval, že chyba určite nie je v obrane. Zdalo sa mu vhodné vystriedať trojicu, ktorú si vyberie spomedzi týchto hráčov Kucka, Karhan, Stoch, Hološko, Šesták. Aké rôzne trojice hráčov mohli byť vystriedané? Nastúpili títo hráči Mucha – Pekarík, Škrtel, Saláta, Hubočan – Weiss, Kucka, Karhan, Stoch – Hološko, Šesták.

Metodické pokyny:

Prvá úloha je zameraná na vytváranie trojíc prvkov, pričom nám záleží na poradí a naopak v druhej úlohe ide o vytváranie trojíc prvkov, pričom nám nezáleží na poradí. Žiaci najskôr tvoria trojprvkové permutácie a potom trojprvkové kombinácie. Úloha je zameraná na uvedomenie si rozdielu medzi možnosťami, ak nám záleží na poradí prvkov a možnosťami, ak nám nezáleží na poradí prvkov.



4.3. Vyhrajte s Orangeom

Nazbierajte všetky písmená zo slova ORANGE, pošlite ich na našu adresu a vyhrajte nový mobilný telefón LG GV 300. Ako nato? Stačí si dobiť kredit sumou 7€ alebo 14€. Pri dobití sumou 7€ získate jedno písmeno a pri dobití 14€ dve rôzne písmená.



Úloha 1. Čo je výhodnejšie, dobiť si kredit dvakrát za 7€ alebo raz za 14€? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 2. Aká je šanca, že pri dobití kreditu dvakrát za 7€, nedostaneš rovnaké písmená?

Úloha 3. Ak ti chýba len písmeno A, aká je šanca, že ho dostaneš, ak si dobiješ kredit a) za 7€, b) za 14€?

Metodické pokyny:

Žiaci si môžu súťaž vyskúšať. Trieda sa rozdelí na dve časti: prvá polovica si bude dobíjať kredit sumou 7€ a druhá polovica sumou 14€. Učiteľ pripraví kartičky s písmenami. Do jedného vrečka vloží kartičky so všetkými písmenami (každé práve raz). Z tohto budú žiaci ťahať kartičky. Tí, ktorí si dobíjajú kredit sumou 7€ jedno písmenko. Tí, ktorí dobíjajú kredit sumou 14€ si budú vyťahovať dve kartičky. Po vytiahnutí a zapísaní písmenka žiak kartičku (kartičky) do vrečka vráti. Súťaž môže trvať pokým niektorý žiak nezíska celé slovo (s ohľadom na čas). Počas súťaže si žiaci zapisujú aké písmená dostanú. Na základe týchto údajov šancu v druhej a tretej úlohe najskôr odhadnú a potom overia výpočtom. Ten spočíva v úlohe 2 v zistení počtu kombinácií druhej triedy zo šiestich prvkov s opakovaním a ich rozdelenia na dvojice s rôznymi prvkami a dvojice s rovnakými prvkami. V úlohe 3 je výpočet založený najskôr na zistení počtu kombinácií prvej triedy zo šiestich prvkov a ďalej na zistení počtu kombinácií druhej triedy zo šiestich prvkov bez opakovania.

Aby si žiaci utvárali všeobecnú predstavu o vyjadrení šance bez viazanosti na konkrétne vypísané možnosti, je pri riešení úloh dôležité používať spojenie „pre nás priaznivé (nepriaznivé) možnosti resp. situácie“.

5. Hlavná hypotéza výskumu, výsledky výstupných testov a ďalšie hypotézy

Hlavnou hypotézou výskumu je hypotéza:

H_0 : *Pripravené materiály efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 5. ročníka (6. ročníka) ZŠ.*

Výstupný test pre 5. ročník ZŠ obsahoval 6 úloh (1 úloha z oblasti Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika), z ktorých každá pozostávala z niekoľkých podúloh. Všetky otázky v úlohách boli otvorené. Rovnaký počet úloh obsahoval aj výstupný test pre 6. ročník ZŠ (2 úlohy z oblasti Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika). Obsahová validita oboch testov bola posúdená učiteľmi 5. resp. 6. ročníka ZŠ. Testy boli najskôr odskúšané na jednej z experimentálnych škôl a na základe toho boli niektoré úlohy mierne upravené. Každá z úloh mala pridelený určitý počet bodov. Každý žiak mohol získať celkovo maximálne 30 bodov (Súčet).

Na základe výsledkov výstupného testu pre konkrétny ročník sa overuje nasledovná hypotéza:

H_1 : *Úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej skupine je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v kontrolnej skupine v prospech experimentálnej skupiny.*

Okrem tejto hypotézy sme si stanovili overiť a ďalšie hypotézy:

H_2 : *Úroveň vedomostí chlapcov nie je významne odlišná od úrovne vedomostí dievčat.*

H_3 : *Úroveň vedomostí žiakov s poruchou učenia je významne odlišná od úrovne vedomostí ostatných žiakov.*

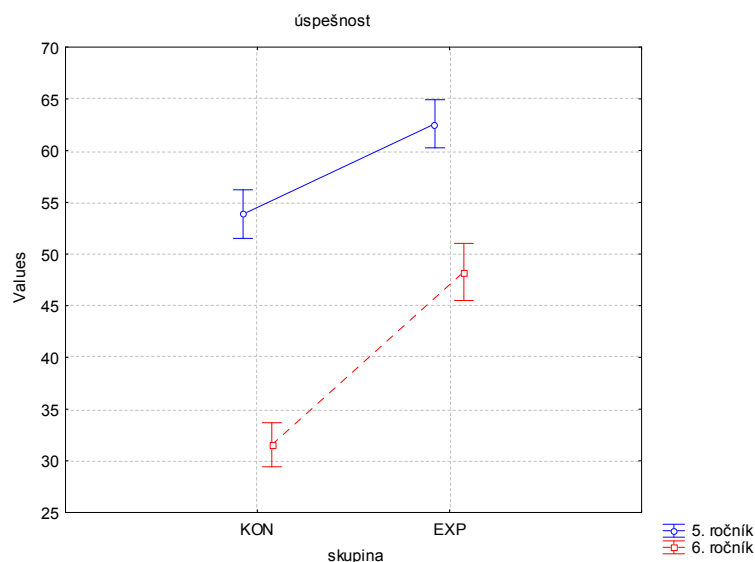
H_4 : *Úroveň vedomostí žiakov vo vidieckych školách nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v mestských školách.*

Na testovanie platnosti štatistických hypotéz sme použili neparametrický *Mann-Whitneyov U test*.

5.1. Porovnanie úrovne vedomostí v experimentálnej a kontrolnej skupine škôl

Štatistickým vyhodnotením výsledkov výstupných testov možno konštatovať, že sa hypotéza H_1 potvrdila v každom ročníku (5. roč.: p -hodnota = 0,000, 6. roč.: p -hodnota = 0,000). Teda úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej skupine škôl (EXP) je v oboch ročníkoch významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v kontrolnej skupine škôl (KON) v prospech experimentálnej skupiny.

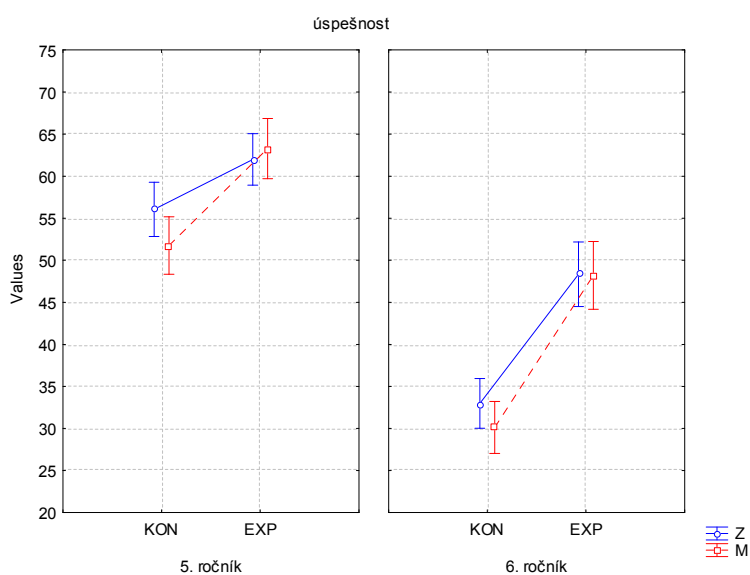
Na obrázku 1 na ďalšej strane možno vidieť, že výraznejší rozdiel nastal v 6. ročníku ZŠ. Na základe čoho možno konštatovať, že efektívnosť vyučovania pomocou pripravených materiálov sa po dvoch rokoch prejavuje výraznejšie.



Obr. 1: Graf priemerov pre skupiny KON a EXP

5.2. Porovnanie úrovně vedomostí vzhľadom na pohlavie žiakov

Z obrázku 2 možno vidieť, že sa nepreukázal štatisticky významný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na pohlavie žiakov. Dokonca v 6. ročníku bola zmena v úrovni vedomostí chlapcov (M) a dievčat (Z) medzi kontrolnou a experimentálnou skupinou takmer identická. To znamená, že sa hypotéza H_2 potvrdila.

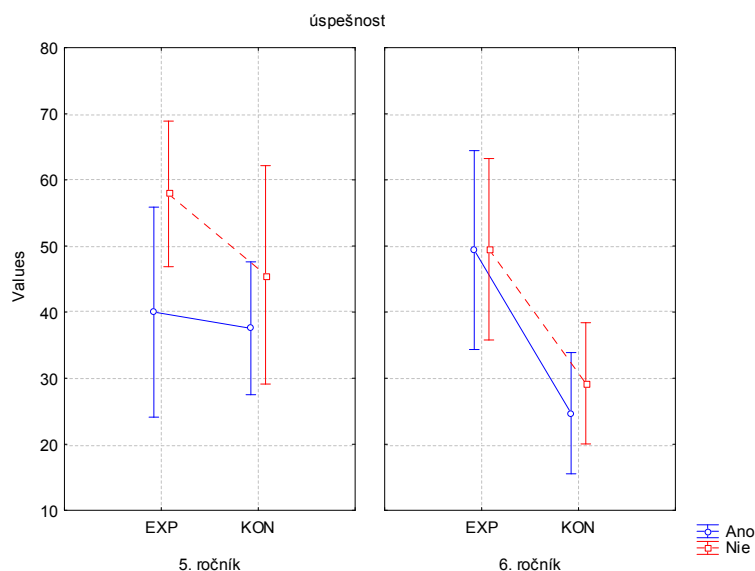


Obr. 2: Graf priemerov pre skupiny Z a M

5.3. Porovnanie úrovně vedomostí vzhľadom na poruchy učenia

Pri vyhodnotení výsledkov v skupine žiakov s poruchami učenia (Ano) a bez porúch učenia (Nie) sme zo skupiny žiakov bez porúch učenia vybrali náhodnú vzorku s približne rovnakým rozsahom ako má skupina žiakov s poruchami učenia. Čím sme zabránili porovnávaniu skupiny s veľmi odlišným rozsahom.

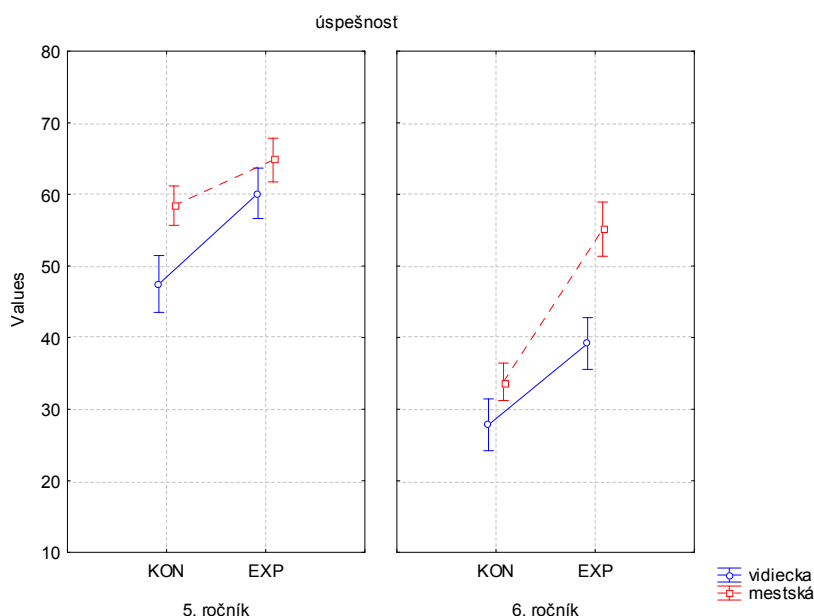
Bolo zistené, že nebol štatisticky významný rozdiel v úrovni vedomostí skupiny žiakov Ano a skupiny žiakov Nie v experimentálnych školách. Toto by mohlo viesť k záveru, že pripravené materiály efektívne prispeli k lepšej integrácii týchto žiakov. Avšak, ak porovnáme tieto dve skupiny žiakov aj v rámci skupiny kontrolných škôl, zistíme, že už tu nie je štatisticky významný rozdiel v úrovni vedomostí žiakov s poruchami učenia a bez porúch učenia. Hypotéza H_3 sa teda prekvapivo nepotvrdila.



Obr. 3: Graf priemerov pre skupiny Ano a Nie

5.4. Porovnanie úrovně vedomostí vzhľadom na polohu školy

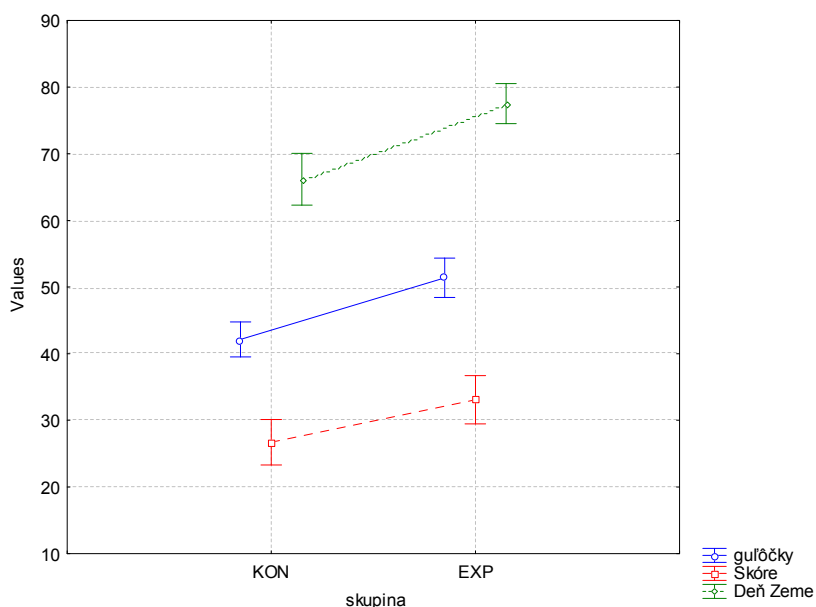
Zaujímavé výsledky sa vyskytli v rámci rozdelenia škôl na vidiecke školy (vidiecka) a mestské školy (mestská). V 5. ročníku bol zistený štatisticky významný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na polohu školy iba v kontrolných školách a to v prospech mestských škôl. Naopak v 6. ročníku ZŠ bol štatisticky významný rozdiel v úrovni vedomostí žiakov zistený len v rámci experimentálnych škôl a to v prospech mestských škôl.



Obr. 4: Graf priemerov pre skupiny Vidiecka a Mestská

5.5. Porovnanie úspešnosti riešenia úloh z kombinatoriky, pravdepodobnosti a štatistiky

Úloha Guľôčky bola zaradená vo výstupnom teste 5. ročníka ZŠ. Zameriava sa na pochopenie pojmu a výpočet šance. Ostatné dve úlohy Skóre a Deň Zeme boli zaradené vo výstupnom teste 6. ročníka. V úlohe Deň Zeme museli žiaci



Obr. 5: Graf priemerov pre úlohy Guľôčky, Skóre a Deň Zeme

preukázať schopnosť čítať údaje z grafu, zapisovať ich do tabuľky a uvažovať nad zmenou grafu v prípade zmeny dát. Obsah úlohy Skóre tvorí kombinatorika a výpočet šance. Z výsledkov štatistického vyhodnotenia úspešnosti jednotlivých úloh z kombinatoriky, pravdepodobnosti a štatistiky vyplýva, že vo všetkých troch úlohách dosiahli žiaci experimentálnych škôl štatisticky významne lepšie výsledky ako žiaci kontrolných škôl (obrázok 5).

6. Záver

Na základe výsledkov výstupných testov a ich štatistického spracovania možno konštatovať, že pripravené materiály efektívne prispievajú k zvyšovaniu úrovne vedomostí v oblasti kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika.

Navyše, porovnaním výsledkov z oboch rokov riešenia projektu je zreteľné, že táto efektívnosť má stúpajúcu tendenciu s rastúcim počtom rokov odučených prostredníctvom týchto materiálov. Zároveň z komunikácie s učiteľmi vyplýva, že tieto materiály a zvlášť metodické pokyny oceňujú a úlohy sú u žiakov obľúbené. Jedna z učiteliek napísala: „Zároveň by som sa chcela poďakovať za krásne kontextové úlohy, ktoré budem vedieť aj v budúcnosti vo vyučovaní použiť. Na kreditnom vzdelávaní som sa učila takéto úlohy aj tvoriť a musím skonštatovať, že to nie je jednoduché. Verím, že Vám moje postrehy a vyhodnotenia pomôžu a bude sa dať v projekte ďalej pokračovať. Za všetko ešte raz veľmi pekne ďakujem.“

Literatúra

- [1] Kóšová, M.; Rybanský, Ľ. 2011. *Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 6. ročník projektu KEGA 3/7001/09*. In: Zborník príspevkov z IX. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2011. ISBN 978-80-8094-958-7.
- [2] Rybanský Ľ.; Vrábelová M.: *Štatistické spracovanie výsledkov vstupného testu KEGA 3/7001/09*. In: Zborník príspevkov z vedeckej konferencie Pedagogická veda a školská prax v historickom kontexte (28. január 2010), Katedra pedagogiky Filozofickej fakulty Univerzity sv. Cyrila a Metoda v Trnave, 2010. ISBN 978-80-8105-182-1.
- [3] Rybanský Ľ.; Vrábelová M.: *Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. ročník projektu KEGA 3/7001/09*. In: Zborník príspevkov z VIII. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre (16. – 17. september 2010), Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2010. ISBN 978-80-8094-781-1.

VISUALISATION OF F AND CR INFLUENCE ON DIFFERENTIAL EVOLUTION SOLUTION

Miroslav Červenka, Hana Boudná

Adresa: CGI, Holandská 868/5, 639 00, Brno-Štýřice

E-mail: miroslav.cervenka@centrum.cz

Abstract: This contribution studies impact of Differential Evolution's configuration parameters – the mutation factor F and the crossover rate CR – on the actual solution quality the optimisation process can yield. We present a set of visual maps displaying this relationship for ten variants of Differential Evolution and six standard test functions.

Keywords: Evolutionary Algorithms, Optimisation, Differential Evolution, Parameter Tuning, Parameter Visualisation.

1. Introduction

Evolutionary algorithms are often used in heuristic search for global optimum. Efficiency of evolutionary algorithms is strongly dependent on correct setting of their control parameters. Standard attempt in applications is to set up the values of control parameters by tuning via trial-and-error preliminary experiments. This is time-consuming and does not satisfy the user's natural requirement for quick and reliable heuristic search algorithm, which should be efficient enough to find global optimum without requiring any deeper user's knowledge.

The Differential Evolution (DE) as proposed by Storn and Price [1] is a powerful optimisation technique designed for global optimisation. It can be used as a general optimiser, yet its qualities emerge in assignments where conventional optimisation techniques fail. There are many successful engineering application of this indeed very strong algorithm like multiprocessor synthesis, neural network learning, radio network design or plasma reactor optimisation.

DE does not explicitly rely on gradient of the optimised problem, it works with multiple agents collaborating in a direct-search manner, treating the optimisation problem as a black-box, which merely emits a measure of fitness for candidate solutions. DE then creates new candidate solutions by combining solutions according a variant-specific chain of rules (see Table 1) from its current set of agents (*population*), accepting new solutions in case of fitness improvement.

DE treats its population in iteration loops called *generations*. In each generation every agent (a candidate solution – vector of parameters for the optimised model; an *individual*) is manipulated in order to increase its fitness. For example, in the variant DE/best/1 two randomly chosen individuals from the population are subtracted one from another. This product undergoes a *mutation* (multiplied by the mutation factor F) giving us a *weighted differential vector*. Consequently, this is added to the best individual from the population (having the best fitness) resulting into a *noise vector* (denoted as v in the Table 1). From this point, the procedure is then the same for all variants. According the *crossover rate* (CR), items from the current (modified) individual and the noise vector are selected in order to produce a *trial vector* (or *trial individual*), which is evaluated by the cost function. In case its fitness is better than fitness of the source individual, it survives into the next generation, while the weaker individual does not.

Differential Evolution is considered to be one of the most powerful evolutionary algorithms of present days. Besides its good convergence properties, the main advantage of DE lies with its conceptual simplicity, ease of use and low number of control parameters. However, like any other evolutionary algorithm, the success of DE is also very sensitive on setting of its control parameters. There are three DE's control parameters: (1) the population size NP , (2) the mutation factor F (a real-value factor that controls amplification of differential variations) and (3) the crossover factor CR (also a real value, controlling the crossover operation).

Intention of this paper is to reveal dependency between two DE's control parameters – F and CR – and the solution quality the algorithm can deliver.

2. Differential Evolution

Differential evolution (DE), introduced by Reiner Storn and Kenneth Price [1] has become one of the most frequently used, analysed and modified evolutionary algorithm for solving continuous global optimisation problems in recent years. The algorithm of DE written in pseudo-code can be seen in Algorithm 1 on next page.

The algorithm starts with a randomly generated population of individuals, each one of them representing a solution to the optimised problem in hand. In every generation for every individual a new trial vector z is generated by using mutation and crossover. There are various strategies how to create the mutant/noise vector y . Some of them can be seen in Table 1. After mutation, the noise vector is further processed by the crossover operation (see Algorithms 2 and 3) and the outcoming result is compared to the source

Algorithm 1 Differential Evolution

```

generate initial population  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{NP})$ ,  $x \in D$ 
 $g \leftarrow 0$ 
repeat
  for  $i=1$  to  $Dim$  do
     $y_i \leftarrow \text{generateMutant}(x_i(g))$ 
     $z_i \leftarrow \text{crossover}(x_i, y_i)$ 
    if  $f(z_i) < f(x_i)$  then
      insert  $z_i$  into new generation:  $x_i(g+1) \leftarrow z_i$ 
    else
      insert  $x_i$  into new generation:  $x_i(g+1) \leftarrow x_i(g)$ 
    end if
  end for
   $g \leftarrow g+1$ 
until stopping condition

```

Algorithm 2 Exponential crossover

```

crossoverExp( $x, y$ )
 $z \leftarrow x$ ;  $i \leftarrow \text{irand}(1, 2, \dots, NP)$ ;  $L \leftarrow 1$ 
repeat
   $z_i \leftarrow y_i$ 
   $i \leftarrow i+1$ ;  $L \leftarrow L+1$ 
until  $\text{rand}(0, 1) < CR$  and  $L \leq NP$ 
return  $z$ 

```

Algorithm 3 Binomial crossover

```

crossoverBin( $x, y$ )
for  $i=1$  to  $Dim$  do
  if  $\text{rand}(0, 1) < CR$  then
     $z_j \leftarrow y_j$ 
  else
     $z_j \leftarrow x_j$ 
  end if
end for
return  $z$ 

```

individual. If the new solution is better, it proceeds into the next generation; otherwise the source individual survives and the trial vector becomes extinct. During the running generations the individuals are supposed to improve. The algorithm ends when the population reaches a global extreme, loses its diversity, the algorithm reaches the predefined number of generations or on some other termination condition.

2.1. DE control parameters

One of the main problems in evolution strategies of DE is to choose control parameters such that they stimulate good behaviour – i.e. the algorithm does not prematurely converge to a point that is not globally optimal or stagnate, and has an acceptable rate of convergence towards the global optimum. Premature convergence may occur under different situations: the population has converged to local optimum of the objective function, or the population has lost its diversity, or the search algorithm proceeds slowly or does not proceed at all [2]. It has been observed that DE sometimes stops proceeding towards a global optimum and stagnation occurs. Stagnation may occur under various situations: the population has not converged to a local optimum or any other point, or the population is still retaining some diversity and occasionally even of new individuals enter or are injected into the population, the search algorithm does not proceed towards any better solution [2].

For success of DE, setting of its control parameters is crucial. Best configuration depends on the problem in hand and limitation of computation time and accuracy [3]. As reported in the literature, control parameters of DE are not difficult to choose [1], but rules for choosing good ones are not general [1]. On the other hand, it is also reported that choosing proper control parameters for DE can be more difficult than expected. It is important to select optimal parameters for each problem separately and carefully to avoid premature convergence or even stagnation [2, 5, 6]. Brest et al. [7] assessed the selection of control parameters and reported that efficiency and robustness of DE are much more sensitive to setting of mutation factor F and crossover rate CR than to the value of population size NP . Zaharie [8, 23] discussed the relationship between control parameters of DE and the evolution of population variance and reported critical interval for control parameters of DE. Teo [9] proposed a method of self adapting population size in addition to self adapting mutation and crossover factor. There are also other papers indicating that the self adaptation and self evolution in DE stand for an interesting issue to look onto [9–13]. Some other attempts to DE control parameters adaptation are summarized in Liu and Lampinen [14].

Run of DE (and evolutionary algorithms in general) is indeed a dynamic and adaptive process. Use of rigid parameters that do not change their values is thus in contrast to this spirit. Additionally, it is intuitively obvious, and it has been empirically and theoretically demonstrated, that different values of control parameters might be optimal at different stages of the evolutionary process [16–21]. Therefore the authors of [15] claim that use of static configuration does not bring any benefits to the optimisation process.

Even though using fixed configuration parameters for DE optimisation might look obsolete, intention of paper is to look visually on the influence of mutation factor F and crossover factor CR on overall quality of final solution.

2.2. Choice of the Control Parameters

In [1], Rainer and Storn claim that it is not difficult to choose NP , F and CR in order to obtain good results. According to their experience a reasonable choice for NP is between $5 \cdot Dim$ and $10 \cdot Dim$ but NP must be at least 4 to ensure that DE will have enough mutually different vectors to work with. As for F , $F = 0.5$ is usually supposed to be a good initial choice. If the population converged prematurely, then F and/or NP should be increased. Values of F smaller than 0.4, like those greater than 1, are only occasionally effective. A good first choice for CR is 0.1, but since a large CR often speeds the convergence up, trying first $CR = 0.9$ or $CR = 1.0$ is appropriate in order to see if a quick solution is possible. Eventually, authors of [1] advise setting up values of F and CR depending on the results of preliminary tuning in the region $0.5 \leq F \leq 1$ and $0 \leq CR \leq 1$. There are also other papers dealing with the problem of setting DE's control parameters. Ali and Törn [22] suggested simple expression how to adapt the value of the scaling factor F within the search process. Zaharie [8, 23] derived critical intervals for the control parameters. Another source [13] suggests good initial settings to be $F = 0.8$ and $CR = 0.5$. Babu na Jehan in their paper [24] deal with the F factor up to value of 1.2 and some other authors even suggest using $F \leq 2$.

In overall, in the literature there are no rigid guidelines one can follow when starting with DE optimisation. We know that quality of the optimisation process strongly depends on the F and CR parameters. We also have some intervals of their initial values. But we still do not know what the relation between F , CR and the solution quality is. For that reason we designed set of experiments, which should bring some light into this issue and visualise this relationship. These experiments are described in next sections.

3. The Experiments

3.1. Settings of Experiments

Motivation of our experiments was to map the influence of F and CR parameters on solution quality spawned by the DE optimisation process. For the examination we chose 10 DE variants (every variant with both Bin and Exp crossover; see Table 1) for search of global extremes performed on 6 selected standard test functions as listed in Table 2. For a thorough exploration we used the following configuration of DE: $NP = 400$, $generations = 200$, $minDiv = 0$ (every run of DE is forced to perform 200 generations). Over the solution quality plot we laid a mesh of F and CR parameters in the range

$$\begin{aligned} F &\text{ in } (0; 0.05; 2) \\ CR &\text{ in } (0; 0.05; 1) \end{aligned}$$

resulting in 861 F - CR combinations, where every setting was evaluated 100 times. As a result, we performed $6 \cdot 10 \cdot 861 \cdot 100 = 5,166,000$ DE optimisations with total of 413,280,000,000 cost function evaluations.

3.2. Results of Experiments

In general, Differential Evolution can provide very good results when we choose good configuration parameters for optimisation of a particular function. In case we pick improper values, the outcoming result can be fairly poor. When not using a self-adaptive or self-tuning version of DE algorithm, manual setting of DE configuration parameters can become rather tricky process. In the stage of conducting preliminary trial experiments, the user can easily find a locally-optimal pair of (F, CR) producing fairly good results and without finding any better configuration, this settings will be further used for the actual optimisation.

For a DE operator it is good to have an idea, to know which pairs of (F, CR) yield useful results while avoiding combinations resulting in insufficient or even bad results. Therefore we created maps of (F, CR) pairs for combinations of several standard test functions (Table 2) and selected versions of Differential Evolution as in Table 1. The maps (see Figures 1, 2, and 3) show us regions which we should rather walk around (lighter colours) and areas which bring us good results even if we have not exactly the best configuration parameters (darker colours). The maps are organised according the DE-variant performance ratings in Table 4.

The experimental results show us that the relationship between (F, CR) and solution quality strongly depends on both, the optimised function and

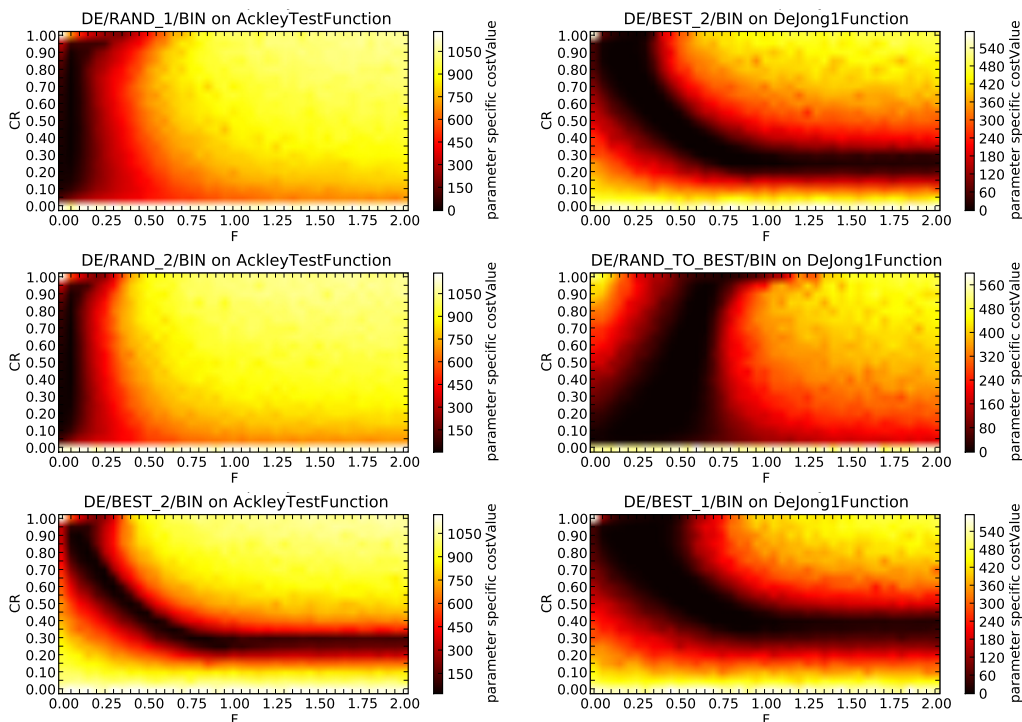


Figure 1: DE solution quality as a function of F and CR control parameters. Ackley test function in the left column, DeJong1 function in the right column. Darker colour represents better solution.

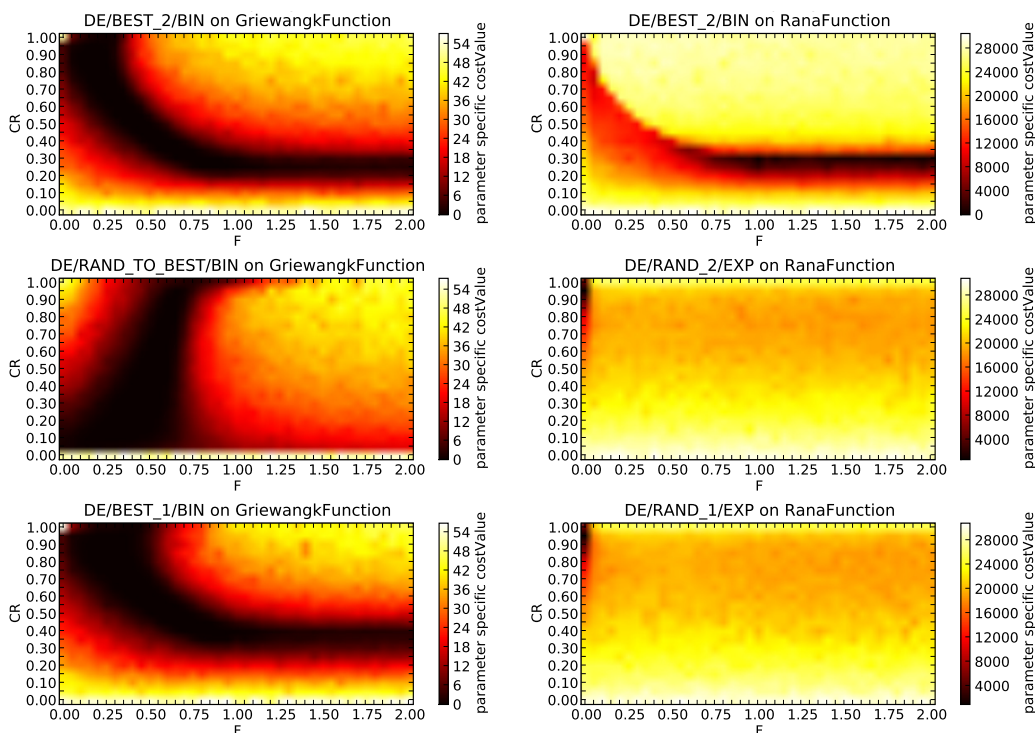


Figure 2: DE solution quality as a function of F and CR control parameters. Griewangk function in the left column, Rana function in the right column. Darker colour represents better solution.

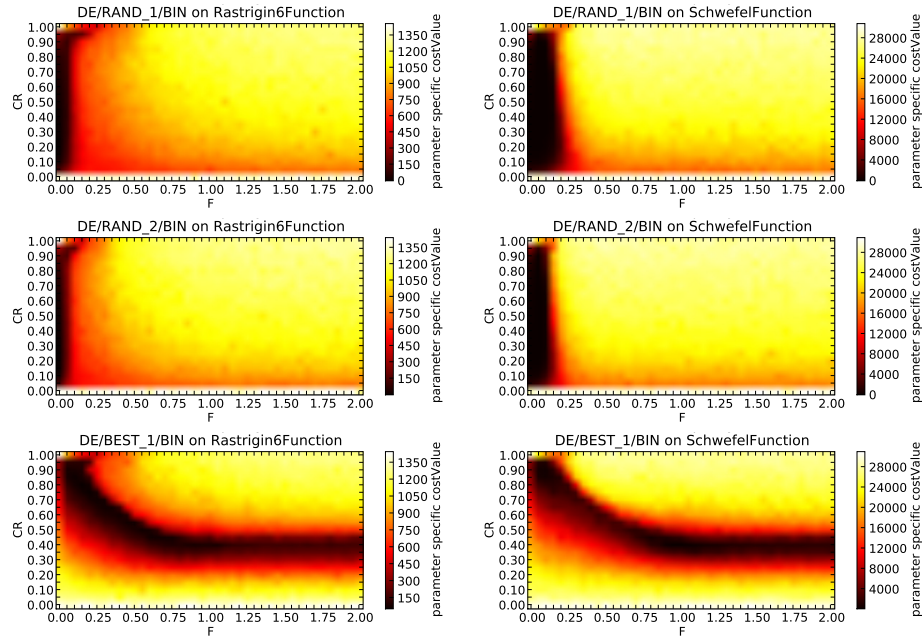


Figure 3: DE solution quality as a function of F and CR control parameters. Rastrigin6 function in the left column, Schwefel function in the right column.

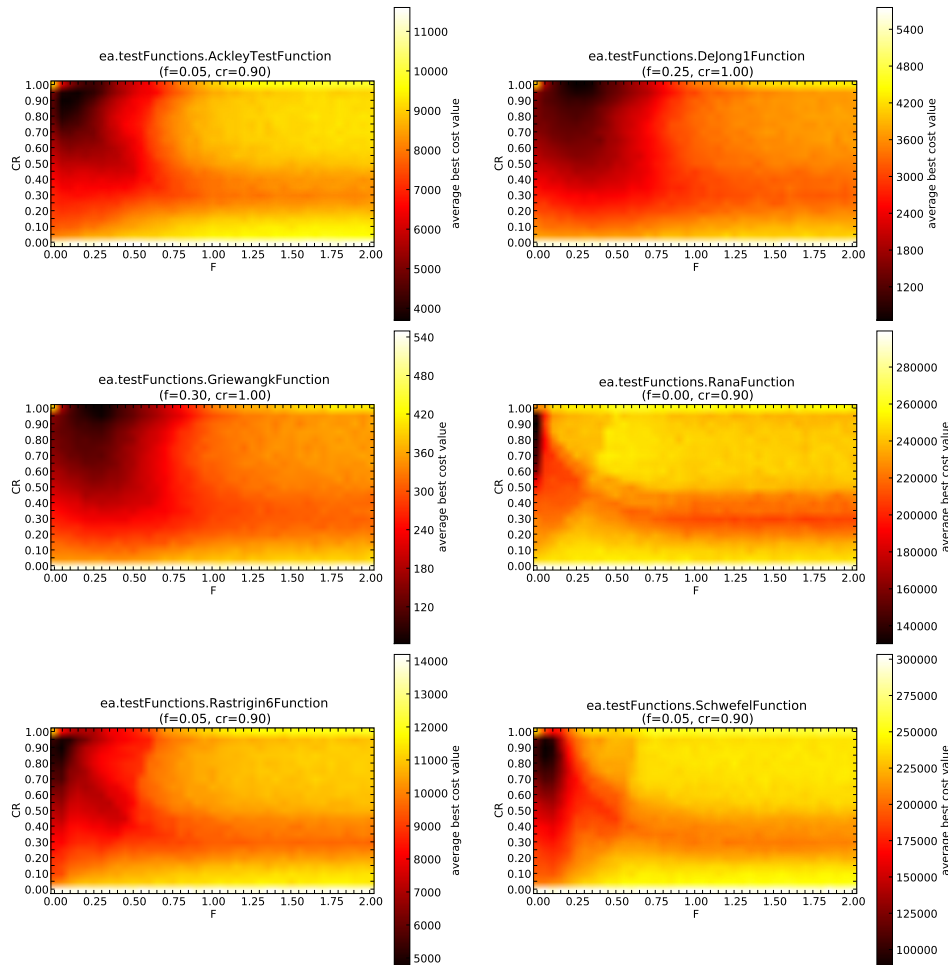


Figure 4: Parameter maps for optimised functions. Values in brackets stand for the best DE parameter configuration found for given function.

No.	DE Variant	Formula
1	DE/best/1	$v = x_{best,j}^G + F \cdot (x_{r_1,j}^G - x_{r_2,j}^G)$
2	DE/rand/1	$v = x_{r_1,j}^G + F \cdot (x_{r_2,j}^G - x_{r_3,j}^G)$
3	DE/rand-to-best/1 ^{*)}	$v = x_{i,j}^G + \lambda \cdot (x_{best,j}^G - x_{i,j}^G) + F \cdot (x_{r_1,j}^G - x_{r_2,j}^G)$
4	DE/best/2	$v = x_{best,j}^G + F \cdot (x_{r_1,j}^G + x_{r_2,j}^G - x_{r_3,j}^G - x_{r_4,j}^G)$
5	DE/rand/2	$v = x_{r_5,j}^G + F \cdot (x_{r_1,j}^G + x_{r_2,j}^G - x_{r_3,j}^G - x_{r_4,j}^G)$

Table 1: Analysed variants of Differential Evolution.

^{*)} λ controls the greediness of the scheme and is usually set as $\lambda = F$.

Name	Formula	Range
AckleyTest	$\sum_{i=1}^{\text{Dim}-1} \left(3(\cos 2x_i) + \sin(2x_{i+1}) + \frac{\sqrt{x_{i+1}^2 + x_i^2}}{e^{0.2}} \right)$	$\langle -20; 20 \rangle$
DeJong1	$\sum_{i=1}^{\text{Dim}} x_i^2$	$\langle -5.12; 5.12 \rangle$
Griewangk	$-\prod_{i=1}^{\text{Dim}} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + \sum_{i=1}^{\text{Dim}} \frac{x_i^2}{4000} + 1$	$\langle -100; 100 \rangle$
Rana	$\sum_{i=1}^{\text{Dim}-1} ((x_{i+1} + 1) \cdot \cos A \cdot \sin B + x_i \cdot \sin A \cdot \cos B)$ $A = \sqrt{ x_{i+1} - x_i + 1 }, B = \sqrt{ x_{i+1} + x_i + 1 }$	$\langle -500; 500 \rangle$
Rastrigin6	$\sum_{i=1}^{\text{Dim}} (x_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x_i))$	$\langle -5.12; 5.12 \rangle$
Schwefel	$\sum_{i=1}^{\text{Dim}} -x_i \sin(\sqrt{ x_i })$	$\langle 0; 500 \rangle$

Table 2: Used test functions.

All test functions were explored in 100 dimensions.

Test Function	DE Variant	F	CR	BestCostValue
AckleyTest	DE/RAND_1/BIN	0.05	0.60	-289.4354
DeJong1	DE/BEST_2/BIN	0.60	0.35	0.0007
Griewangk	DE/BEST_2/BIN	0.70	0.30	1.0000
Rana	DE/BEST_2/BIN	1.00	0.30	-37989.5305
Rastrigin6	DE/RAND_1/BIN	0.00	0.20	-969.6812
Schwefel	DE/RAND_1/BIN	0.05	0.65	-41894.2869

Table 3: Best DE configurations by optimised function.

TestFunction	Rank	DE Variant	Average	
			CostValue	Distance
AckleyTest	1	DE/RAND_1/BIN	-289.4354	0.5983
	2	DE/RAND_2/BIN	-282.4665	3.5968
	3	DE/BEST_2/BIN	-265.7098	11.9414
DeJong1	1	DE/BEST_2/BIN	0.0007	0.0012
	2	DE/RAND_TO_BEST/BIN	0.0018	0.0026
	3	DE/BEST_1/BIN	0.0019	0.0022
Griewangk	1	DE/BEST_2/BIN	1.0000	0.0001
	2	DE/RAND_TO_BEST/BIN	1.0001	0.0003
	3	DE/BEST_1/BIN	1.0002	0.0002
Rana	1	DE/BEST_2/BIN	-37989.5305	1285.2668
	2	DE/RAND_2/EXP	-37317.1386	1487.7359
	3	DE/RAND_1/EXP	-37034.8004	1303.3755
Rastrigin6	1	DE/RAND_1/BIN	-969.6812	7.4223
	2	DE/RAND_2/BIN	-968.0062	5.6899
	3	DE/BEST_1/BIN	-915.3223	17.8376
Schwefel	1	DE/RAND_1/BIN	-41894.2869	0.9037
	2	DE/RAND_2/BIN	-41890.6897	1.3015
	3	DE/BEST_1/BIN	-41759.6449	346.6248

Table 4: Best DE variants by optimised function. The Average CostValue is calculated from best 100 solutions for given test function, the Average Distance as average difference between 100 best costValues from the top solution.

used DE variant. As stated in [1], there is no need to used the mutation factor $F > 1$, alghough we can little argue about the statement ‘solutions tend to be more time consuming and less reliable than if $F < 1$ ’.

One of the best solutions we found was in configuration with $F = 1$ (DE/best_2/bin on Rana’s function, see Table 3) and the map in Figure 2 shows us that region of the most suitable solutions extends just behind $F \geq 1$. On the other hand, this is a solitary example, in most of the other cases the value of F was below 1. A range from which to choose the crossover factor is difficult to narrow down. The interval from the literature $0 \leq CR \leq 1$ can be cropped by the the values of $CR \leq 0.1$ as DE with the crossover factor set below this value never performed good optimisation.

Images in Figure 4 represent a view of all maps created for all variants of DE overlaid and stacked one on top of each other. These maps display ‘hot zones’ and highlight the parameters which might produce good results.

As this contribution is limited by the space, you can see more parameter-maps for all combinations of test functions listed in Table 2 and DE variants from Table 1 on the webpage <http://cml.utb.cz/eaExperiments/>.

4. Conclusions

The aim of this work was to create maps visualising the relationship between the DE’s configuration parameters F , CR and the solution quality. For this purpose we chose 10 variants of Differential Evolution to perform optimisation tasks on six standard test functions. Presented maps show us dependency of final solution quality not only on the DE’s configuration parameters, but also on DE variant and mainly on particular optimised function. There are some similarities between the maps for various cost functions and DE variants, but no solid association can be determined.

In the future, these experiments could be extended by more standard test functions. Further, next work could include the CEC 2005 benchmark functions to create a comprehensive library of DE’s (F , CR) maps.

References

- [1] Storn, R.; Price, K.: Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, 341–359, 1997.
- [2] Lampinen, J.; Zelinka, I.: On Stagnation of the Differential Evolution Algorithm. *Proceedings of MENDEL*, 76–83, 2000.
- [3] Liu, J.; Lampinen, J.: On the Setting of Control Parameter of the Differential Evolution Method. *Proceedings of MENDEL*, 11–18, 2002.
- [4] Gämperle, R.; Müller, S. D.; Koumoutsakos, P.: A Parameter Study for Differential Evolution. *Advances in Intelligent Systems, Fuzzy Systems, Evolutionary Computation*. WSEAS Press, 293–298, 2002.
- [5] Zielinski, K.; Weitkemper, P.; Laur, R.; Kammeyer, K. D.: Parameter Study for Differential Evolution Using a Power Allocation Problem Including Interference Cancellation. *Proceedings of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 1857–1864, IEEE Press, 2006.
- [6] Rönkkönen, J.; Kukkonen, S.; Price, K. V.: Real-parameter Optimization with Differential Evolution. *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 506–513, IEEE Press, 2005.

- [7] Brest, J.; Zumer, V.; Maucec, M. S.: Self-Adaptive Differential Evolution Algorithm in Constrained Real-Parameter Optimization. *Proceedings of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 215–222, IEEE Press, 2006.
- [8] Zaharie, D.: Critical Values for the Control Parameters of Differential Evolution Algorithms. *Proceedings of MENDEL*, 62–67, 2002.
- [9] Teo, J.: Differential Evolution with Self-adaptive Populations. *KES, Lecture Notes in Computer Science*, 3681: 1284–1290, Springer, 2005.
- [10] Tvrdík, J.; Křivý, I.: Competitive Self-adaptation in Evolutionary Algorithms. *Proceedings of EUSFLAT*, 251–258, Universitas Ostraviensis, 2007.
- [11] Tvrdík, J.; Křivý, I.; Mišík, L.: Adaptive Population-Based Search: Application to Estimation of Nonlinear Regression Parameters. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(2): 713–724 (2007).
- [12] Tvrdík, J.: Differential Evolution with Competitive Setting of its Control Parameters. *TASK Quarterly*, 11: 169–179, 2007.
- [13] Tvrdík, J.: Adaptation in Differential Evolution: A Numerical Comparison. *Applied Soft Computing*, 9: 1149–1155, Elsevier, 2009.
- [14] Liu, J.; Lampinen, J.: A Fuzzy Adaptive Differential Evolution Algorithm. *Soft Computing*, 9: 448–462, 2005.
- [15] Eiben, A. E.; Hinterding, R.; Michalewicz, Z.: Parameter Control in Evolutionary Algorithms. *Proceedings of IEEE-EC*, 124–141, 1999.
- [16] Bäck, T.: The Interaction of Mutation Rate, Selection, and Self-Adaptation Within a Genetic Algorithm. *Parallel Problem Solving from Nature*, 2: PPSN-II (2nd PPSN'92), 87–96, Elsevier, 1992.
- [17] Bäck, T.: Self-Adaptation in Genetic Algorithms. Proc. of the First European Conference on Artificial Life. *Toward a Practice of Autonomous Systems*, 263–271, MIT Press, 1991.
- [18] Bäck, T.: Optimal Mutation Rates in Genetic Search. *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*, 2–8, 1993.
- [19] Hesser, J.; Manner, R.: Towards an Optimal Mutation Probability for Genetic Algorithms. *Lecture Notes in Computer Science*, 496: 23–32, 1991.
- [20] Schaffer, J. D.; Eshelman, L. J.: On Crossover as an Evolutionary Viable Strategy. *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA '91)*, 61–68, Morgan Kaufmann Publishers, 1991.

- [21] Smith, J.: Modelling GAs with Self Adaptive Mutation Rates. *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2001)*, 599–606, Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [22] Ali, M. M.; Törn, A.: Population Set-Based Global Optimization Algorithms: Some Modifications and Numerical Studies. *Computers & Operation Research*, 31: 1703–1725, 2004.
- [23] Zaharie, D.: A Comparative Analysis of Crossover Variants in Differential Evolution. *Proceedings of the International Multiconference on Computer Science and Information Technology*, 171–181, 2007.
- [24] Babu, B. V.; Jehan, M. M. L.: Differential Evolution for Multi-Objective Optimization. *Proceedings of the 2003 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2003)*, 4: 2696–2703, IEEE Press, 2003.

KONFERENCE IARIA: DATASYS 2012

Vanda Vintrová

E-mail: vanda.vintrova@vse.cz

Ve dnech 21. až 26. října 2012 uspořádala společnost IARIA (International Academy, Research, and Industry Association) již druhý ročník série konferencí zabývajících se různými oblastmi informačních a komunikačních technologií a analýzou dat pod názvem DataSys.

Letošní ročník, který se konal v Benátkách, představil kromě loňských konferencí INFOCOMP, IMMM, SOTICS a MOBILITY ještě dvě nové konference GLOBAL HEALTH a INNOV. Na všech konferencích byly prezentovány jak příspěvky vědecké, tak příspěvky z průmyslové oblasti.

Cílem společnosti IARIA je zajistit všem příspěvkům co největší zviditelnění, plná verze příspěvků je proto k dispozici v Open Digital Library (ThinkMind) a to pro kohokoli a bez poplatků. Publikace z konferencí budou zaslány k indexování do CPCI a dalších relevantních specializovaných indexů. Náš příspěvek byl zaslán na konferenci IMMM 2012, zabývající se data miningem. Jedná se o významnou konferenci v daném odvětví, na kterou je v průměru přijato pouze 29 % zaslaných příspěvků.

Celá série konferencí DataSys probíhala v hotelu Novotel, kde bylo prezentováno více než 100 příspěvků. Jednalo se o poměrně malou konferenci, na které se právě díky této komorní atmosféře snadno navazovaly kontakty a vědecká spolupráce.

ZPRÁVA O ČINNOSTI ČESKÉ STATISTICKÉ SPOLEČNOSTI V ROCE 2012

**KTERÁ BYLA PŘEDNESENA A PROJEDNÁNA NA
VALNÉ HROMADĚ SPOLEČNOSTI DNE 31. 1. 2013**

1. Základní údaje o společnosti

Uplynulý rok byl druhým rokem dvouletého funkčního období výboru České statistické společnosti (ČStS), který byl zvolen na valné hromadě dne 7. 2. 2011. Předsedou byl prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc. (FS ČVUT v Praze), funkci prvního místopředsedy vykonávala prof. Ing. Hana Řezanková, CSc. (VŠE Praha), vědeckým tajemníkem byl prof. RNDr. Jan Pícek, CSc. (TU Liberec), a hospodářem byl Ing. Tomáš Löster (VŠE Praha).

K dnešnímu dni má ČStS 232 členů. Za uplynulý rok vstoupilo do společnosti 6 členů. V roce 2012 zemřeli 2 členové společnosti, 1 ukončil členství na vlastní žádost. V zahraničí žije celkem 11 členů, z toho 6 na Slovensku (4 jsou studenti, kteří studují zde, ale mají trvalé bydliště na Slovensku). Průměrný věk je 51,1 let.

2. Činnost výboru společnosti

V průběhu roku se konala dvě zasedání výboru České statistické společnosti. Kromě toho byla diskutována řada důležitých záležitostí prostřednictvím elektronické pošty a hlasování. V průběhu roku navíc proběhla řada neformálních setkání a porad při jednotlivých akcích. Podíleli jsme se na činnosti Federace evropských národních statistických společností (FENSTATS), především na práci výboru (přijímání nových členů) a vytvoření a správě webové prezentace. I v roce 2012 se konala schůzka skupiny V6, tentokrát organizovaná slovenskými kolegy v Bratislavě. Na pozvání maďarských kolegů se zástupci naší společnosti zúčastnili konference spojené s oslavou 60. výročí založení Maďarské statistické asociace v maďarském Balatonöszöd. Mezi nejdůležitější domácí události, na jejichž organizaci se výbor společnosti podílel, patří Novohradské statistické dny, třídní konference na jihu Čech, a týdenní konference Robust s mezinárodní účastí.

Po původním téměř ročním skluzu se nakonec podařilo dohnat zpoždění a vydat všechna čtyři čísla Informačního bulletinu.

3. Odborná aktivita společnosti

- Dne 3. 2. 2012 se konalo v budově VŠE v Praze Výroční zasedání společnosti, na které byly předneseny zprávy o činnosti a hospodaření výboru společnosti. Na Výročním zasedání přednesl odbornou přednášku doc. Karpíšek z FSI VUT Brno na téma fuzzy pravděpodobnost.
- Ve dnech 3. – 5. 6. 2012 se konaly Novohradské statistické dny pořádané ve spolupráci s ČMS JČMF, Ústavem fyzikální biologie Jihočeské Univerzity České Budějovice a grantem „Vzdělávání k posílení konkurenceschopnosti kapacit jihočeského výzkumu a vývoje“. Novohradské statistické dny byly věnovány především detekci změn ve statistických modelech s aplikacemi na modelování změn životního prostředí. Akce se zúčastnilo celkem 32 účastníků.
- Začátkem září ve dnech 9. – 14. 9. 2012 proběhla již tradiční 17. letní škola ROBUST 2012 v Němčičkách u Břeclavi. Konference se zúčastnilo kolem 100 účastníků nejen z Čech a Slovenska, ale i ze Španělska, Velké Británie a Holandska. V rámci této konference jsme vydali CD s cimbálovou muzikou bratří Wimmerovců, která zde (stejně jako před rokem v Brně při oslavách 20. výročí vzniku naší společnosti) zahrála při vínečku.
- Konference REQUEST 2012 se konala 29. 11. 2012 na Fakultě strojní ČVUT v Praze Dejvicích. Příspěvky z této konference vyjdou v Informačním bulletinu. Zúčastnilo se 42 kolegů z celé republiky.
- Čtvrtý Mikuklášský statistický den ČStS zorganizovala dne 6. 12. 2012 v respiriu MFF UK v pražském Karlíně. Mikukláš tentokrát nepřišel, zato byl zajímavý celodenní odborný program ukončený hudební tečkou skupiny FAB, s. r. o., a bluesboye Martina Chika.
- Internetové stránky společnosti byly pravidelně udržovány a aktualizovány díky práci kolegy doc. Jiřího Žváčka. Nově byla uvedena do provozu anglická stránka společnosti na adrese:
<http://csts.npx.cz/>
- V roce 2012 vyšlo pět čísel Informačního bulletinu: jedno číslo za rok 2011 a čtyři čísla za rok 2012. ČStS formálně spolupracovala na vydávání časopisu Statistika.

4. Plán aktivit pro rok 2013

- V roce 2013 bychom rádi uspořádali statistický den v některém z krásných míst naší republiky.
- V květnu 27. – 29. 5. 2013 se bude konat další slovensko-česká konference PRASTAN 2013 ve slovenských Kočovcích. Informace hledejte na: <http://www.math.sk/wiki/PRASTAN2013>
- Na podzim se bude konat další setkání skupiny V6, tentokrát ve slovinské Ljubljani.
- V rámci možností se budeme podílet na organizaci statistických konferencí u nás i v zahraničí.
- V prosinci uspořádáme opět Mikuklášský den na MFF UK v Praze.

V Praze, dne 31. 1. 2013

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
předseda společnosti

VALNÉ SHROMÁŽDĚNÍ ČESKÉ STATISTICKÉ SPOLEČNOSTI V ROCE 2013

Hana Řezanková

E-mail: hana.rezankova@vse.cz

Stejně jako v předchozích letech, tak také letos se sešli členové České statistické společnosti, aby zhodnotili události v uplynulém roce. Protože končilo dvouleté funkční období výboru společnosti, setkání na Vysoké škole ekonomické v Praze se konalo u příležitosti valného shromáždění svolaného na 31. ledna 2013. Valné shromáždění zahájil předseda společnosti, prof. Gejza Dohnal, který poté přednesl zprávu o činnosti výboru České statistické společnosti a též o akcích, které se uskutečnily v roce 2012. Po něm vystoupil Ing. Tomáš Löster se zprávou o hospodaření společnosti. Následovala zpráva revizora, RNDr. Jana Klaschky.

Před volbou předsedy, ostatních členů výboru a revizora na další období prof. Gejza Dohnal seznámil účastníky s nově navrhovanými členy, zařazenými na kandidátní listině. Zatímco probíhalo sčítání hlasů, byla zahájena

zvaná přednáška prof. Jaromíra Antocha na téma *Generování náhody je příliš důležité, než abychom jej mohli ponechat náhodě*. Přednáška byla inspirována algoritmem použitým Ministerstvem vnitra České republiky pro náhodný výběr petičních archů při ověřování petičních listin na podporu kandidátů na funkci prezidenta České republiky.

Po skončení přednášky byly vyhlášeny výsledky tajného hlasování. Předsedkyní České statistické společnosti byla zvolena prof. Ing. Hana Řezanková, CSc., z Katedry statistiky a pravděpodobnosti Vysoké školy ekonomické v Praze. Dalšími členy výboru společnosti byli zvoleni (v abecedním pořadí):

- prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc. (MFF UK Praha)
- RNDr. Jitka Bartošová, Ph.D. (VŠE, FM Jindřichův Hradec)
- doc. Ing. Dagmar Blatná, CSc. (VŠE Praha)
- RNDr. Marie Budíková, Dr. (PřF MU Brno)
- prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc. (FS ČVUT v Praze)
- Ing. Martina Litschmannová, Ph.D. (FEI VŠB-TU Ostrava)
- Ing. Tomáš Löster, Ph.D. (VŠE Praha)
- RNDr. Marek Malý, CSc. (SZÚ Praha)
- prof. RNDr. Jan Pícek, CSc. (TU Liberec)
- Mgr. Ondřej Vencálek, Ph.D. (PřF UP Olomouc)
- Ing. Ondřej Vozár (ČSÚ)
- RNDr. Marta Žambochová, Ph.D. (UJEP Ústí nad Labem)

Byl zvolen také RNDr. Pavel Popela, Ph.D. (VUT Brno), který se vzdal funkce, protože dva kandidáti obdrželi stejný nejnižší počet hlasů a ve stanovách není tato situace ošetřena.

V závěrečné diskuzi Ing. Jaroslav Češka vyzval členy společnosti, aby se svým členstvím zapojili do činnosti sekci Mezinárodního statistického institutu (ISI), neboť podle jeho názoru v nich statistická komunita České republiky není dostatečně zastoupena. Připomněl výhodu nižšího vložného na konferenci ISI a jeho sekci a informoval o snížené výši členských příspěvků pro mladé členy (35 let a mladších).

Na první schůzi výboru České statistické společnosti, která se konala 27. února 2013, byli zvoleni další členové předsednictva, které bude pracovat ve složení:

- prof. Hana Řezanková – předsedkyně,
- prof. Gejza Dohnal – místopředseda,
- prof. Jan Pícek – vědecký tajemník,
- Ing. Tomáš Löster – hospodář.

Dále výbor společnosti ustavil funkci odpovědného redaktora časopisu Informační bulletin České statistické společnosti, kterou bude zastávat Mgr. Ondřej Vencálek. Činnost technického redaktora bude i nadále vykonávat Ing. Pavel Stríž.

SLOVENSKÁ ŠTATISTICKÁ A DEMOGRAFICKÁ SPOLOČNOSŤ MÁ 45 LET

Hana Řezanková

E-mail: hana.rezankova@vse.cz

Dne 28. března 2013 uplynulo 45 let od založení Slovenské statistické a demografické společnosti (SŠDS). Původní název byl Slovenská demografická a štatistická spoločnosť, po rozšíření členské základny o matematické statistiky se 14. 3. 1990 název změnil na SŠDS.

Při příležitosti výročí založení se 20. března 2013 konala slavnostní konference *45 rokov Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti: minulosť, prítomnosť, budúcnosť*, nad níž převzala záštitu předsedkyně Statistického úřadu Slovenské republiky PhDr. Ľudmila Benkovičová, CSc. Místem konání bylo Sládkovičovo, konferenční prostory hotelu Tevel.

Konferenci zahájil doc. Jozef Chajdiak, předseda SŠDS, moderátorem byl místopředseda pro mezinárodní styky RNDr. Peter Mach (předseda SŠDS v letech 1990–2010). Jako první vystoupila předsedkyně ŠÚ SR dr. Ľudmila Benkovičová s příspěvkem zaměřeným na hlavní oblasti činnosti ŠÚ SR. Dále následovaly příspěvky týkající se činnosti SŠDS v uplynulých 45 letech, vývoje vybraných ukazatelů Slovenské republiky, problémů vhodnosti aplikace

některých statistických metod, výuky statistiky a snah o získání zájmu studentů o statistiku. V odpolední části vystoupila předsedkyně České statistické společnosti prof. Hana Řezanková s příspěvkem informujícím o aktivitách České statistické společnosti na mezinárodní úrovni.

Posledním bodem slavnostní konference SŠDS bylo předání pamětních listů významným členům SŠDS a významným pracovníkům ŠÚ SR. Jeden z pamětních listů byl určen též pro Českou statistickou společnost. Ke slavnostní konferenci SŠDS se v pozdějším odpoledni připojilo slavnostní zahájení *11. Slovenské demografické konference*, která ve stejných prostorách pokračovala následující dva dny.

Příspěvky ze slavnostní konference jsou opublikovány ve sborníku *45 rokov Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti* (editoři jsou Jozef Chajdiak a Ján Luha), který je on-line na adrese:

<http://www.ssds.sk/publikacie/45rSSDS.pdf>



Zleva: Peter Mach, Hana Řezanková, Jozef Chajdiak

STATISTICKÉ DNY NA BREJLOVĚ

Dovolujeme si Vás pozvat na Statistické dny na Brejlově, které se uskuteční od 26. do 29. září 2013 na Mlýně Brejlov, <http://www.brejlov.cz/>.

Jak se nám v roce 2011 zadařilo u Stakanu, tak i Statistické dny budou vhodně spojeny s konferencí $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ istů, letos částečně se sedmým ročníkem $\text{ConT}_{\text{E}}\text{Xt}$ mítinku a zcela s šestým ročníkem konference $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ perience. To vše bez výrazného navýšení konferenčního poplatku. Více informací hledejte na:

<http://www.cstug.cz/konference/>

Na setkání s Vámi se těší Jaromír Antoch, Gejza Dohnal a Pavel Stríž, snad i s celým rodinným klanem! K dokreslení atmosféry přikládáme několik fotek z roku 2011 ze společenského bloku.



Fotky jsou od Jaroslava Hajtmara. Horní řada zleva: přednáška v malém rodinném pivovaru o výrobě piva od majitelů hotelu. Na druhé fotce je přednáška o kvasu, kvašení a vše o výrobě slivovice od Milana Stríže.

Spodní řada zleva: velký $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ista Zdeněk Wagner a velký statistik Josef Tvrdík u jednoho stolu. Poslední fotka je přednáškový mix účastníků z obou konferencí: Stakanu a $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ perience 2011.

Obsah

Vědecké a odborné statě

Zdeněk Půlpán

Informace, paměť, učení a matematika

(Od Ebbinghausových pokusů po dnešek) 1

Mária Kóšová, Eva Uhrinová, Lubomír Rybanský

Zvyšovanie matematickej gramotnosti žiakov základnej školy

v oblasti kombinatoriky, pravdepodobnosti a štatistiky 27

Miroslav Červenka, Hana Boudná

Visualisation of F and CR Influence on Differential Evolution Solution ... 37

Zprávy a informace

Vanda Vintrová

Konference IARIA: DataSys 2012 49

Gejza Dohnal

Zpráva o činnosti České statistické společnosti v roce 2012 50

Hana Řezanková

Valné shromáždění České statistické společnosti v roce 2013 52

Hana Řezanková

Slovenská statistická a demografická spoločnosť má 45 let 54

Pozvánky na akce

Pavel Stříž

Statistické dny na Brejlově 56

Informační bulletin České statistické společnosti vychází čtyřikrát do roka v českém vydání. Příležitostně i mimořádné české a anglické číslo. Vydavatelem je Česká statistická společnost, IČ 00550795, adresa společnosti je Sokolovská 83, 186 00 Praha 8. Evidenční číslo registrace vedené Ministerstvem kultury ČR dle zákona č. 46/2000 Sb. je E 21214.

The Information Bulletin of the Czech Statistical Society is published quarterly.
The contributions in bulletin are published in English, Czech and Slovak languages.

Předsedkyně společnosti: prof. Ing. Hana ŘEZANKOVÁ, CSc., KSTP FIS VŠE v Praze, nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, e-mail: hana.rezankova@vse.cz.

Redakce: prof. Ing. Václav ČERMÁK, DrSc. (předseda), prof. RNDr. Jaromír ANTOCH, CSc., prof. RNDr. Gejza DOHNAL, CSc., doc. Ing. Jozef CHAJDIK, CSc., doc. RNDr. Zdeněk KARPÍŠEK, CSc., RNDr. Marek MALÝ, CSc., doc. RNDr. Jiří MICHÁLEK, CSc., prof. Ing. Jiří MILITKÝ, CSc., doc. Ing. Josef TVRDÍK, CSc., Mgr. Ondřej VENCÁLEK, Ph.D.

Redaktor časopisu: Mgr. Ondřej VENCÁLEK, Ph.D., ondrej.vencalek@upol.cz.
Informace pro autory jsou na stránkách společnosti, <http://www.statspol.cz/>.

DOI: 10.5300/IB, <http://dx.doi.org/10.5300/IB>
ISSN 1210–8022 (Print), ISSN 1804–8617 (Online)

Toto číslo bylo vytištěno s laskavou podporou Českého statistického úřadu.