

INFORMAČNÍ BULLETIN



České statistické společnosti

Ročník 22, číslo 2, červen 2011

QUO VADIS, STOCHASTICA?



Svatá Barbora je uctívána jako svatá patronka havířů, dětí, dělostřelců, architektů a matematiků, také dalších povolání, u nichž hrozí riziko náhlé či násilné smrti, rovněž jako ochránkyně proti smrti bleskem v časech bouří a požárů.

Od 2. do 4. září 2010 se v Brně uskutečnily konference REQUEST 2010 a Statistické dny v Brně a slavnostní zasedání České statistické společnosti při příležitosti 20 let její činnosti. Pořadateli obou konferencí a slavnostního zasedání byla Česká statistická společnost (ČStS), Centrum pro jakost a spolehlivost výroby (CQR), Soukromá vysoká škola Akademie Sting v Brně a Vysoké učení technické v Brně.

Každoroční konference REQUEST organizuje od roku 2006 Centrum pro jakost a spolehlivost výroby, které je projektem Národního programu výzkumu - Výzkumná centra MŠMT České republiky čís. 1M06047. Řešitelský tým CQR tvoří specialisté z ČVUT Praha, VUT Brno, TU Liberec, VŠB - TU Ostrava, UTIA AV ČR Praha, TriloByte Pardubice a ISQ Praha. Hlavním posláním CQR je vývoj metod pro zlepšování jakosti a spolehlivosti výroby, výrobků, technologických postupů a služeb se zřetelem na jejich aplikace. CQR také zajišťuje odborné konzultace, školení a profesionální zpracování statistických dat z jakosti a spolehlivosti, včetně vývoje software. Konference REQUEST 2010 byla zaměřena na prezentaci výzkumných výsledků, poznatků a zkušeností z vývoje a aplikací statistických metod z oblastí:

- modelování spolehlivosti systémů a procesů,
- stochastické modely pro průmyslové a neprůmyslové aplikace,
- fuzzy modely systémů a procesů s neurčitými informacemi,
- optimalizace, diagnostika a hodnocení rizik,
- metodika školení a zavádění jakosti,
- statistický software.

Statistické dny organizuje Česká statistická společnost již od roku 1995 jako jedno- či dvoudenní setkání statistiků, zabývajících se teoretickou a aplikovanou pravděpodobností a statistikou v nejrůznějších oborech. Statistické dny jsou pořádány v různých místech České republiky především proto, aby statistici a uživatelé statistiky z regionů měli možnost prezentovat výsledky své činnosti a diskutovat o aktuálních statistických problémech. Taková pracovní a diskusní setkání několika desítek účastníků si kladou za cíl zvyšovat úroveň statistické vzdělanosti v České republice. Na organizaci Statistických dnů se zpravidla podílejí vysoké školy v daném regionu, takže část jednání konferencí bývá věnována otázkám výuky statistiky na vysokých školách. Statistické dny 2010 byly již desátou konferencí tohoto typu a podruhé se konaly v Brně. Konference byla zaměřena na příspěvky z různých oblastí:

- stochastické modelování reálných problémů a procesů,
- aplikace statistických metod v nematematických oborech a výzkumu,
- výuka statistiky na středních a vysokých školách,
- zkušenosti s aplikacemi statistického softwaru,
- historie vývoje stochastických metod.

Pracovní jednání obou konferencí proběhla v budově Akademie Sting v Brně pod záštitou rektora této školy doc. Sadovského. Slavnostní zasedání ČStS na téma „Quo vadis, Stochastica“ se spolu s koncertem barokní hudby konalo v aule rektorátu Vysokého učení technického v Brně pod záštitou rektora školy prof. Raise. Doprovodný program všech tří akcí tvořily dva společenské večery v historické budově Starý pivovar v areálu Vysokého učení technického v Brně. Na prvním společenském večeru hrál *Ivančický dixieland* a kapela *FAB s.r.o.*, a svá skvělá vystoupení obě hudební uskupení uzavřela společným jam session. Na druhém společenském večeru k poslechu i tanci hrála znamenitá *Cimbálová muzika bratů Wimmerovců* z Bratislavy.

Programový výbor obou konferencí sestával ze známých odborníků:

prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc. - MFF UK Praha
doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc. - FS ČVUT Praha
prof. RNDr. Ivana Horová, CSc. - PřF MU Brno
prof. RNDr. Jiří Hřebíček, CSc. - CBA PřF MU Brno
Mgr. Monika Kováčová, Ph.D. - Sjf STU Bratislava
prof. RNDr. Ing. Lubomír Kubáček, DrSc. - PřF UP Olomouc
prof. RNDr. Milan Meloun, DrSc. - FChT UP Pardubice
doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc. - FSI VUT Brno
prof. Alexander Nakonečny, DrSc. - Státní univerzita T. Ševčenka Kijev
RNDr. Jiří Mandula, Ph.D. – Mezinárodní agentura pro atomovou energii Vídeň
prof. RNDr. PhDr. Zdeněk Půlpán, CSc. - PdF UHK Hradec Králové
doc. Ing. Zdeněk SadoVský, CSc. - Akademie Sting Brno
prof. RNDr. Ing. Petr Štěpánek, CSc. - FAST VUT Brno
doc. Ing. Josef Tvrdík, CSc. - FP OU Ostrava
prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc. - PřF MU Brno

Organizační výbor všech tří akcí tvořili pracovníci CQR VUT a MU v Brně:

doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc.
Ing. Josef Bednář, Ph.D.
RNDr. Marie Budíková, Ph.D.
Ing. Veronika Lacinová
Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.
RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
RNDr. Libor Žák, Ph.D.
Ing. Mgr. Eva Žampachová, Ph.D.

Partnerem byly firmy TriloByte Statistical Software s.r.o. Pardubice a SC&C Partner s.r.o. Brno.

Všech tří akcí se zúčastnilo celkem 73 účastníků z České republiky a zahraničí. Zaznělo na nich 41 referátů a z nich vybraných recenzovaných 27 příspěvků je obsahem tohoto čísla Informačního bulletinu ČStS.

Děkujeme všem účastníkům a hostům za prezentaci pečlivě připravených a přínosných referátů i podnětné diskusní příspěvky, a těšíme se na další podobná setkání.

V Praze 1. července 2011.

Gejza Dohnal a Zdeněk Karpíšek



AKO TO VTEDY BOLO?

Spomienky na založenie Českej štatistickej spoločnosti a 20 rokov spolupráce Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti a Českej štatistickej spoločnosti

Ján Luha

Ústav lekárskej biológie, genetiky a klinickej genetiky LF UK a UNB,
Sasinkova 4, 811 08 Bratislava
jan.luha@fmed.uniba.sk

Úvod

Začiatkom roka 1990 vrcholila aktivita českých štatistikov smerujúca ku založeniu štatistickej spoločnosti. Pôvodný zámer bol založiť Česko-Slovenskú štatistickú spoločnosť. Na Slovensku už ale existovala štatistická spoločnosť, vtedy ešte pod názvom Slovenská demografická a štatistická spoločnosť, preto boli vyvolané rokovania, na ktorých som mal účasť. Ako pamätník tých dní uvádzam niekoľko poznámok, ktoré sú v mojej pamäti, niektoré mierne nepresné, iné zase podporené dokumentmi z tej doby.

Udalosti zo začiatku roka 1990

V priebehu marca 1990 sa uskutočnili rokovania „výboru“, ktorý pripravoval Ustanovujúce Valné zhromaždenie na založenie Českej štatistickej spoločnosti (ČStS). Začiatkom roka 1990 ma požiadal riaditeľ Matematického ústavu SAV prof. RNDr. Ľubomír Kubáček, DrSc. aby som preskúmal názory v matematickoštatistickej „obci“ na Slovensku, či sa pripoja ku vtedy už existujúcej slovenskej Spoločnosti alebo podporia vznik Česko-Slovenskej štatistickej spoločnosti. Skontaktoval som sa s pracoviskami, kde sa vtedy venovali matematickej štatistike a tiež s predstaviteľmi Slovenskej demografickej a štatistickej spoločnosti (doc. Chajdiak, Ing. Brezák) a dohodli sme sa spojiť a tým podporiť v Českej republike vznik Českej štatistickej spoločnosti. Na Valnom zhromaždení Spoločnosti 14. 3. 1990 v Bratislave sa pripojenie sekcie matematických štatistikou realizovalo aj fakticky a spoločnosť (na môj návrh) zmenila názov na Slovenská štatistická a demografická spoločnosť (SŠDS).

Stanovisko SŠDS sme prezentovali na stretnutiach „výboru“ v marci 1990 v Prahe (mimochodom, časť členov tohto výboru bola členmi SŠDS!). Na rokovaníach v Prahe sa postupne zúčastnili za slovenskú stranu J. Brezák, J. Luha a G. Wimmer. Na ustanovujúcom zhromaždení Českej štatistickej spoločnosti 29. 3. 1990 som SŠDS zastupoval ja.

Založenie Českej štatistickej spoločnosti (ČStS)

Na Valnom zhromaždení 29. 3. 1990 v Prahe sa diskutovalo o niekoľkých návrhoch na názov Spoločnosti: Československá štatistická spoločnosť, Štatistická spoločnosť zemí koruny České, Česká štatistická spoločnosť a myslím, že tam zazneli aj názvy ako Česko-Moravská štatistická spoločnosť a pod. Nakoniec sa „presadil“ názov Česká štatistická spoločnosť. Žiaľ, poznámky z tých čias už odvíjal čas a aj na mená účastníkov stretnutí so zástupcami SŠDS z českej strany v marci 1990 v Prahe. Skúsím spomenúť aspoň pár mien z tých rokovaní. Snáď tam skutočne aj všetci figurovali, niektoré mená mám od J.Žváčka - ten ale uvádza aj iných aktívnych účastníkov, čo pripravovali vznik Českej štatistickej spoločnosti. Takže, bez nároku na plnú pravdu, uvádzam niektoré mená: J. Anděl, K. Winklbauer, V. Čermák, J. Jílek, T. Havránek, J. Žváček, J. Antoch, V. Macháček, L. Cyhelský, H. Řezanková, G. Dohnal, J. A. Víšek, ... a momentálne vyhráva skleróza. Spomínam si taktiež, že J. Žváček navrhol na

tomto zasadnutí založiť aj „Klub nepriateľov štatistiky“ – o jeho „fungovaní“ ale nemám vedomosti.

Možno povedať, že dobrým podnetom na napísanie prvého príspevku „Z histórie SŠDS...“ bol príspevok (do vtedy federálneho časopisu STATISTIKA) ku 1. výročiu založenia ČStS. To ma podnietilo napísať do časopisu STATISTIKA príspevok „23. rokov Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti“, v spolupráci s vedeckým tajomníkom SŠDS J. Chajdiakom.

To bolo tiež dôvodom, prečo som inicioval postupné písanie článkov „Z histórie“ jednak SŠDS, ale aj najhlavnejších konferencií a seminárov – ako dobre vieme naša pamäť sa správa veľmi zaujímavo a istejšie je si udalosti zaznamenávať.

Je nám jasné, že činnosť českých štatistikov má ďaleko väčšiu tradíciu než 20 rokov a ich práca a skúsenosti nám boli vždy inšpiráciou a tiež pomocou.

Spolupráca Spoločnosti

Veľmi rád konštatujem, že spolupráca SŠDS a ČSS je od počiatku (čiže už 20 rokov) na vynikajúcej úrovni a nachádzame v nej nielen kolegov ale výborných priateľov. Na niektorých akciách SŠDS býva dokonca viac účastníkov z Českej republiky. Do našich spoločných aktivít, okrem už tradičnej „federálnej“ akcie PRASTAN-STAKAN, tento rok pribudla aj konferencia FERNSTAT_CZ. Od roku 2005 spolupracujeme aj na pôde V6. Aj ROBUST, ktorý je akciou ČStS je možno považovať za dobrú spoluprácu. Dôležitým prvkom spolupráce sú aj osobné kontakty a neformálne aktivity.

Hlavné aktivity SŠDS

Informácie o SŠDS sú na stránke www.ssds.sk a preto tu uvádzam iba najhlavnejšie naše aktivity.

Okrem hlavných akcií, sme začali organizovať slávnostné konferencie k „okružným výročiam“ SŠDS počnúc od 25. výročia v roku 1993, potom pri 30. výročí v roku 1998, pri 35. výročí v roku 2003 a pri 40. výročí v roku 2008. V roku 20. výročia ČSS „máme“ teda 42. výročie SŠDS. A keď pekná mladica ČSS dosiahne 23, budeme mať už pekný stredný vek a snád' sa s niektorými stretne na našej Slávnostnej konferencii pri 45. výročí SŠDS v roku 2013.

Pre svojich členov Spoločnosť vydávala neperiodické publikácie s názvom INFORMÁCIE, FORUM METRICUM SLOVACUM (v roku 2004 bol vydaný TOM VIII) a Štatistické metódy vo vedecko-výskumnej práci. V súčasnosti sú ďalšími hlavnými publikačnými aktivitami Spoločnosti zborníky z vedeckých konferencií a seminárov a od roku 2005 vydáva Spoločnosť vedecký recenzovaný časopis FORUM STATISTICUM SLOVACUM, ISSN 1336-7420. Na stránke Spoločnosti sú k dispozícii všetky čísla FORUM STATISTICUM SLOVACUM a všetky zborníky konferencie Pohľady na ekonomiku Slovenska. Našou zásadou je publikácia „do ruky“ na akcii, čo znižuje potrebu ich zasielania.

Možno trochu závidieť ČStS, že na svojej stránke dáva k dispozícii všetky čísla Bulletinu ČSS za 20 rokov. Nepredpokladám, že by sme zhromaždili a naskenovali všetky publikácie SŠDS za tých 42 rokov

V rámci odbornej činnosti organizuje Spoločnosť konferencie, semináre, prednášky, školenia. Medzi najdôležitejšie pravidelné akcie SŠDS patria:

Slovenská štatistická konferencia, ktorá je poriadaná každý párny rok. V roku 2010 bude v poradí už 15. konferencia.

Slovenská demografická konferencia, ktorá je organizovaná každý nepárny rok. V poradí 12. konferencia bola zorganizovaná v roku 2009.

Škola štatistiky EKOMSTAT sa koná každý rok. V roku 2010 sa uskutočnil už 24. ročník tejto akcie.

PROBASTAT - medzinárodná vedecká konferencia o matematickej štatistike. Od roku 1991 je SŠDS jej spoluorganizátorom (minimálne cez osobu G. Wimmera).

Medzinárodný seminár - Výpočtová štatistika. V roku 2010 bude usporiadaný po 19-ty krát.

Prehliadka prác mladých štatistikov a demografov je organizovaná v rámci seminára Výpočtová štatistika. V poslednom období sa darí organizovať ju každý rok. V rámci seminára bude v roku 2010 už 12-ty krát

Pohľady na ekonomiku Slovenska. Veľmi úspešnú konferenciu koncepčne vytvoril Chajdiak. Organizuje sa v ročnom intervale od roku 2001, teda v roku 2010 bol desiaty ročník.

Prastan – Stakan. Spoločná akcia Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti a Českej štatistickej spoločnosti organizovaná každé dva roky v ČR a na Slovenku (ČR - Stakan 1999, Slovensko - Prastan 2001, ČR - Stakan 2003, Slovensko - Prastan 2005, ČR - Stakan 2007, Slovensko - Prastan 2009). Nezávisle na tejto spolupráci sa konferencia PRASTAN organizovala (od roku 2008 sa rozhodli organizátori pre dvojročný interval) každoročne s tematickým zameraním na pravdepodobnosť, štatistiku a numerickú matematiku.

FERNSTAT (Financie, Ekonomika, Riadenie, Názory). Medzinárodná konferencia aplikovanej štatistiky, organizovaná v spolupráci s UMB v Banskej Bystrici. Je organizovaná je s ročnou periodicitou od roku 2004. V roku 2009 bol 6. ročník. A v roku 2010 sa poprvýkrát FERNSTAT_CZ koná v ČR v Ústí nad Labem.

Demografické diskusné popoludnia. Informácie o nich sú na stránke: <http://www.info-stat.sk/vdc/sk/index.html> v zložke Demografické skcie.

Okrem pravidelných podujatí sú poriadané prednášky, konferencie a semináre k významným príležitostiam, resp. k zaujímavým témam.

Záver

Želám Českej štatistickej spoločnosti veľa plodných akcií, vynikajúcich organizátorov a teším sa na ďalšiu spoluprácu!

UZLOVÉ BODY POSLEDNÉHO VÝVOJA ĽUDSKEJ CIVILIZÁCIE NA PLANÉTE ZEM A ICH VPLYV NA OBSAH, POSTAVENIE A ÚLOHY POJMU „STOCHASTICA“

Jozef Chajdiak

Ústav manažmentu, Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Vazovova 5, 81249 Bratislava
jozef.chajdiak@stuba.sk

V poslednom období v druhej polovici druhého tisícročia môžeme označiť uvedenie do života elektriny za uzlový bod. Elektrina umožňuje prenos energie, prenos údajov a informácií, umožňuje pohon a tým pohyb, dáva svetlo. Ďalším uzlovým bodom je vznik komplexného oboru I (informatiky) v 20. storočí po súčasnosť. Tá rozvojom svojich parametrov (rýchlosť, pamäť, zosieťovanie, programové vybavenie) umožňuje dosiahnutie nových úrovní v modelovaní, riadení, uchovávaní údajov, výber informácií z údajov, použitie informácií, uchovávanie informácií. Svoje miesto má umelá inteligencia, znalostné databázy. Môžeme sledovať pokrok v schéme model a odhad parametrov.

Úlohou štatistiky je ukázať svet taký, aký je. Treba pripomenúť, že ľudia si často myslia, že štatistika a I (informatika) je to isté, ale treba konštatovať, že sú len vedľa seba. Úlohou štatistiky je z príliš veľa údajov dostať informácie na podporu rozhodovania. Štatistika je na začiatku každej exaktnéj disciplíny.

I (informatika) modeluje svet, ktorý predstavuje množinu objektov, množinu vzťahov, väzieb medzi objektmi. Otázkou je, či základ vzťahov stavby sveta sú deterministické vzťahy (úlohou je odhad funkcie a jej parametrov a vývoj zmien), či základné vzťahy sú síce deterministické, ale svet je taký zložitý, že sa javia ako stochastické (úlohou je nájsť rozdelenia väzieb, odhad ich parametrov a vývoj zmien) alebo, či sú stochastické v svojej podstate (úlohou je určiť, aké sú východiskové rozdelenia a ich parametre a odhad parametrov a ich zmien vo vývoji).

Proces poznania je konzistentný, konverguje k poznaniu objektívneho stavu a vývoja. Je tento výrok univerzálne pravdivý alebo vo vývoji môže byť aj divergencia?

V procese výučby sa postupne zostruje protirečenie medzi masou „nenáročne vzdelávaných“ a potrebou niekoľkých „geniálne“ pripravených. I (informatika) automatizuje, človek z tvorca sa transformuje do podoby vykonávateľa. Program je „inteligentnejší“ ako $p\%$ ľudí. $p\%$ ľudí nevie do programu zasiahnuť, $p\%$ je otrokom programu. Druhá strana $(1 - p)\%$ je schopná do programu zasiahnuť, program zdokonaľiť, vyprodukovať nový program. Aký je konkrétne rozumný podiel $p\%$. Problémom je, či v procese výučby učiť všetkých všetko alebo určiť $(1 - p)\%$ schopných programy modifikovať, zdokonaľovať, tvoriť nové programy. Ako vybrať konkrétnych $(1 - p)\%$, kto ich bude učiť – človek, počítače? Ako určiť poistnú zásobu (rezervu) v modeli $(1 - p)\%$? Aké sú dôsledky chýb 1. a 2. druhu?

V súvislosti so všeobecným rozvojom a sprevádzanými protirečeniami hrozí nadvláda (vzbura) strojov? Hrozí! Rozvojom I-technológií sú stroje čoraz nezávislejšie na obsluhu. Stroje (zariadenia) získavajú pohyb, majú v sebe I-bloky, komunikujú medzi sebou. Kde je hranica medzi „neživým“ systémom slúžiacim človeku a „oživitým“ zložitým technologickým systémom, ktorý vie prijímať energiu, vie prijímať energiu, vie prijímať údaje a transformovať ich na informáciu, vie sa rozhodovať, vie realizovať rozhodnutia. Je otázkou, kedy si stroje (technologické systémy) položia otázku načo im je nedokonalý chybujúci hlúpy človek s odpoveďou, že ho treba vylúčiť z procesu.

V procese výučby novú intenzitu pozornosti treba venovať výučbe rozdelení, presnejším a rýchlejšiemu odhadom rozličných parametrov, výučbe procesov, určeniu rozumných poistných hodnôt (rezerv), simulačnému modelovaniu.

A hlavným garantom budúcnosti ľudskej civilizácie je používanie ľudského rozumu.

OBSAH

Dohnal Gejza, Karpíšek Zdeněk REQUEST 2010	iii
Luha Ján Ako to vtedy bolo?	v
Chajdiak Jozef Uzlové body posledného vývoja ľudskej civilizácie na planéte Zem a ich vplyv na obsah, postavenie a úlohy pojmu „Stochastica“	viii
Bajzík Vladimír Alternatívni prístup k predikcii omaku s využitím ordinálnej logistickej regrese	3
Bednář Josef Minimalizace ceny slévarenských modelů pomocí plánovaného experimentu	11
Beránek Libor, Volf Luděk Možnosti využití simulace procesů měření ve výuce	16
Černá Dana, Finek Václav Redukce chyby a artefaktů při waveletové kompresi obrazu	20
Dohnal Gejza, Cézová Eliška Bayesovské adaptivní regulační diagramy	26
Flegl Radim Začlenění managementu spolehlivosti procesů do podnikového managementu	35
Fusek Michal Demonstrační software pro rozdělení extrémních hodnot	47
Chvátalová Zuzana, Gajdůková Lucie Matematické modelování vybraného parametru logistického řetězce v systému	52
Jančík Stanislav, Dvořák Jiří, Stárek Ivo Pravděpodobnostní přístupy k navigaci mobilních robotů	63
Karpíšek Zdeněk, Martišek Karel Software pro výpočet fuzzy spolehlivosti soustav s využitím FJK – algoritmu	71
Karpíšek Zdeněk, Matoušek Radomil, Sadovský Zdeněk Nestandardní metriky pro aproximace	80
Karpíšek Zdeněk, Štarha Pavel Software pro aplikace nehomogenních markovských řetězců v jakosti	89
Koucky Miroslav, Vališ David K přístupům nedestruktivní diagnostiky s využitím statistické a fuzzy prognostiky	98
Král Jan Implementace SPC při ověřování stability výrobních procesů v strojírenském podniku	108

Král Otakar, Beran Theodor, Král Jan a kolektiv Kvantifikace procesů nových řešení při vývoji v oblasti jakosti a spolehlivosti	124
Lacinová Veronika, Karpíšek Zdeněk, Sadovský Zdeněk Pesimistické odhady rozdělení pravděpodobnosti kategoriální veličiny	138
Laníková Ivana, Štěpánek Petr, Šimůnek Petr Návrh stavebních konstrukcí s použitím simulačních metod	146
Mauder Tomáš, Jedelský Jan, Lízal František, Jícha Miroslav Statistické vyhodnocování dat transportu částic aerosolu při cyklických podmínkách	156
Popela Pavel, Ulverová Michaela, Šomplák Radovan Nové aplikace úlohy kolportéra novin	164
Popela Pavel, Novotný Jan, Haugen Kjetil Kare, Hrabec Dušan Poznámka o dynamickém oceňování ve stochastickém programování	170
Pospíšil Tomáš Stochastické modelování kompozitních materiálů	174
Šafářová Veronika, Zobel Sabrina Využití techniky plánovaného experimentu pro optimalizaci elektrické vodivosti netkaných textilií	184
Šácha Jakub, Karpíšek Zdeněk Odhad rozdělení pravděpodobnosti s obecnými lineárními podmínkami	192
Urbánek Jaroslav Využití systému Maple ve výuce matematické analýzy	200
Volf Luděk, Beránek Libor Implementace počítačové simulace do strojírenské výroby	204
Žák Libor Fuzzy regrese	209
Žampachová Eva, Mrázek Michal Návrh nosníku pomocí stochastické optimalizace a posouzení spolehlivosti	221



AN ALTERNATIVE APPROACH TO HAND PREDICTION USING ORDINAL LOGISTIC REGRESSION

ALTERNATIVNÍ PŘÍSTUP K PREDIKCI OMAKU S VYUŽITÍM ORDINÁLNÍ LOGISTICKÉ REGRESE

Vladimír Bajzík

Katedra hodnocení textilií, Fakulta textilní, Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, Liberec
vladimir.bajzik@tul.cz

Abstract: *The new model for objective hand evaluation is presented. The model is based on 8 properties. The most of them are possible to measure on standard instruments which are in textile laboratories. The prediction equation was created by means of ordinal logistic regression. The proposed model BM11 was compared with model KES11 in which the properties from KES were applied. The results show that both models have similar ability of prediction.*

Keywords: *hand evaluation, ordinal logistic regression, KES*

Abstrakt: *V předloženém příspěvku je navržen model pro predikci hodnocení omaku. Pro konstrukci modelu bylo použito 8 vlastností, jichž většinu lze měřit na přístrojích, které se nacházejí standardně v textilní laboratoři. Predikční rovnice byla vytvořena s použitím ordinální logistické regrese. Navržený model BM11 byl porovnán s modelem KES11, který využívá 16 vlastností měřených na systému KES. Výsledky ukazují, že oba modely mají obdobnou predikční schopnost.*

Klíčová slova: *hodnocení omaku, ordinální logistická regrese, KES*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/3

1. Úvod

Jedním ze základních kontaktních projevů textilií je "omak". V pracích [1,2] atd. bylo prokázáno, že se jedná o komplexní vlastnost, k jejímuž vyhodnocení dochází na základě ohodnocení tzv. primárních složek (např. tuhost, drsnost atd.) spolu s porovnáním vlastních zkušeností. Jedná se o psychofyzikální vlastnost, kdy o výsledku hodnocení rozhodují nejen materiálové složení, konstrukce textilie, úpravy, vzhled atd., ale také zkušenost, původ, citlivost kontaktního místa hodnotitele (při hodnocení nejčastěji prstů a dlaní) a v neposlední řadě i jeho momentální duševní rozpoložení. Z uvedeného plyne, že definování omaku jednoznačným způsobem je obtížné. Termín "omak" není jednoznačně definován. Jedná se v podstatě o pocit, který je vyvolán textilií při jejím kontaktu s pokožkou. Něktré z definic lze nalézt v [3].

2. Objektivní predikce omaku

Subjektivní hodnocení omaku je časově a organizačně velmi náročné. Pro zajištění reprodukovatelnosti a opakovatelnosti je zapotřebí řešit řadu základních problémů spojených s experimentem, jež jsou zmíněny např. v [3,4]. Proto byla navržena řada postupů, které mají usnadnit a zrychlit hodnocení omaku. Jsou postaveny na měření fyzikálomechanických vlastností, které mají vztah k subjektivnímu hodnocení omaku, a následném vytvoření predikční rovnice [1, 5, 6, 7, 8]. Metody tak umožňují objektivní predikci omaku.

2.1. Systém KES

V současné době nejrozšířenějším systémem je systém KES. Byl vytvořen pro objektivní predikci omaku textilií, zejména tkanin. Sestává se ze sady 4 přístrojů, které měří 15 vlastností rozdělených do 6 skupin (tahové, smykové, ohybové, objemové, povrchové, geometrické) v rozsazích simulující běžné namáhání oděvních textilií při nošení, šestnáctou vlastností, která se používá při predikci omaku je plošná hmotnost [mg/cm^2] a je začleněna mezi geometrické vlastnosti (tabulka I) [1].

Tabulka I. Přehled vlastností měřených na systému KES

tahové: <i>LT</i> : linearita [-] <i>WT</i> : deformační energie [$\text{N.cm}/\text{cm}^2$] <i>RT</i> : pružnost v tahu [%]	objemové: <i>LC</i> : linearita [-] <i>WC</i> : energie potřebná ke stlačení [$\text{N.cm}/\text{cm}^2$] <i>RC</i> : pružnost [%]
ohybové: <i>B</i> : tuhost v ohybu na jednotku délky [$\text{N.cm}^2/\text{cm}$] <i>2HB</i> : moment hystereze na jednotku délky [$\text{N.cm}/\text{cm}$]	povrchové: <i>MIU</i> : koeficient tření [-] <i>MMD</i> : průměrná odchylka MIU [-] <i>SMD</i> : geometrická drsnost [μm]
smykové: <i>G</i> : tuhost ve smyku [$\text{N}/\text{cm.stupeň}$] <i>2HG</i> : hystereze při úhlu smyku $\phi = 0,5^\circ$ [N.cm] <i>2HG5</i> : hystereze při úhlu smyku $\phi = 5^\circ$ [N.cm]	geometrické: <i>W</i> : plošná hmotnost [mg/cm^2] <i>T0</i> : tloušťka [mm]

Naměřené hodnoty jsou zpracovány následujícím způsobem:

1. Standardizace naměřených hodnot a výpočet objektivní predikce primárních složek omaku

$$y_j = C_{0j} + \sum_{i=1}^{16} C_{ij} \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i}, \quad (1)$$

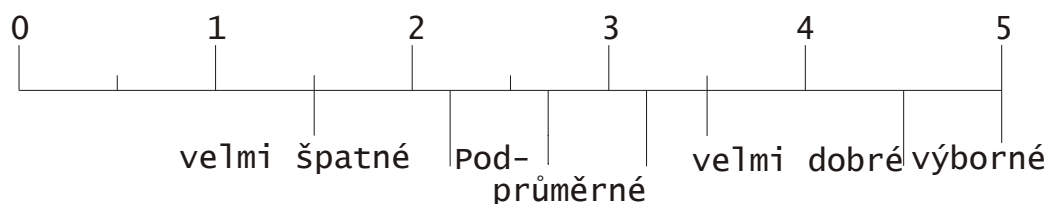
kde y_j je predikce primární složky omaku, x_i je i -tá vlastnost nebo její desítkový logaritmus, $\bar{x}_i$ a σ_i je průměr a směrodatná odchylka i -té vlastnosti, C_{0i} a C_{ij} regresní koeficienty i -té charakteristiky a j -té primární složky omaku.

2. Výpočet celkového omaku $THV(O)$ podle vztahu

$$THV(O) = C'_0 + \sum_{j=1}^3 \left[C'_{j1} \left(\frac{y_j - M_{j1}}{\sigma'_{j1}} \right) + C'_{j2} \left(\frac{y_j^2 - M_{j2}}{\sigma'_{j2}} \right) \right], \quad (2)$$

kde C'_0, C'_{j1}, C'_{j2} jsou regresní koeficienty, $M_{j1}, M_{j2}, \sigma_{j1}, \sigma_{j2}$ jsou průměry a směrodatné odchylky y_j a y_j^2 .

3. Výslednou hodnotu objektivní predikce lze následně slovně interpretovat (obrázek 1).



Obr. 1 Slovní popis objektivní predikce omaku podle výsledků měření na KES.

Hodnoty $\bar{x}_i$ a σ_i jsou tabelovány pro jednotlivé typy tkanin podle účelu použití [1]. Pro vlastní výpočet byly použity konstanty KN-101-WINTER pro pánské oblekovky. Navrhovaný model je označen KES11.

2.2. Objektivní predikce omaku technikou BM

Systém BM byl navržen z důvodu přiblížení se běžným podmínkám v laboratořích. Jeho výhoda spočívá v tom, že většinu vlastností lze měřit na běžně dostupných přístrojích v laboratořích. Kromě toho zahrnuje takové vlastnosti, které korespondují se všemi 4 centry omaku [2]. Při výběru vlastností byly také brány v úvahu výsledky prací [5, 6, 9, 10].

Tabulka II. Vlastnosti techniky BM

vlastnosti související s centrem povrchové hladkosti a nerovnosti: <i>MAD</i> : průměrná absolutní odchylka [mN]	vlastnosti související s centrem objemových vlastností (objem, hmotnost, tvar) <i>b</i> : tepelná jímavost [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-0,5})$]
vlastnosti související s centrem tuhosti a poddajnosti <i>Y</i> : modul pružnosti [MPa] <i>T</i> : tuhost [mN cm] <i>Y45</i> : modul pružnosti po diagonále - soustava nití pootočená o úhel 45° vzhledem ke směru posuvu příčniku [MPa]	vlastnosti související s centrem objemových vlastností (objem, hmotnost, tvar) <i>S</i> : stlačitelnost [-] <i>t</i> : tloušťka [mm] <i>M</i> : plošná hmotnost [g/m^2]

V případech, kdy závisle proměnná pochází z ordinální škály a může-li, nabývat více 2 hodnot, lze pro konstrukci regresního modelu použít ordinální logistickou regresi [11]. Nejčastěji se používá model proporcionálních šancí, který má tvar [11, 12]

$$CL_k = \ln \left[\frac{P(y \leq k)}{P(y > k)} \right] \quad (3)$$

kde $k=1,2,\dots,K$ je pořadové číslo třídy. Řešení modelu proporcionálních šancí vede ke $K-1$ regresním rovnicím, které se liší pouze v hodnotě absolutního členu

$$\ln \left[\frac{P(y \leq k)}{P(y > k)} \right] = b_{k,0} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad (4)$$

Výsledná soustava regresních rovnic má tvar

$$P(y = k) = \frac{1}{1 + \exp(b_{k,0} + \sum_{p=1}^P b_p x_p)} \quad (5)$$

kde P je počet nezávisle proměnných. Závisle proměnná je zařazena do té třídy, pro kterou vyjde pravděpodobnost přiřazení jako maximální.

Při subjektivním hodnocení omaku se nejčastěji používá právě 5-ti až 11-ti stupňová ordinální škála, takže z tohoto hlediska může být ordinální logistická regrese použita. Obecně logistická regrese vyžaduje jednoznačné přiřazení závisle proměnné do příslušné třídy. Z podstaty subjektivního hodnocení omaku, který patří mezi senzorické metody, je textilie hodnocena více hodnotiteli, kteří jsou při svém hodnocení ovlivněni různými faktory. Textilie je zařazena do několika kategorií s různou četností. Tak dochází k nejednoznačné klasifikaci hodnocené textilie. Z tohoto důvodu pro tvorbu modelu je použit odhad parametru polohy - mediánová kategorie M , která je definována

$$F_{M-1} < 0,5 \quad \text{a} \quad F_M \geq 0,5 \quad (6)$$

kde F_S představuje kumulativní relativní četnost ($S=M$ resp. $M-1$). Výsledek objektivní predikce omaku $THV(O)=k$ ukazuje, že přibližně 50% hodnotitelů bude hodnotit omak do mediánové třídy a lépe a druhých přibližně 50% hodnotitelů bude hodnotit omak do této třídy a hůře.

Pro testování významnosti regresních koeficientů b_p lze použít Waldovu testovou statistiku

$$W_{a,p} = \left(\frac{b_p}{s(b_p)} \right)^2 \quad (7)$$

která má rozdělení χ^2 s jedním stupněm volnosti.

Při určování významnosti modelu jako celku se používá odchylka G^2 , kde se porovnává maximální věrohodnost modelu, který obsahuje pouze absolutní člen L_0 a maximální věrohodnost modelu L_M , čili testuje se, zda všechny odhadované regresní parametry β_p jsou rovny nule kromě koeficientů $\beta_{k,0}$.

$$G^2 = -2(\ln L_0 - \ln L_M) \quad (8)$$

Odchylka G^2 má χ^2 rozdělení s $P-1$ stupni volnosti. Čím je hodnota nižší, tím je model jako celek významnější a proložení je těsnější. Pokud je pravděpodobnost menší než 0,01, považuje se model jako celek za statisticky významný. Nevýhodou je, že G^2 vede vždy ke zlepšení přidáním další vlastnosti. K eliminaci tohoto vlivu lze použít Bayesovo informační kritérium BIC nebo Akaikovo informační kritérium AIC [11, 12]

$$BIC = G^2 - df \ln N \quad (9)$$

$$AIC = \frac{-2 \ln L_M + 2P}{N} \quad (10)$$

Navrhovaný model byl označen BM11.

3. Výsledky a diskuze

Ověření navržené techniky BM bylo realizováno na souboru 90 tkanin, které se používají na výrobu pánských obleků. Základní parametry tkanin jsou uvedeny v Tabulce III.

Tabulka III. Rozsah základních parametrů hodnocených tkanin.

hmotnost	g/m ²	140 - 370
dostava - osnovy	nití/10 cm	170 - 560
- útku		150 - 370
základní typy složení	100% vlna, 45/55 vlna/PL, vlna/PL/PA	
základní typy vazeb	převážně různé typy keprů, plátno,	

Soubor testovaných tkanin byl zařazován pomocí panelu 40 respondentů do 11 tříd ($k=1$ – omak je velmi nepříjemný, $k=6$ omak je průměrný, $k=11$ omak je velmi příjemný). Při volbě 11-ti stupňové škály se vycházelo z postupu tvorby predikčních rovnic, které jsou použity pro

objektivní predikci omaku u systému KES, kde tvůrci systému KES pro tvorbu predikčních modelů použili při subjektivním hodnocení omaku jedenácti stupňovou ordinální škálu. Proto byl vytvořen také model na základě této stupnice.

Výsledné počty zařazení jednotlivých tkanin do mediánových kategorií jsou uvedeny v tabulce IV.

Tabulka IV. Počty zařazených tkanin podle mediánových tříd.

číslo třídy	počet zařazených tkanin
1	0
2	2
3	11
4	8
5	16
6	17
7	19
8	8
9	5
10	4
11	0

Z tabulky IV plyne, že do krajních tříd podle hodnoty mediánové třídy nebyla zařazena žádná tkanina. V případě, že by byla predikcí tkanina zařazena do třídy č. 2 nebo 10 je zapotřebí výsledek interpretovat trochu odlišně. Pro případ zařazení do druhé třídy platí, že výrazně přes 50% hodnocení může být i ve třídě 1. Obdobná interpretace platí i pro případné zařazení tkaniny predikcí do třídy č. 10, tj. že výrazně přes 50% hodnocení může být zařazeno i ve třídě 11. Do tříd č. 2, 9 a 10 bylo zařazeno málo tkanin, proto je při tvorbě závěrů při zařazení objektivní predikcí do těchto tříd přístupovat obezřetně.

Pro účely tvorby predikční rovnice byly zjištěné výsledky rozděleny v poměru 8:1, tj., výsledky 80 tkanin (analyzovaný soubor) byly použity pro vytvoření predikčních rovnic KES11 a BM11 a výsledky 10 tkanin (klasifikovaný soubor) byly použity pro ověření jejich predikčních schopností.

Výsledky zařazení analyzovaného souboru jsou uvedeny v tabulce IVa (model KES11) a v tabulce V (model BM11).

Tabulka IVa. Výsledky zařazení do tříd pro model KES11.

naměřené hodnoty omaku	predikované hodnoty omaku									procento správně zařazen. objektů
	THV (O)=2	THV (O)=3	THV (O)=4	THV (O)=5	THV (O)=6	THV (O)=7	THV (O)=8	THV (O)=9	THV (O)=10	
THV=2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	50,0
THV=3	0	9	0	0	0	0	0	0	0	100
THV=4	0	1	5	1	0	0	0	0	0	71,4
THV=5	0	0	2	9	4	0	0	0	0	60,0
THV=6	0	0	0	3	8	4	0	0	0	53,3
THV=7	0	0	0	3	2	9	3	0	0	52,9
THV=8	0	0	0	1	0	2	5	0	0	62,5
THV=9	0	0	0	0	0	0	3	1	0	25,0
THV=10	0	0	0	0	0	0	0	1	2	66,7

V modelu KES11 bylo správně zařazeno 49 tkanin (61%). Výsledky subjektivního hodnocení omaku ukazují u většiny tkanin intervalový odhad mediánu přesahující hodnotu 1, a tudíž by mediánovou třídou mohly být i třídy sousedící s ní. Vezme-li se toto v úvahu, tak do tříd $M \pm 1$

bylo zařazeno modelem KES11 75 tkanin (94%). Vytvářený model o více než jednu třídu zařadil 5 tkanin. O 2 třídy byly chybně zařazeny 4 tkaniny a o 3 třídy došlo ke špatnému zařazení u jedné tkaniny.

Tabulka V. Výsledky zařazení do tříd pro model BM11.

naměřené hodnoty omaku	Predikované hodnoty omaku									procento správně zařazen. objektů
	THV (O)=2	THV (O)=3	THV (O)=4	THV (O)=5	THV (O)=6	THV (O)=7	THV (O)=8	THV (O)=9	THV (O)=10	
THV=2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0,0
THV=3	0	8	1	0	0	0	0	0	0	88,9
THV=4	0	1	3	3	0	0	0	0	0	42,9
THV=5	0	1	2	9	3	0	0	0	0	60,0
THV=6	0	0	0	1	11	3	0	0	0	73,3
THV=7	0	0	0	3	0	13	1	0	0	76,5
THV=8	0	0	0	0	1	2	4	1	0	50,0
THV=9	0	0	0	0	0	0	2	1	1	25,0
THV=10	0	0	0	0	0	0	1	1	1	33,3

U modelu BM11 bylo s chybou větší než $M \pm 1$ zařazeno 6 tkanin a to o 2 třídy. Správně bylo zařazeno 50 tkanin (62%) a spolu s chybou jedné třídy 74 (92%).

Odhady koeficientů pro model KES11 (tabulka VI.) ukazují, že vlastnosti *LT*, *RT*, *G*, *2HG*, *B*, *2HB*, *WC*, *RC*, *T0*, *MIU* a *MMD* jsou významné na hladině významnosti 0,05. Z koeficientů lze na hladině významnosti 0,05 považovat za nenulové koeficienty b_3 , b_4 , b_6 , b_7 , b_9 a b_{10} . U modelu BM11 (tabulka VII) výsledky ukazují, že lze za významné považovat vlastnosti b , T , t , M , S a MAD a z regresních koeficientů koeficienty b_2 , b_3 , b_4 , b_5 a b_6 .

Tabulka VI. Odhady koeficientů pro model KES11 a vliv jednotlivých proměnných.

proměnná	χ^2	spočtená hladina významnosti	regresní koeficient	odhad	Waldova statistika	spočtená hladina významnosti
			$b_{2,0}$	-22,615	2,43	0,12
			$b_{3,0}$	-18,603	1,44	0,23
			$b_{4,0}$	-15,521	0,99	0,32
			$b_{5,0}$	-11,660	0,50	0,48
			$b_{6,0}$	-9,644	0,26	0,61
			$b_{7,0}$	-6,879	0,12	0,73
			$b_{8,0}$	-4,949	0,79	0,37
			$b_{9,0}$	-3,382	0,37	0,54
<i>LT</i>	7,17	<0,01	b_1	6,853	0,25	0,62
<i>WT</i>	<0,01	0,92	b_2	-0,058	0,90	0,34
<i>RT</i>	30,86	<0,01	b_3	-0,049	5,43	0,02
<i>G</i>	6,43	0,01	b_4	2,607	7,46	<0,01
<i>2HG</i>	16,17	<0,01	b_5	-7,601	3,56	0,06
<i>2HG5</i>	1,01	0,31	b_6	3,952	4,47	0,03
<i>B</i>	6,80	<0,01	b_7	66,631	16,44	<0,01
<i>2HB</i>	7,98	<0,01	b_8	-117,318	0,92	0,34
<i>LC</i>	0,01	0,91	b_9	33,852	6,32	0,01
<i>WC</i>	24,29	<0,01	b_{10}	-21,236	12,73	<0,01
<i>RC</i>	12,04	<0,01	b_{11}	-0,175	0,40	0,53
<i>T0</i>	19,73	<0,01	b_{12}	36,083	3,51	0,06
<i>MIU</i>	6,50	0,01	b_{13}	-18,009	0,79	0,37
<i>MMD</i>	6,08	0,01	b_{14}	-69,409	1,65	0,20
<i>SMD</i>	0,30	0,58	b_{15}	-0,130	2,43	0,12
<i>W</i>	1,67	0,20	b_{16}	-0,324	1,44	0,23

Tabulka VII. Odhady koeficientů pro model BM11 a vliv jednotlivých proměnných.

proměnná	χ^2	spočtená hladina významnosti	regresní koef.	odhad	Waldova statistika	spočtená hladina významnosti
			$b_{2,0}$	-20,2257	8,78872	0,003031
			$b_{3,0}$	-14,3397	4,91378	0,026643
			$b_{4,0}$	-11,2911	3,32509	0,068230
			$b_{5,0}$	-7,4124	1,52366	0,217067
			$b_{6,0}$	-5,1923	0,75531	0,384801
			$b_{7,0}$	-2,3763	0,16000	0,689153
			$b_{8,0}$	-0,1557	0,00067	0,979393
			$b_{9,0}$	1,4162	0,05407	0,816132
b	35,68051	0,000000	b_1	-0,0360	3,83749	0,050118
T	48,18058	0,000000	b_2	0,4304	4,07187	0,043603
t	42,27711	0,000000	b_3	7,1264	4,31738	0,037725
M	6,86684	0,008781	b_4	0,0401	11,96527	0,000542
S	6,33712	0,011824	b_5	-17,7979	5,80684	0,015964
MAD	17,33830	0,000031	b_6	0,6674	14,66913	0,000128
$Y45$	0,19828	0,656114	b_7	0,0182	0,61513	0,432862
Y	0,67213	0,412309	b_8	-0,0012	0,72063	0,395936

Ověření navrženého modelu bylo realizováno na druhé skupině dat - klasifikovaném výběru, tj. na datech, která nebyla použita pro tvorbu modelu. Výsledky predikčních schopností jsou uvedeny v tabulce VIII. Vytvořený model KES11 správně zařídil 2 z 10 tkanin tj. 20% tkanin. Vytvořený model BM11 správně zařídil 6 z 10 tkanin tj. 60% tkanin. Vezme-li se v úvahu možnost tolerovat chybné zařazení $M \pm 1$ třída, tak model KES11 správně zařadil 80% tkanin. Model BM11 zařadil správně všechny tkaniny.

Tabulka VIII. Ověření predikčních schopností modelů.

vzorek	THV_11	výsledek KES11	odchylka	vzorek	THV_11	výsledek BM11	odchylka
T117	6	6		T117	6	7x	+1
T118	4	2	-2	T118	4	4	
T135	3	4	1	T135	3	3	
T136	9	8	-1	T136	9	8x	-1
T153	5	5		T153	5	5	
T154	3	4	-1	T154	3	3	
T171	6	5	1	T171	6	6	
T172	7	9	+2	T172	7	7	
T189	10	9	-1	T189	10	9x	-1
T190	7	6	-1	T190	7	6x	-1

Spočtené hladiny významnosti p pro oba modely mají hodnotu menší než 0,01 (tabulka IX), což indikuje, že modely lze považovat za významné. Deviance G^2 ukazuje, že model KES11 je lepší než BM11. Provede-li se však eliminace vlivu počtu vlastností, vyjde závěr opět nejednoznačně. Bayesovo informační kritérium BIC je u modelu KES11 nižší než u modelu BM11, avšak u Akaikova informačního kritéria AIC je tomu naopak. Pomocí uvedených indikátorů kvality modelu nelze jednoznačně určit, který z modelů je lepší.

Tabulka IX. Výsledky analýzy modelů

charakteristika	KES11	BM11
G^2	147,06	157,55
p	0,00	0,00
BIC	81,55	124,80
AIC	-2,35	-2,44

4. Závěr

Existuje celá řada přístupů k predikci omaku. Pro konstrukci všech typů predikčních rovnic se využívá vlastností, které mají vztah k subjektivnímu hodnocení omaku. Navržený model BM11 ukazuje, že lze predikovat hodnocení omaku s pomocí vlastností, které lze měřit s využitím standardních přístrojů. Predikční schopnost navrženého modelu je srovnatelná s výsledky získanými měřeními na systému KES.

Literatura

- [1] Kawabata, S. *The Standardisation and Analysis of Hand Evaluation*, The Textile Machinery Society of Japan, Osaka, (1980)
- [2] Lundgren, H.P. New Concepts I Evaluating Fabric Handle. *Textile Chemistry Colorimetry*. 1969, roč.1, s. 35-45
- [3] Bishop, D.P. Fabric: Sensory and Mechanical Properties, *The Textile Progress*, **26** (1996), No. 1, pp. 1-62
- [4] Bajžík, V. Objektivní predikce omaku s využitím ordinální logistické regrese. In: *REQUEST 09*, Technická univerzita v Liberci, 2010, s. 4-11
- [5] Raheel, M., Lin, J.: An Empirical Model for Fabric Hand. Part I: Objective Assessment of Light Weight Fabrics, *Textile Research Journal*, **61** (1991), No. 1, pp. 31-36
- [6] Pan, N., Yen, K.C., Zhao, S.J., Yang S.R.: A New Approach to the Objective Evaluation of Fabric Handle from Mechanical Properties. Part I: Objective Measure for Total Handle, *Textile Research Journal*, **58** (1988), No. 8, pp. 438-444
- [7] Strazdiene, E., Gutasas, M.: New Method for the Objective Evaluation of Textile hand, *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, **13** (2005), No. 2, pp. 35-38
- [8] Meie, L.V Xiaoan, S., Li, Z. A Study of Method of Measuring and Evaluating Fabric Handle. In: *Textile Science 91*, Technická univerzita v Liberci, 1992. s. 41-50
- [9] Behery H.M. *Effects of Mechanical and Physical Properties on Fabric Hand*. Cambridge:Woodhead Publishing Limited. 1. vyd. 2005. ISBN 978-85573-918-5
- [10] Militký, J., Bajžík, V. Surface Roughness of Heat Protective Clothing Textiles. *International Journal of Clothing Science and Technology*. 2003. roč. 13. č. 3/4, s. 258-267
- [11] Powers, D. Xie, Y. *Statistical Methods for Categorical data Analysis*. San Diego: Academic Press. 1. vyd. 2000. ISBN 0-12-563736-5
- [12] Hebák, P. a kol. *Vícerozměrné statistické metody – 3. díl*. Praha: Informatorium. 1. vyd. 2005. ISBN 80-7333-039-3

Poděkování: Tento příspěvek vznikl s podporou Centra pro jakost a spolehlivost v rámci projektu rozvoje vědy a výzkumu MŠMT ČR IM06047.

MINIMIZATION OF FOUNDRY PATTERNS COST USING DESIGN OF EXPERIMENT

MINIMALIZACE CENY SLÉVÁRENSKÝCH MODELŮ POMOCÍ PLÁNOVANÉHO EXPERIMENTU

Josef Bednář

Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno
bednar@fme.vutbr.cz

Abstract: *Design of Experiment (DOE) is a test or a sequence of tests in which we systematically change input process factors to observe and identify corresponding changes to the output variables – the responses. We describe using of the factorial design of experiment (Factorial DoE) to minimize costs of foundry patterns in an aluminum foundry. We use statistical software Minitab to produce Factorial DoE reports.*

Keywords: *Design of Experiment, Factorial DoE, DoE, Minitab.*

Abstrakt: *Plánovaný experiment je zkouška nebo posloupnost zkoušek, ve kterých cílevědomě provádíme změnu vstupních faktorů procesu, abychom mohli pozorovat a identifikovat odpovídající změny výstupní proměnné. V příspěvku je popsáno využití faktorového plánovaného experimentu (Factorial DoE) k minimalizaci nákladů při výrobě slévárenských modelů ve slévárně hliníku. K provedení výše uvedených analýz byl použit statistický software Minitab.*

Klíčová slova: *plánovaný experiment, DoE, faktorový plánovaný experiment, Minitab.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/11

1. Úvod

Plánovaný experiment je zkouška nebo posloupnost zkoušek, ve kterých cílevědomě provádíme změnu vstupních faktorů procesu, abychom mohli pozorovat a identifikovat odpovídající změny výstupní proměnné – tzv. odezvy (response).

V našem případě jde o minimalizaci nákladů na výrobu modelů ve slévárně hliníku. V této slévárně se podle výkresu a CNC dat vyrábí na víceosých frézkách modely, které mají prakticky stejný vzhled jako výsledný odlitek. Pomocí speciálních gumových otisků s vysokou rozměrovou pamětí se (po vložení drobných ocelových součástí) vytvoří sádrová forma. Tato forma se stejně jako prvotní model ručně dokončuje, aby se odstranily drobné vady a nepřesnosti povrchu. Proces končí litím do sádrové formy a následným dokončením (soustružení a frézování některých ploch). Protože mi jde o sdělení principu použití plánovaného experimentu a ne o vyznění výsledků, budou úrovně jednotlivých faktorů pozměněny a nebude uveden materiál, ze kterého se modely vyrábějí.

2. Plán experimentu

Byly určeny 4 nejvýznamnější faktory (související s kvalitou modelu, potažmo cenou odlitku) a jejich úrovně:

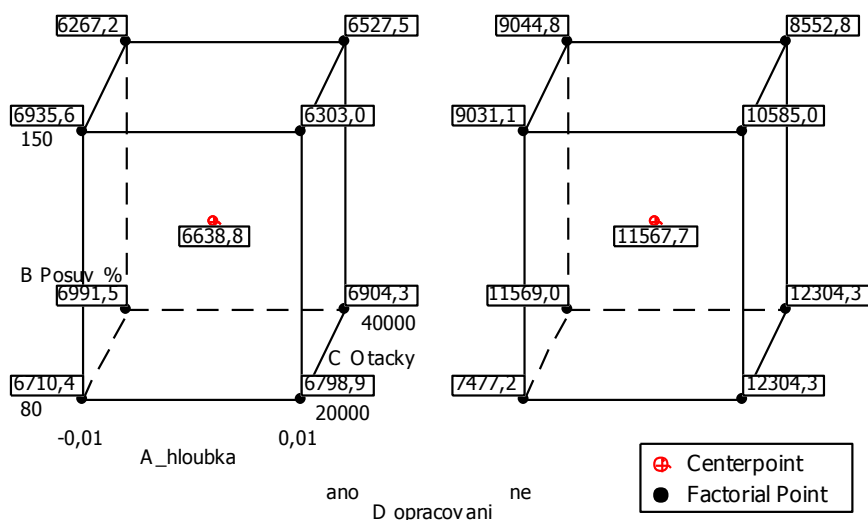
A hloubka úběru (min -0,01 a 0,01mm od standardu pozměněno),

B Posuv %, (80 a 150% standardu pozměněno),

C Otáčky (20 000 a 40 000 ot/min pozměněno),

D ruční dokončení modelu (ano a ne; možná se při otisku modelu do gumy a následně gumy do sádry stopy po nástroji při výrobě modelu pro některé řezné podmínky ztratí).

Odezva, kterou budeme sledovat, je **cena v Kč související s operacemi ovlivňujícími kvalitu povrchu u 3,3 odlitku**. 3,3 je průměrný počet odlitků vyrobený z jednoho modelu. Pokus byl vzhledem k finanční náročnosti realizován na 1/4 modelu, pro každé nastavení vstupních faktorů. Pro ilustraci, slévárna vytvoří za rok cca 9 000 odlitků, tedy zhruba 3000 modelů. Sekundární odezva je doba operace frézování modelu v minutách, která nesmí překročit dobu, za jakou je model vyroben stávající technologií. Model vyrobený stávající technologií označíme etalon.



Obr.1: Cube plot

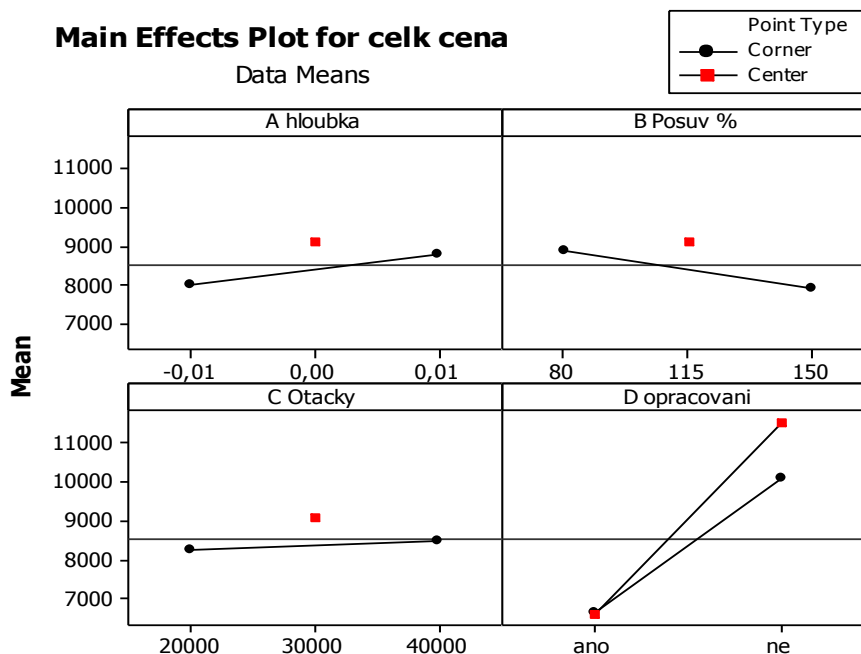
Pro zpracování použijeme plný faktorový experiment s jednou replikací a dvěma centrálními body (obr.1). Zjednodušeně řečeno budeme jednou měřit ve všech kombinacích úrovní a v průměru úrovní všech numerických faktorů (A, B, C) dvakrát (jednou s ručním dokončením, podruhé bez) viz následující tabulka.

A	B	C	D	Čas frézování modelu	Čas dokončení modelu	Čas dokončení odlitku	Celkový čas	Celková cena
-0,01	80	20000	ano	111,0	108	80	483,0	6710,4
-0,01	80	40000	ano	111,0	140	80	515,0	6991,5
-0,01	150	40000	ano	93,5	112	80	469,5	6267,2
0,01	150	40000	ano	75,5	120	100	525,5	6527,5
0,01	150	20000	ano	75,0	96	100	501,0	6303,0
0,01	80	20000	ano	88,0	112	100	530,0	6798,9
0,01	80	40000	ano	88,0	124	100	542,0	6904,3
-0,01	150	20000	ano	93,0	112	100	535,0	6935,6
0,00	115	30000	ano	86,0	100	100	516,0	6638,8
0,00	115	30000	ano	86,0	100	100	516,0	6638,8
-0,01	80	20000	ne	111,0	40	120	547,0	7477,2
-0,01	80	40000	ne	111,0	40	240	943,0	11569,0
-0,01	150	40000	ne	93,5	40	180	727,5	9044,8
0,01	150	40000	ne	75,5	40	180	709,5	8552,8
0,01	150	20000	ne	75,0	40	240	907,0	10585,0
0,01	80	20000	ne	88,0	40	280	1052,0	12304,3
0,01	80	40000	ne	88,0	40	280	1052,0	12304,3
-0,01	150	20000	ne	93,0	40	180	727,0	9031,1
0,00	115	30000	ne	86,0	40	240	918,0	10885,7
0,00	115	30000	ne	86,0	40	280	1050,0	12249,7
Etalon				93	100	88	483,4	6421

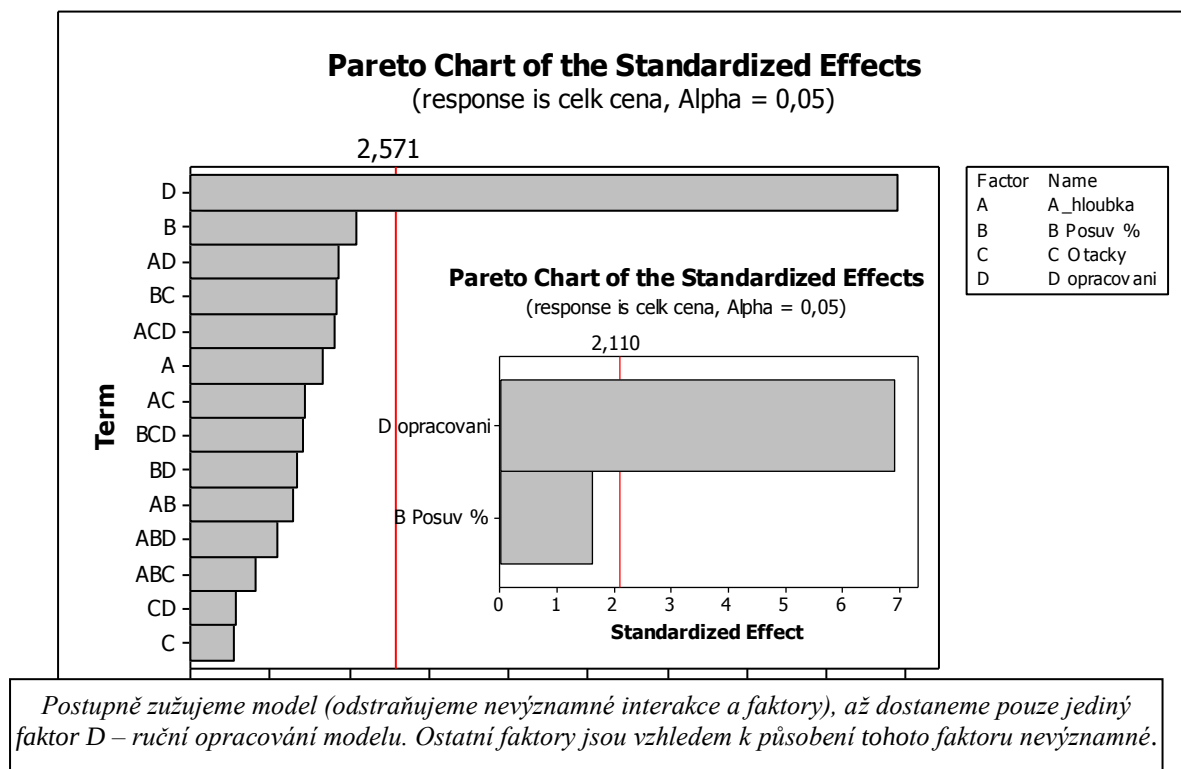
Tab.1: Plán sběru dat a výsledky

Z grafu hlavních efektů (obr.2) je vidět, že ruční dokončení modelu je nejvýznamnější faktor. Pomocí regresní analýzy, kde postupně odebíráme nejmenší významné interakce a faktory, následně zjistíme, že ruční dokončení modelu je jediný statisticky významný faktor a interakce faktorů jsou také statisticky nevýznamné (obr.3). Všechny testy provádíme na hladině významnosti 0,05.

Tedy myšlenka, že ruční dokončování modelů je zbytečné, je chybná a modely je třeba vždy ručně dokončit. Dále již budeme pracovat pouze s měřeními, kde je model ručně dokončován (druhou polovinu plánu sběru dat dále nevyužijeme).



Obr. 2: Graf hlavních efektů



Obr. 3: Statistické zužování modelu

3. Regresní model popisující pouze ručně dokončené modely

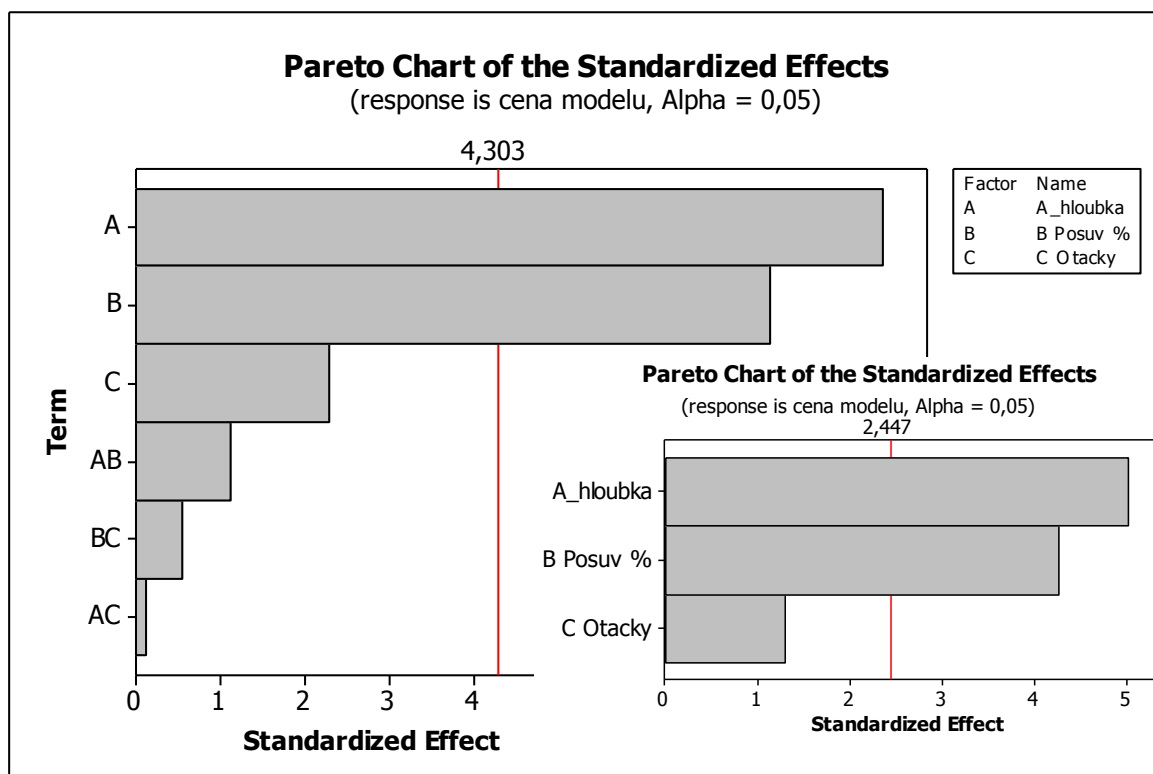
Sestrojil jsem model pouze pro ručně dokončené modely. Není potřeba nic doměřovat, data jsou stejná jako minule (v úvahu je bráno pouze prvních 10 hodnot ; D – ruční opracování modelu = ano).

Odezva je pouze **cena opracování modelu v Kč**, protože ručně opracované modely jsou stejně kvalitní, což bylo ověřeno optickou kontrolou.

A Hloubka	B Posuv %	C Otáčky	Čas frézování Modelu	Čas dokončení modelu	Cena opracování modelu
-0,01	80	20000	111,0	108	3982,53
-0,01	80	40000	111,0	140	4263,58
-0,01	150	40000	93,5	112	3539,33
0,01	150	40000	75,5	120	3117,60
0,01	150	20000	75,0	96	2893,14
0,01	80	20000	88,0	112	3389,00
0,01	80	40000	88,0	124	3494,40
-0,01	150	20000	93,0	112	3525,67
0,00	115	30000	86,0	100	3228,94
0,00	115	30000	86,0	100	3228,94
Etalon (původní nastavení procesu)			93	100	3420,26

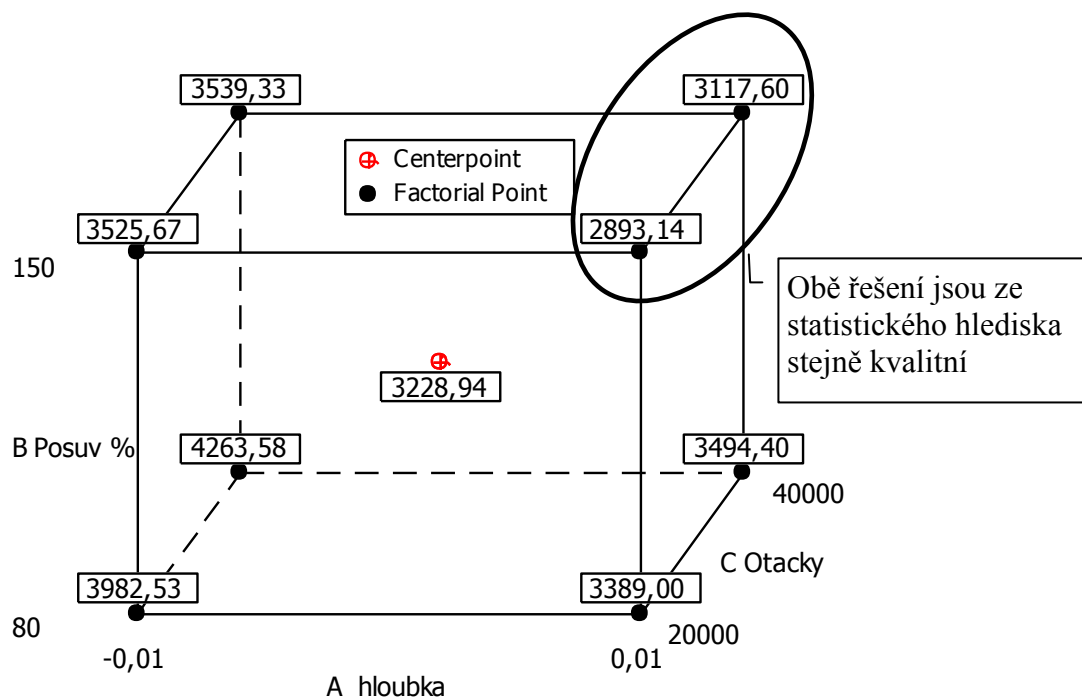
Tab.2: Plán sběru dat a výsledky

Stejně jako při předchozím vyhodnocení odstraňujeme pomocí regresního modelu nevýznamné interakce a faktory (obr. 4). Významná vyjde pouze hloubka a posuv, tedy nastavení 4 a 5 (v tabulce tučně) jsou statisticky nevýznamně odlišná (rozdílná hodnota odezvy může být způsobena náhodou).



Obr. 4: Statistické zužování nového modelu

Dále v regresním modelu vyšlo významné zakřivení, což značí, že uvnitř krychle (obr. 5) dané úrovněmi faktorů může být minimum (ale nemusí). Pokud bychom chtěli model zpřesnit, museli bychom měřit v tzv. axiálních bodech návrhu (např. středy stěn krychle na obr. 5) a do modelu zahrnout kvadratické efekty. Tato měření již nebyla vzhledem k nákladnosti experimentu provedena a spokojili jsme se s modelem lineárním.



Obr.5: Cube plot s naznačením optimální ceny výroby modelu

4. Závěr

Po tomto experimentu bylo vyrobeno 27 modelů s nastavením: hloubka = standard + 0,01mm, posuv = 150% a otáčky = 20 000/min. Průměrná úspora byla 430 Kč na model, ale v 6 případech došlo k opakovanému lámání nástrojů, které způsobil neznámý faktor. Tento faktor se nepodařilo technologům odhalit, proto snížili posuv na 130%. S tímto nastavením vyrábí modely již dva roky a úspory řádově převýšily náklady na plánovaný experiment.

Tento příspěvek nebyl sepsán za účelem vyzrazení nějakého technologického tajemství, ale aby ukázal, že i s relativně jednoduchými statistickými nástroji a malým počtem měření lze dosáhnout významného zlepšení procesu. Nutnou podmínkou úspěchu je znalost procesu a vytipování klíčových faktorů a jejich úrovní.

Literatura

- [1] MELOUN, M., MILITKÝ, J.: Kompendium statistického zpracování dat. Academica, Praha, 2002.
- [2] Minitab User's Guide 2: Data Analysis and Quality tools. USA, 2000.
- [3] MONTGOMERY, D.,C.: Design and Analysis of Experiments. Third Edition, John Wiley & Sons, 1991.

Poděkování: Příspěvek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 Centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě.

SIMULATION OF MEASUREMENT PROCESSES IN EDUCATION

MOŽNOSTI VYUŽITÍ SIMULACE PROCESŮ MĚŘENÍ VE VÝUCE

Libor Beránek, Luděk Volf

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní
Technická 4, 166 07 Praha
libor.beranek@fs.cvut.cz, ludek.volf@fs.cvut.cz

Abstract: *The article deals with the concept of using a computer simulation of Carl Zeiss company's measurement processes in Industrial Metrology course at the Faculty of Mechanical Engineering in Prague.*

Keywords: *Calypso, measurement proces simulation*

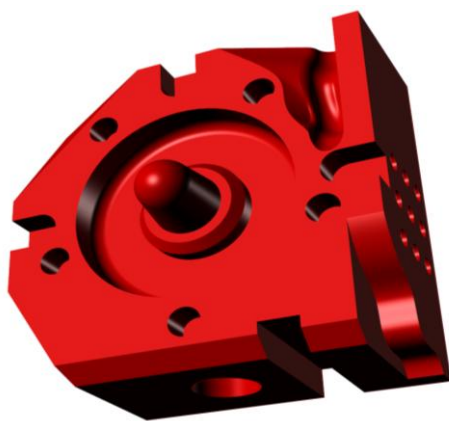
Abstrakt: *Príspevek se zabývá využitím konceptu počítačové simulace společnosti měřicích procesů Carl Zeiss ve výuce předmětu Průmyslová metrologie na Fakultě strojní ČVUT v Praze.*

Klíčová slova: *Calypso, simulace procesu měření*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/16

1. Úvod

Ve výuce předmětu Průmyslová metrologie na Fakultě strojní ČVUT v Praze jsou studenti seznámeni s problematikou měření na souřadnicových měřicích strojích za pomoci simulačního módu software Calypso od společnosti Carl Zeiss. Plány měření, které jsou studenti schopní sestavit pro zadanou součást jsou ve finále ověřovány na reálném souřadnicovém měřicím stroji Carl Zeiss C700.

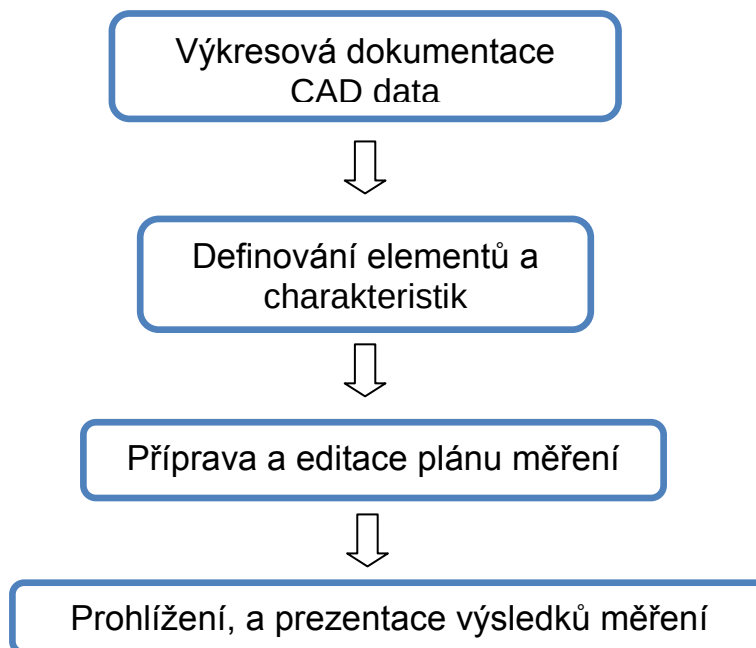


Obr. 1 - Ukázka testovací součásti

2. Příprava plánu měření

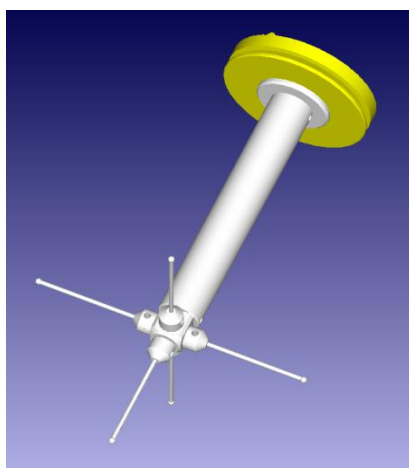
Studenti mají za úkol připravit plán měření (jinými slovy "part program" či "řídící data") pro zadanou testovací součást (Obr. 1). Při práci se softwarem Calypso studenti začínají od výkresové dokumentace, na jejímž základě studenti vytvoří plán měření, který obsahuje všechny požadované měřené charakteristiky včetně tolerancí. Pro vyhodnocení měřených charakteristik je třeba na dané součásti nasnímat odpovídající geometrické elementy. Při offline programování je jedinou cestou jak importovat data o geometrii do plánu měření

import CAD modelu. Studenti jsou dále provedeni celým procesem tvorby plánu měření krok za krokem až po vlastní simulaci měření a prezentaci výsledků formou protokolu o měření. Postup v rámci semestru je znázorněn na obrázku (Obr. 2)..



Obr. 2 – Postup při tvorbě plánu měření od CAD modelu k prezentaci naměřených výsledků

Plán měření v software Calypso je reprezentován nabídkou se třemi záložkami kde jedna představuje měřené charakteristiky dle výkresové dokumentace, druhá záložka obsahuje geometrické elementy, které musíme pro vyhodnocení požadovaných charakteristik změřit, třetí záložka poté obsahuje obecná nastavení plánu měření jako použitý snímací systém, vyrovnaní součásti, bezpečnostní skupiny pro jednotlivé odjezdy snímacího systému, použité souřadné systémy, informace o teplotních korekcích, atd. Po nastavení těchto základních parametrů může být spuštěna simulace procesu měření na virtuálním souřadnicovém měřicím.



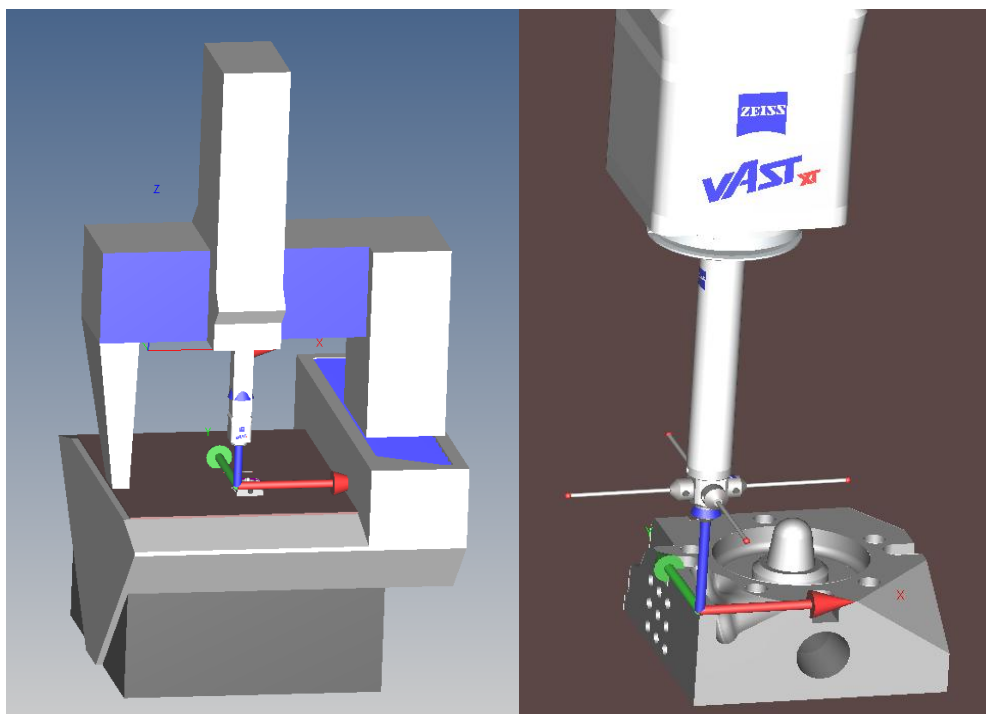
Obr. 3 – Ukázka modelu snímacího systému používaného při simulaci měření

Aby bylo možné věrně simulovat chování reálného CMM, je třeba mít k dispozici i úplné informace o geometrii snímacího systému používaného při měření. Takovýto model snímacího systému je možné vytvořit v nástroji Stylus System Creator. Model typického snímacího systému je zobrazen na Obr. 3.

Spolu s obecným nastavením tvoří elementy a charakteristiky rámec plánu měření. Element představuje prvek, který musí být změřen tak abychom mohli vyhodnotit požadované charakteristiky (rozměrové, tvaru, polohy). Software Calypso umožňuje automatické rozpoznání geometrických prvků a generování strategií a drah měření. Všechny tyto funkce mohou být široce editovány.

3. Simulace měření

Jakmile jsou provedena všechna potřebná nastavení, můžeme spustit vlastní simulaci procesu měření včetně realistické simulace aktuálně používaného snímacího systému, kde můžeme sledovat jednotlivé snímače včetně detekce případných kolizí.



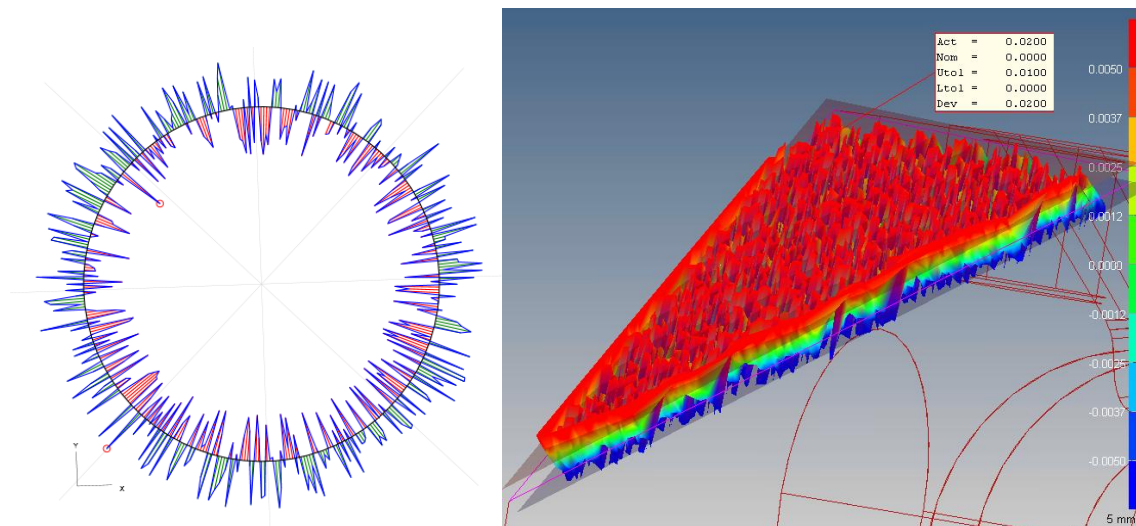
Obr. 4 - Virtuální CMM s umístěnou součástí (vlevo) and snímací systém použitý pro měření

Pokaždé kdy je běh měření nasimulován, můžeme přistoupit k prezentaci naměřených výsledků. Calypso nabízí tři typy protokolů o měření, z nichž nejprůhlednější je takzvaný prezentační protokol (Obr. 5). Variabilita naměřených výsledků na CAD modelu, který reprezentuje jmenovité hodnoty je způsobena interním generátorem náhodných hodnot měřených výsledků.

Výsledky jsou v protokolu barevně odlišeny, zelená barva u charakteristiky znamená, že výsledek leží v předepsaných tolerancích, červené zabarvení charakteristiky představuje nesplnění zadaných tolerancí. Grafické znázornění vybraných charakteristik kruhovitosti a rovinnosti je uvedeno na Obr. 6.

ZEISS Calypso					
Measurement Plan Polsko		Date March 15, 2010		ZEISS	
Drawing No. * drawingno *		Time 8:29:59 pm		Order * order *	
Operator Master		CMM Simulation		Incremental Part Number 1	
	Actual	Nominal	Upper Tol.	Lower Tol.	Deviation
Overall Result All Characteristics: 4 Out of tolerance: 1 Over Warning Limit: 0 Not Calculated: 0					
DiameterCylinder3	69.9998	70.0000	0.1500	-0.1500	-0.0002
DiameterCylinder1	10.0004	10.0000	0.1000	-0.1000	0.0004
DiameterCylinder2	9.9991	10.0000	0.1000	-0.1000	-0.0009
Flatness1	0.0200	0.0000	0.0100		0.0100 0.0200

Obr. 5 – Ukázka prezentačního protokolu pro měřenou součást a vybrané charakteristiky



Obr.6 – Ukázka grafického vyhodnocení kruhovitosti měřeného otvoru a rovinnosti zkosené plochy včetně tolerancí

Simulace procesu měření na CMM velkou měrou rozšiřuje možnosti výuky souřadnicového měření, neboť všichni studenti jsou aktivně zapojeni do tvorby plánu měření a měřicího programu, na rozdíl od práce na reálném souřadnicovém stroji, kde je zapojení všech studentů z důvodu kapacit nerealizovatelné.

4. Literatura

- [1] CHRISTOPH, R., NEUMAN, H.J. Multisenzorová souřadnicová měřicí technika. Čtvrté, přepracované vydání. Uherské Hradiště: L.V. Print, 2008. 106 s .
- [2] RATAJCZYK, E. Wspolrzędnościowa technika pomiarowa. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005. 356 s.
- [3] PFEIFER T., IMKAMP D., SCHMITT R.; Coordinate Metrology and CAX-Application in Industrial Production, Hanser, Munich 2006.

REDUCING ERROR AND ARTIFACTS IN WAVELET IMAGE COMPRESSION

REDUKCE CHYBY A ARTEFAKTŮ PŘI WAVELETOVÉ KOMPRESI OBRAZU

Dana Černá, Václav Finěk

Technical University of Liberec, Faculty of Science, Humanities and Education,
Studentská 2, 461 17 Liberec, Czech Republic
dana.cerna@tul.cz, vaclav.finek@tul.cz

Abstract: *The paper is concerned with a lossy wavelet based image compression. We use a modified discrete wavelet transform with recently derived boundary filters [4]. We show that then the boundary and tiling artifacts are significantly reduced and that the error of the compression is smaller for our approach than for other methods using an extension of an image.*

Keywords: *Image compression, discrete wavelet transform, artifacts.*

Abstrakt: *V článku se zabýváme ztrátovou kompresí obrazu založenou na waveletech. Použijeme diskrétní waveletovou transformaci s nedávno odvozenými okrajovými filtry [4]. Ukážeme, že artefakty na okrajích obrazu jsou významně redukovány a že chyba komprese je menší než při použití metod, které používají rozšíření obrazu.*

Klíčová slova: *Kompresa obrazu, diskrétní waveletová transformace, artefakty.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/20

1. Introduction

Compression is important both for speed of transmission and efficiency of the storage of an image. A wavelet-based image compression has several advantages over an image compression using discrete cosine transform. It avoids blocking artifacts, it enables to achieve smaller compressed size for given quality and it facilitates progressive transmission of images.

The data image compression algorithms can be classified in two categories - *lossless* and *lossy*. If the reconstructed image is identical to the original image, then the compression is called lossless. Usually the lossless data compression techniques are applied on text data or scientific images. In lossy compression schemes, the reconstructed data are just an approximation of the original data. Lossy schemes enable to achieve higher compression. They are usually applicable to photographs or videos.

A typical lossy wavelet image compression system consists of preprocessing, the discrete wavelet transform of the input image, thresholding and quantization of wavelet coefficients, and entropy encoding. Originally, the discrete wavelet transform was designed for an infinite input data. However, images are usually defined over a rectangle. Therefore, applying the discrete wavelet transform directly leads to the artifacts near the boundary called *boundary artifacts* especially at low bit rates. In some applications the size of the image is very large. Therefore the image is first divided into subimages called tiles and the discrete wavelet transform is applied to each tile separately. Then the boundary artifacts can occur also near the boundary of the tiles. Moreover, *tiling artifacts* may occur, i.e. boundaries of the tiles may be visible.

There are several methods to handle this problem. They consist in padding of the image and applying discrete wavelet transform to the extended image or using periodized

wavelet filters. Moreover, some preprocessing or postprocessing can be applied to reduce tiling artifacts [8, 9, 10]. An alternative approach consists of using directly the discrete wavelet transform with special filters near the boundary.

We focus on lossy compression of color images with spline wavelet filters derived in [5] and we propose a method which enables to reduce tiling artifacts. The method utilizes adaptation of wavelet filters to the unit interval recently proposed in [3, 4]. This adaptation leads to optimally conditioned interval wavelet bases up to order four contrary to other constructions which lead to badly conditioned wavelet bases and thus badly conditioned wavelet transform. In this contribution, we show that this approach enables to reduce the boundary and the tiling artifacts and that the error of the compression is smaller than for other methods using an extension of an image.

2. Lossy wavelet image compression

There are four basic steps of the algorithm: preprocessing, the discrete wavelet transform, quantization and encoding.

Preprocessing

The first optional preprocessing step is tiling. If the image is large, it can be partitioned into rectangular nonoverlapping blocks called *tiles*. Then a compression algorithm is applied to each tile separately. Large tiles require large memory buffers for computation of the discrete wavelet transform. On the other hand, smaller tiles causes more tiling artifacts and worse compression efficiency compared to the larger tiles.

The second preprocessing step is the irreversible color transformation. It reduces the correlation amongst the color components in *RGB* image which increases the compression efficiency. The *RGB* values are transformed to *YCbCr* values, where *Y* is luminance, *Cb* is hue and *Cr* is saturation. The forward irreversible color transformation is given by

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.274 & -0.322 \\ 0.211 & -0.523 & 0.312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}, \quad (1)$$

and its inverse is given by

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.956 & 0.621 \\ 1.000 & -0.273 & -0.647 \\ 1.000 & -1.104 & 1.701 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix}. \quad (2)$$

The last preprocessing step is the centering of the color intensity values about zero. It is performed on images that are represented by unsigned integers. For example, for images quantized on 8 bits we subtract 127 from each element of the image matrix. However, in our experiments, this step did not influence PSNR nor compression ratio.

Discrete wavelet transform

Discrete wavelet transform (DWT) uses two pairs of filters: a low pass filter $\{h_k\}$ and a high pass filter $\{g_k\}$ for a decomposition and a low pass filter $\{\tilde{h}_k\}$ and a high pass filter $\{\tilde{g}_k\}$ for a reconstruction. In our paper, we consider biorthogonal spline wavelet filters from [5]. The one level of the discrete wavelet transforms maps the vector $\mathbf{c}^j = (c_1^j, \dots, c_{2m}^j)$ to vectors $\mathbf{c}^{j+1} = (c_1^{j+1}, \dots, c_m^{j+1})$ and $\mathbf{d}^{j+1} = (d_1^{j+1}, \dots, d_m^{j+1})$. It is given by the formula

$$c_k^{j+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l c_{2k+l}^j, \quad d_k^{j+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l c_{2k+l}^j, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3)$$

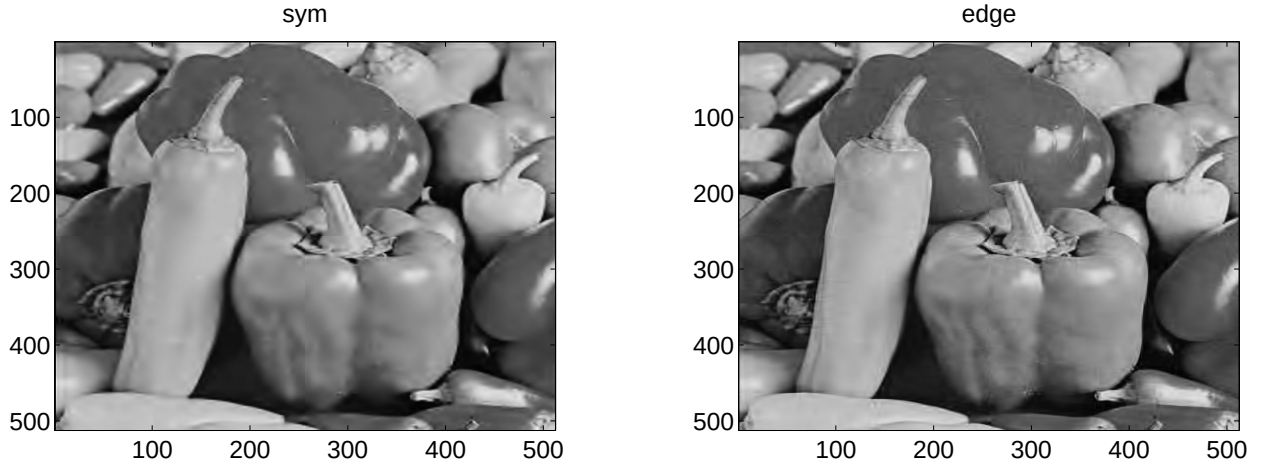


Figure 1: The reconstructed image of peppers from 2% of wavelet coefficients using decomposition to 4 tiles and several methods of treating a boundary.

The vector $\mathbf{c}^{j+1}$ represents coarse approximation of the vector $\mathbf{c}^j$ and the vector $\mathbf{d}^{j+1}$ represents details. Then the vector $\mathbf{c}^{j+1}$ is transformed to vectors $\mathbf{c}^{j+2}$ and $\mathbf{d}^{j+2}$. After n steps we obtain vector $(\mathbf{c}^n, \mathbf{d}^n, \dots, \mathbf{d}^1)$. The inverse discrete wavelet transform is an inverse process and it is given by formula

$$c_k^j = \sum_{n=1}^m \left(\tilde{h}_{k-2n} c_n^{j+1} + \tilde{g}_{k-2n} d_n^{j+1} \right), \quad k = 1, \dots, 2m. \quad (4)$$

Two-dimensional DWT consists in performing the one-dimensional DWT row-wise and then column-wise. It leads to four subimages at each resolution level. One image represents the coarse approximation of the original image and other three images represents horizontal, vertical and diagonal details. Many detail coefficients are close to zero. Therefore thresholding of the coefficients which are small in absolute value leads to a sparse representation of the image.

Quantization

Quantization reduces the precision of transformed coefficients to cut down memory space needed to store the transformed coefficients. In image compression uniform scalar quantization is usually performed. It is given by the formula

$$q(i, j) = \text{sign}(y(i, j)) \left\lfloor \frac{|y(i, j)|}{b} \right\rfloor, \quad (5)$$

where b is the quantization step size, y is a DWT coefficient, q is a quantized coefficient and $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes a lower part. In the simplest case, the quantization is just rounding of coefficients.

Entropy encoding

After the previous steps we obtain a sparse representation of the image, it means that only small number of coefficients are nonzero. However, we have still the same number of coefficients. Therefore we compress the quantized coefficients using some entropy coding method. The most common entropy coding techniques are Huffman coding [6], arithmetic coding [2] and set partitioning in hierarchical trees (SPIHT) [11].

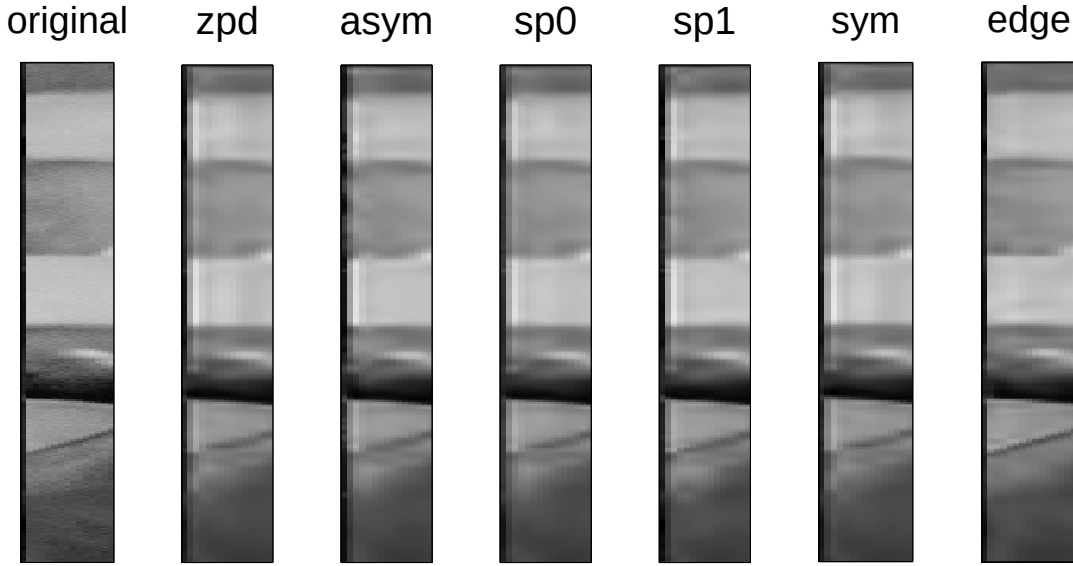


Figure 2: The part of the left boundary of the original image and reconstructed images for various methods.

3. Reducing boundary and tiling artifacts

As can be seen from formula (3) applying DWT near the boundary of the image requires the values c_l^j also for $l < 1$ or $l > 2m$, which are not defined. There are several methods to handle this problem. They consist in padding of the image and applying discrete wavelet transform to the extended image. As an example, consider the finite-length input signal 1 2 3 4 5. The signal can be extended by the following methods:

Zero-padding: (zpd) ... 0 0 0 0 1 2 3 4 5 0 0 0 0 ...

Symmetrization: (sym) ... 4 3 2 1 1 2 3 4 5 5 4 3 2 ... (half point),
... 5 4 3 2 1 2 3 4 5 4 3 2 1 ... (whole point)

Antisymmetric padding: (asym) ... -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 -5 -4 -3 -2 ...

Smooth padding of order 1: (sp1) ... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

Smooth padding of order 0: (sp0) ... 1 1 1 1 1 2 3 4 5 5 5 5 5 ...

Periodic-padding: (ppd) ... 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 ...

In the most popular wavelet based image compression standard JPEG2000, the half point symmetrization is performed for an filter of even length and the whole point symmetrization is performed for an filter of odd length [7]. Another approach is to use periodized wavelet filters (per) or to use special filters near the boundary (edge). In this paper, we use boundary wavelet filters constructed in [3, 4], because this construction leads to optimally conditioned interval wavelet bases up to order four on the contrary to other constructions which lead to badly conditioned wavelet bases and thus badly conditioned wavelet transform. This approach is usually superior to others, because it does not assume the smoothness of the data.

4. Numerical examples

In this section, we compare errors for wavelet image compression techniques mentioned above. The test image of peppers [12] is a 512×512 RGB image, each pixel quantized on 8 bits, i.e. 256 possible intensity levels for red, green and blue color, see Figure 1. We decompose the image onto five levels using biorthogonal filters 5/3 and 6/4 from [5]. We compute the decompositions for several image extensions and we also apply discrete wavelet transform with boundary wavelet filters from [4]. Then we threshold the wavelet coefficients greater than 80, quantize the coefficients on 8 bits and we reconstruct an image. Let I and $\hat{I}$ be arrays of the size $M \times N \times 3$ characterizing colors in the original image and the reconstructed image, respectively. For several methods we compute peak signal-to-noise ratio

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{L_{max}}{\text{RMSE}} \right), \quad (6)$$

where L_{max} is the maximum colour value (255 in our case) and RMSE is a root mean squared error defined by

$$\text{RMSE} := \sqrt{\frac{1}{M \times N \times 3} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(I(i, j, k) - \hat{I}(i, j, k) \right)^2}. \quad (7)$$

Furthermore, we compute the boundary PSNR, i.e. PSNR for pixels distant at most five pixels from the boundary. We also compute the errors for the compression with tiling. The image is first decomposed to four tiles 256×256 and then the DWT is applied to each tile separately, see Figure 1. The results are given in Table 1. They confirm the theoretical assumption that the error of the compression is smaller for the discrete wavelet transform with recently derived edge filters than for other methods using an extension of an image. Figure 2 shows the part of the original image and reconstructed images for several methods. We should also mention that our experiments with other images leads to the similar results.

method	1 tile filter 5/3		1 tile filter 6/4		4 tiles filter 5/3	4 tiles filter 6/4
	PSNR	boundary PSNR	PSNR	boundary PSNR	PSNR	PSNR
CF boundary filter	67.65	68.16	67.63	64.55	68.18	68.56
symmetrization	66.68	59.51	65.78	60.55	66.76	65.78
smooth padding of order 1	66.66	58.75	65.27	54.64	66.74	65.29
smooth padding of order 0	66.59	58.39	65.21	53.94	66.70	65.22
antisymmetric padding	66.06	53.55	64.54	50.00	64.95	63.10
periodic padding	65.71	51.36	64.48	49.48	64.43	63.73
zero padding	65.70	51.24	64.44	49.07	63.89	63.21
periodized filters	65.82	51.19	64.04	48.09	65.48	63.48

Table 1: PSNR for 5/3 and 6/4 filters and various image compression methods.

References

- [1] Acharya, T. - Tsai, P. S.: *JPEG2000 standard for image compression: concepts, algorithms and VLSI architectures*. Wiley-Interscience, Hoboken, 2005.
- [2] Arps, R.B. - Langdon, G.G. - Mitchell, J.L. - Pennebaker, W.B.: *An overview of the basic principles of the Q-coder adaptive arithmetic coder*. IBM Journal of Research and Development, Vol.32, No. 6, pp. 717 - 726, 1988.
- [3] Černá, D. - Finěk, V.: *Optimized Construction of Biorthogonal Spline-Wavelets*. In: ICNAAM 2008 , AIP Conference Proceedings 1048, American Institute of Physics, New York: 134-137, 2008.
- [4] Černá, D. - V. Finěk, V.: *Construction of Optimally Conditioned Cubic Spline Wavelets on the Interval*. Advances in Computational Mathematics, 2010, doi: 10.1007/s10444-010-9152-5.
- [5] Cohen, A. - Daubechies, I. - Feauveau, J.-C.: *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*. Comm. Pure and Appl. Math. 45: 485-560, 1992.
- [6] Huffman, D.: *A method for the construction of minimum redundancy codes*. Proc. IRE, Vol. 40, 1952, 1098-1101.
- [7] ISO/IEC 15444-1, *Information Technology-JPEG2000 Image Coding System, Part 2: Extensions*, 2000.
- [8] Liang, J. - Tu, Ch. - Tran, T.C.: *Optimal block boundary pre/post-filtering for wavelet-based image and video compression*. IEEE Trans. on Image Processing 14: 2151-2158, 2005.
- [9] Liu, H. - Klomp, N. - Heynderickx, I.: *A Perceptually Relevant Approach to Ringing Region Detection*. IEEE Trans. on Image Processing 19: 1414-1426, 2010.
- [10] Qin, X. - Yan, X. - Yang, CH.P. - Ye, Y.: *Tiling Artifact Reduction for JPEG2000 Image at Low Bit Rate*. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Multimedia and Expo: 1419-1422, 2004.
- [11] Said, A. - Pearlman, W.A.: *A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees*. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology 6: 243-250, 1996.
- [12] Test images, <http://www.hlevkin.com>.

Acknowledgements This research has been supported by the research center 1M06047 of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic.

BAYESIAN ADAPTIVE CONTROL CHARTS

BAYESOVSKÉ ADAPTIVNÍ REGULAČNÍ DIAGRAMY

Gejza Dohnal, Eliška Cézová

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby ČVUT v Praze
Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2
gejza.dohnal@fs.cvut.cz, eliskacqr@email.cz

Abstract *The knowledge of probabilistic behavior of the time to failure in production process allows us to use adaptive control charts of Shewhart's type for efficient statistical process control. In the contribution, a new algorithm for enumeration of optimal interval length between successive inspections is developed. This optimal policy leads to minimal control costs.*

Keywords: *control chart, Bayesian approach, economic optimization, design of control chart, adaptive control chart.*

Abstrakt *Článek se zabývá hledáním optimální doby mezi inspekcemi při statistické regulaci pomocí Shewhartova regulačního diagramu v případě, že známe rozdělení pravděpodobnosti doby do poruchy sledovaného procesu. V takovém případě lze aplikovat adaptivní regulační schéma, kdy měníme dobu mezi inspekcemi v závislosti na době bezporuchového provozu. Takováto optimalizace vede k nejnižším nákladům na regulaci.*

Klíčová slova: *regulační diagram, Bayesovský přístup, ekonomická optimalizace, návrh regulačního diagramu, adaptivní regulační diagram.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/26

1. Úvod

Statistická regulace procesu je jednou ze statistických metod, jak provádět kontrolu procesu v reálném čase a reagovat na případné změny a poruchy. Procesem zde rozumíme například výrobní proces nebo proces poskytování služeb, chemické procesy, procesy ekonomické a další. Ve všech případech se jedná o postupnou přeměnu materiálových toků, finančních toků, stavu systému či jeho součástí v čase. Pokud se tyto přeměny chovají "rozumně", tedy podle našich představ a nastavených parametrů, říkáme, že proces je pod statistickou kontrolou. V případě změny chování procesu, které může vést k jeho chybným výstupům, říkáme, že se proces dostal mimo statistickou kontrolu. V takovém případě je třeba proces "korigovat" a znovu jej - zpravidla vnějším zásahem - uvést pod statistickou kontrolu. Toto provádíme posloupností inspekčních měření procesu v čase a aplikací posloupnosti sekvenčních testů, kterými se snažíme rozhodnout o tom, zda je čas provést korekci či nikoli.

Jedním z velmi rozšířených způsobů, jak toto testování provádět, je použití regulačních diagramů Shewhartova typu. V literatuře je uvedena řada metod, jak

správně navrhnout regulační diagram [1], [2], [4]. Mimo jiné je třeba provést analýzu sledovaného procesu, vymezit regulované veličiny, způsoby jejich měření, jejich statistické chování. Odtud vyplývá i výběr typu regulačního diagramu a nastavení jeho parametrů. Mezi základní parametry regulačního diagramu Shewhartova typu patří stanovení jeho centrální přímký (CL), regulačních mezí (LCL a UCL), počtu měření při jednotlivých inspekcích a doby mezi těmito inspekcemi. Tyto parametry mají vliv na celkovou efektivitu použitého regulačního diagramu. Při chybně nastavených parametrech může být regulační diagram nespolehlivý (příliš velký počet falešných alarmů, dlouhá odezva na vzniklou poruchu) a příliš nákladný (vysoké náklady na regulaci ve srovnání s případnou ztrátou bez ní). Způsoby, jak odhadnout parametry regulačního diagramu, jsou popisovány v četné literatuře.

V této práci se budeme zabývat regulací procesu, v němž máme informaci o pravděpodobnostním chování procesu vzniku poruchového stavu, který působí změnu v chování sledovaného procesu [3]. Tato situace je častá u těch procesů, kdy přesně víme, jaká porucha způsobí změnu, nicméně tato porucha přichází náhodně v čase. V takovém případě se zdá být efektivnější neprovádět inspekce ve stejných časových intervalech nezávisle na době bezporuchového běhu procesu, ale postupovat adaptivně, podle rostoucí pravděpodobnosti poruchy, která v čase s pravděpodobností 1 nastane [5]. To znamená, že na počátku běhu procesu budeme provádět inspekce méně často, než po určité době, kdy se začne pravděpodobnost poruchy výrazně zvyšovat. Vzhledem k tomu, že náklady na provedení inspekce mohou být poměrně vysoké, lze tímto postupem zvýšit efektivitu regulačního procesu.

2. Model

Budeme se zabývat výrobním procesem, který je monitorován prostřednictvím sledovaného znaku, reprezentovaného náhodnou veličinou X . Při inspekci provedeme n nezávislých měření a spočteme průměr $\bar{X}$. Pokud je proces v takzvaném stavu „pod statistickou kontrolou“, bude mít pravděpodobnostní rozdělení veličiny $\bar{X}$ distribuční funkci $F_0(z) = P(\bar{X} \leq z)$ se střední hodnotou μ_0 a rozptylem σ_0 . Náklady na inspekci předpokládáme ve tvaru $cn + b$, kde b , resp. c jsou pevné náklady na provedení inspekce, resp. náklady na jedno inspekční měření.

S pravděpodobností 1 se v náhodném čase T objeví porucha, která způsobí změnu rozdělení pravděpodobnosti veličiny $\bar{X}$ a posun střední hodnoty z μ_0 na μ_1 . Distribuční funkci veličiny $\bar{X}$ po poruše označíme $F_1(z)$. Veličina T má rozdělení pravděpodobnosti se spojitou distribuční funkcí $G(t) = P(T \leq t)$ a s hustotou $g(t)$, $t \geq 0$. Posun střední hodnoty veličiny X způsobí změnu ve výrobním procesu, která může mít za následek nekvalitní výrobu. Označme L ztrátu za jednotku času, vzniklou nekvalitní výrobou v době, kdy má znak X výrobního procesu v důsledku poruchy posunutou střední hodnotu. V takovém případě budeme říkat, že proces je „mimo statistickou kontrolu“.

Předpokládejme, že na počátku pozorování v čase 0 je proces pod statistickou kontrolou, tedy střední hodnota sledovaného znaku je rovna μ_0 . Střední ztrátu

v čase $t \geq 0$ můžeme potom vyjádřit vztahem

$$C_0(t) = L \int_0^t G(s) ds = Lc_0(t) \quad (1)$$

Použijeme-li regulační diagram Shewhartova typu pro střední hodnotu a provedeme-li inspekci v čase t_0 , pak mohou nastat dvě možné situace: hodnota $\bar{X}$ sledovaného znaku bude vně nebo uvnitř kontrolních mezí LCL a UCL . Pro jednodušší zápis označme kritickou oblast $\omega = (-\infty, LCL) \cup (UCL, \infty)$ a její doplněk ω^C .

a) Předpokládejme nejprve situaci, kdy $\bar{X} \in \omega^C$, tedy proces se zdá být pod statistickou kontrolou. V tomto případě se domníváme, že porucha v intervalu $(0, t_0)$ nenastala, neprovádíme žádný zásah a proces běží dál v nezměněném stavu.

Pokud porucha nastala do okamžiku t_0 , potom je pravděpodobnost jevu $\{\bar{X} \in \omega^C\}$ rovna $\pi_0^1 = F_1(UCL) - F_1(LCL)$. Nenastala-li porucha do doby t_0 , potom je tato pravděpodobnost rovna $\pi_0^0 = F_0(UCL) - F_0(LCL)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti můžeme vyjádřit pravděpodobnost jevu $\{\bar{X} \in \omega^C\}$ při rozdělení doby do poruchy s distribuční funkcí $G(t)$ jako $\pi_0(t_0) = \pi_0^1 G(t_0) + \pi_0^0 (1 - G(t_0))$.

Poznamenejme, že použití regulačního diagramu v tomto případě má zřejmě smysl pouze tehdy, pokud v libovolném čase t_0 platí nerovnost $\pi_0^0 > \pi_0^1$. V opačném případě bychom poruchu tímto regulačním diagramem nemohli identifikovat.

Označme $G_0^{\bar{X}}(t_0) = P(T \leq t_0 | \bar{X} \in \omega^C)$ aposteriorní distribuční funkci doby do poruchy za předpokladu, že naměřený průměr $\bar{X}$ je uvnitř kontrolních mezí. Pomocí Bayesova vzorce dostáváme

$$G_0^{\bar{X}}(t_0) = \frac{\pi_0^1 G(t_0)}{\pi_0^1 G(t_0) + \pi_0^0 (1 - G(t_0))} = \frac{\pi_0^1 G(t_0)}{\pi_0(t_0)}.$$

Označme $\epsilon(t_0)$ podmíněnou střední hodnotu $E(T | T \leq t_0) = \frac{1}{G(t_0)} \int_0^{t_0} sg(s) ds = t_0 - \frac{c_0(t_0)}{G(t_0)}$ a podmíněnou distribuční funkci $H(t | t_0) = P(T \leq t + t_0 | T > t_0)$. Potom výraz

$$C_1^*(t, t_0) = L \int_0^{t-t_0} H(s | t_0) ds = Lc_1^*(t, t_0)$$

označuje střední ztrátu v čase $t \geq t_0$ za předpokladu, že k poruše nedošlo do doby t_0 . Protože je $H(t | t_0) = \frac{G(t+t_0) - G(t_0)}{1 - G(t_0)}$, dostáváme

$$\begin{aligned} c_1^*(t, t_0) &= \int_0^{t-t_0} \frac{G(s+t_0) - G(t_0)}{1 - G(t_0)} ds \\ &= \frac{1}{1 - G(t_0)} \left[\int_{t_0}^t G(s) ds - G(t_0)(t - t_0) \right] \\ &= \frac{1}{1 - G(t_0)} \left[c_0(t) - c_0(t_0) - G(t_0)(t - t_0) \right]. \end{aligned}$$

Střední ztrátu v čase $t \geq t_0$ v situaci a) lze nyní vyjádřit vztahem

$$C_1^0(t, t_0) = cn + b + Lc_1^0(t, t_0),$$

kde

$$c_1^0(t, t_0) = G_0^{\bar{X}}(t_0)(t - \epsilon(t_0)) + (1 - G_0^{\bar{X}}(t_0))c_1^*(t, t_0) \quad (2)$$

b) V případě, že $\bar{X} \in \omega$, budeme předpokládat, že proces je mimo statistickou kontrolu. V tomto případě se domníváme, že porucha v intervalu $(0, t_0)$ nastala a provedeme odpovídající zásah (identifikaci příčiny a její odstranění).

Zde opět mohou nastat dva případy: porucha skutečně nastala a zásah je oprávněný, nebo porucha ve skutečnosti nenastala a regulační diagram vyslal falešný signál. Nicméně i takovým případem se musíme zabývat a ověřit, zda je signál opravdu falešný. S těmito zásahy jsou spojeny náklady R_0 v případě falešného signálu a R_1 v případě opravy stavu, způsobené poruchou. Předpokládáme, že $R_1 > R_0$. Po provedení zásahu bude proces opět ve stavu "jako nový", tedy pod statistickou kontrolou, se střední hodnotou μ_0 .

Podobně jako v situaci a), i zde vyjádříme podmíněné pravděpodobnosti jevu $\{\bar{X} \in \omega\}$ za předpokladu, že porucha do doby t_0 nastala $\pi_1^1 = 1 - \pi_0^1$ a za předpokladu, že porucha do doby t_0 nenastala $\pi_1^0 = 1 - \pi_0^0$. Celková pravděpodobnost jevu $\{\bar{X} \in \omega\}$ při rozdělení doby do poruchy daném distribuční funkcí $G(t)$ je $\pi_1(t_0) = \pi_1^1(t_0)G(t_0) + \pi_1^0(t_0)(1 - G(t_0))$. Je zřejmé $\pi_1(t_0) = 1 - \pi_0(t_0)$.

Označíme-li nyní $G_1^{\bar{X}}(t_0) = P(T \leq t_0 | \bar{X} \in \omega)$ aposteriorní distribuční funkci doby do poruchy za předpokladu, že naměřený průměr $\bar{X}$ je vně kontrolních mezí, dostáváme

$$G_1^{\bar{X}}(t_0) = \frac{\pi_1^1 G(t_0)}{\pi_1^1 G(t_0) + \pi_1^0 (1 - G(t_0))} = \frac{\pi_1^1 G(t_0)}{\pi_1(t_0)}.$$

Střední ztrátu v čase $t \geq t_0$ v situaci b) lze nyní vyjádřit vztahem

$$C_1^1(t, t_0) = cn + b + G_1^{\bar{X}}(t_0)[R_1 + L(t_0 - \epsilon(t_0))] + (1 - G_1^{\bar{X}}(t_0))R_0 + Lc_0(t - t_0). \quad (3)$$

Celkové střední náklady v čase $t \geq t_0$ za předpokladu, že v čase t_0 byla provedena inspekce, označíme

$$C_1(t) = \pi_1(t_0)C_1^1(t, t_0) + \pi_0(t_0)C_1^0(t, t_0), \quad (4)$$

kde $C_1^1(t, t_0)$ a $C_1^0(t, t_0)$ jsou dány rovnicemi (3) a (2). Funkce $C_1(t)$ je zprava spojitá, je rovna 0 pro $t \in (0, t_0)$ a (4) pro $t \geq t_0$.

3. Optimální doba inspekce

Uvažujme proces, který startuje v čase $t = 0$ ve statisticky zvládnutém stavu, tedy s $E(\bar{X}) = \mu_0$. Naším cílem je navrhnout čas t_0^* první inspekce tak, aby střední náklady (ztráta) spojené s řízením byly minimální. Střední náklady na proces bez řízení jsou vyjádřeny funkcí $C_0(t)$. Předpokládejme, že se rozhodneme v čase t_0^* provést inspekci, spočívající v n měřeních, výpočtu sledované statistiky, kterou je průměr $\bar{X}$, její porovnání s kontrolními mezemi v regulačním diagramu a přijetí případných opatření. Pokud sledovaná statistika bude uvnitř regulačních mezí, bude

proces pokračovat v nezměněném stavu se střední ztrátou $C_1^0(t, t_0)$, $t \geq t_0$. Bude-li sledovaná statistika vně regulačních mezí, náklady se zvýší o cenu provedených opatření, nicméně dále se bude proces chovat jako nový, tedy od času $t = 0$.

Všimněme si chování funkce $C_1^0(t)$, $t \geq t_0$. Tuto funkci můžeme s využitím vztahu (2) zapsat ve tvaru

$$C_1^0(t) = cn + b + Lc_1^0(t_0) + La_1(t), \quad t \geq t_0. \quad (5)$$

Úpravou vztahu (2) dostaneme

$$\begin{aligned} c_1^0(t_0) &= \frac{\pi_0^1}{\pi_0(t_0)} c_0(t_0), \\ a_1(t) &= \frac{\pi_0^0}{\pi_0(t_0)} (c_0(t) - c_0(t_0)) - \frac{\pi_0^0 - \pi_0^1}{\pi_0(t_0)} G(t_0) (t - t_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Funkce (6) je spojitá a rostoucí, neboť pro její derivaci platí

$$\frac{da_1(t)}{dt} = \frac{\pi_0^0}{\pi_0(t_0)} (G(t) - G(t_0)) + \frac{\pi_0^1}{\pi_0(t_0)} G(t_0) > 0.$$

Podobně můžeme pro $t \geq t_0$ rozložit funkci $c_0(t)$ na dvě části

$$c_0(t) = c_0(t_0) + a_0(t),$$

kde $a_0(t) = c_0(t) - c_0(t_0)$ je opět spojitou a rostoucí funkcí proměnné $t \geq t_0$. Navíc je

$$\begin{aligned} \frac{da_0(t)}{dt} - \frac{da_1(t)}{dt} &= G(t) \left(1 - \frac{\pi_0^0}{\pi_0(t_0)} \right) + G(t_0) \frac{\pi_0^0 - \pi_0^1}{\pi_0(t_0)} \\ &= \frac{\pi_0^0 - \pi_0^1}{\pi_0(t_0)} G(t_0) (1 - G(t)) \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Tedy $a_0(t)$ roste pro $t \geq t_0$ rychleji, než $a_1(t)$. Odtud plyne následující Tvrzení.

Tvrzení 1 *Optimální volba t_0^* je řešením rovnice*

$$C_0(t_0) = C_1^0(t_0). \quad (8)$$

Důkaz:

Ze vztahů (1) a (2) vyplývá spojitost obou stran rovnice v Tvrzení 1. Tedy

i) pokud bychom zvolili t_0^* takové, že $C_0(t_0^*) < C_1^0(t_0^*)$, potom by existovalo $t_1 > t_0^*$ tak, že pro všechna $t \in \langle t_0^*, t_1 \rangle$ je $C_0(t) < C_1^0(t)$ a tudíž by bylo lépe inspekci neprovádět, neboť střední náklady bez inspekce by byly nižší než při provedené inspekci v čase t_0^* .

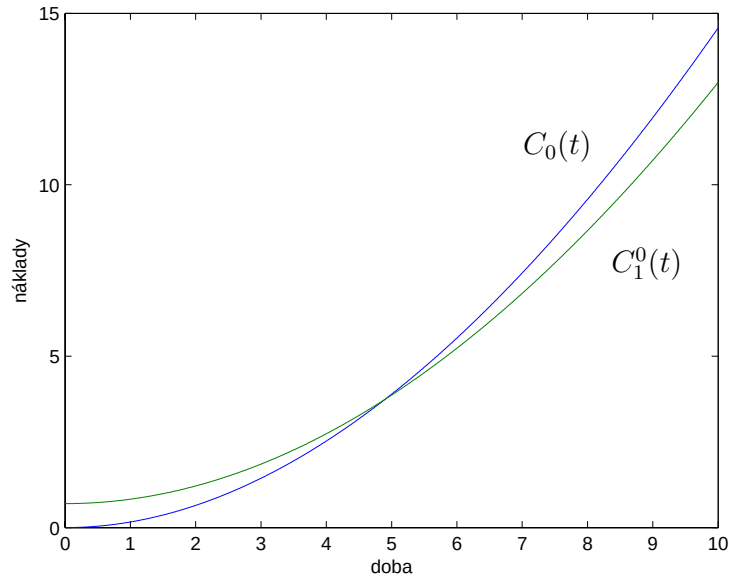
ii) kdyby bylo t_0^* takové, že $C_0(t_0^*) > C_1^0(t_0^*)$, potom by muselo existovat $t_2 < t_0^*$ tak, že $C_0(t_2) > C_1^0(t_2)$ a tudíž by bylo lépe provést inspekci už v čase t_2 .

iii) zvolíme-li t_0^* tak, že $C_0(t_0^*) = C_1^0(t_0^*)$, potom ze vztahu (7) vyplývá existence $t_3 > t_0^*$ takového, že pro $t \in \langle t_0, t_3 \rangle$ bude $C_0(t) \geq C_1^0(t)$. To znamená, že střední náklady po provedené inspekci, pokud je sledovaná statistika uvnitř regulačních mezí, budou nižší než kdybychom inspekci neprovedli. $Q.E.D. \square$

Příklad: Uvažujme nejjednodušší příklad regulace procesu, v němž se sledovaná veličina řídí normálním rozdělením $N(\mu_0, \sigma^2)$. Porucha v procesu způsobí posun střední hodnoty na $\mu_1 = \mu_0 + \delta$. Doba mezi poruchami nechť má exponenciální rozdělení se střední dobou mezi poruchami rovnou τ . Při inspekci budeme provádět n nezávislých měření, z nichž budeme počítat aritmetický průměr $\bar{X}$. V případě, že je proces pod statistickou kontrolou, bude mít tento průměr rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu_0, \sigma^2/n)$. Při použití klasického Shewhartova regulačního diagramu bude centrální příčka v úrovni μ_0 a regulační meze na úrovních $\mu_0 \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. Potom je

$$\begin{aligned} \pi_0^0 &= 2\Phi(3) - 1 = 0,99730, & G(t) &= 1 - \exp(-t/\tau), \\ \pi_0^1 &= \Phi(3 - \delta\sqrt{n}/\sigma) - \Phi(-3 - \delta\sqrt{n}/\sigma), & c_0(t) &= t + \tau(\exp(-t/\tau) - 1). \end{aligned}$$

Řešení rovnice (8) v programu MATLAB pro $c = 0.1$, $n = 5$, $b = 0.2$, $L = 8$, $\delta = 1$, $\tau = 24$ je $t_0 = 4.8964$. Grafické řešení je na Obr. 1.

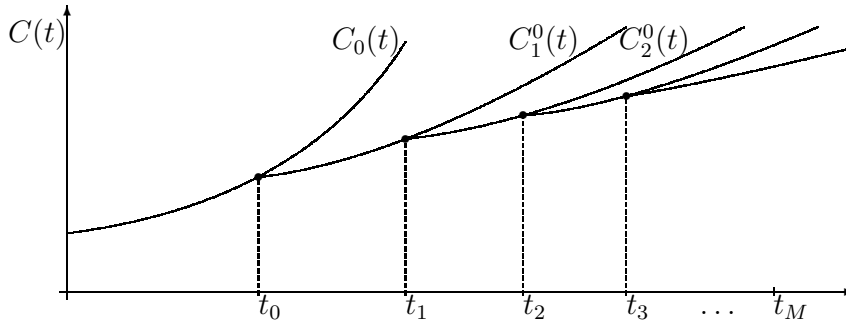


Obrázek 1: Grafy levé a pravé strany rovnice (8)

4. Adaptivní regulace

Proces statistické regulace probíhá takto: proces začíná v čase 0 a náklady na něj narůstají podle funkce $C_0(t)$. Postupem popsaným v předchozí kapitole stanovíme čas t_0 první inspekce. Pokud bude sledovaná veličina uvnitř regulačních mezí, bude proces pokračovat s náklady, vyjádřenými funkcí $C_1^0(t)$. Bude-li sledovaná veličina mimo regulační meze, proces bude zastaven a bude provedena oprava (seřízení, údržba). Po opravě bude proces pokračovat tak, jakoby začínal od času 0.

Pokud při první inspekci regulační diagram nevyšle signál o ztrátě statistické kontroly, budeme po určité době inspekci opakovat. Tento postup se bude opakovat tak dlouho, dokud se proces nedostane mimo statistickou kontrolu nebo dokud nenastane čas preventivní údržby t_M . Na Obr. 2 je naznačen postup, kdy v okamžiku provedené inspekce, která neskončila vysláním signálu, spočteme dobu do další inspekce jako průsečík křivky nákladů.



Obr. 2. Doby jednotlivých inspekcí.

Dále se budeme zabývat stanovením času t_k následující inspekce, byla-li předchozí inspekce provedena v čase t_{k-1} , $k = 2, 3, \dots$. Pokud v čase t_{k-1} inspekce neodhalila poruchu, náklady na proces lze vyjádřit funkcí

$$\begin{aligned} C_k^0(t) &= k(cn + b) + L \left[G_0^{\bar{X}}(t_{k-1})(t - \epsilon(t_{k-1})) \right. \\ &\quad \left. + (1 - G_0^{\bar{X}}(t_{k-1})) \int_0^{t-t_{k-1}} H(s|t_{k-1}) ds \right] \\ &= cn + b + Lc_k^0(t_{k-1}) + La_k(t), \quad t \geq t_{k-1}, \quad (9) \end{aligned}$$

Výraz (9) je podobný výrazu (5). Zde pro jednotlivé složky dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} c_k^0(t_{k-1}) &= \frac{\pi_0^1 c_0(t_{k-1})}{\pi_0(t_{k-1})} \\ a_k(t) &= \frac{\pi_0^0}{\pi_0(t_{k-1})} (c_0(t) - c_0(t_{k-1})) - \frac{\pi_0^0 - \pi_0^1}{\pi_0(t_{k-1})} G(t_{k-1})(t - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Posloupnost $\{a_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající v k pro každé pevné $t > 0$. Funkce $a_k(t)$ jsou

spojitě diferencovatelné a pro jejich derivace platí

$$\frac{da_k(t)}{dt} - \frac{da_{k+1}(t)}{dt} = \frac{\pi_0^0(\pi_0^0 - \pi_0^1)}{\pi_0(t_{k-1})\pi_0(t_k)}(G(t_k) - G(t_{k-1}))(1 - G(t)) \geq 0. \quad (10)$$

Provedeme-li inspekci v následujícím čase t_k , mohou nastat opět dvě situace, jak bylo popsáno v kapitole 2.

a) Pokud $\bar{X} \in \omega^C$, neprovádíme žádný zásah a střední náklady pro $t \geq t_k$ jsou dány funkcí $C_{k+1}^0(t)$ podle vztahu (9) pro $k+1$.

b) V případě, že $\bar{X} \in \omega$, bude proveden zásah a střední náklady v $t \geq t_k$ lze vyjádřit funkcí $C_{k+1}^1(t)$ podle vztahu

$$C_{k+1}^1(t) = (k+1)(cn+b) + G_1^{\bar{X}}(t_k)[R_1 + L(t_k - \epsilon(t_k))] + (1 - G_1^{\bar{X}}(t_k))R_0 + Lc_0(t - t_k). \quad (11)$$

Celkový střední náklad po inspekci v čase $t \geq t_k$ potom budou

$$C_{k+1}(t) = \pi_1(t_k)C_{k+1}^1(t) + \pi_0(t_k)C_{k+1}^0(t). \quad (12)$$

Tvrzení 2 *Optimální volba t_k^* je řešením rovnice*

$$C_k^0(t_k) = C_{k+1}^0(t_k). \quad (13)$$

Důkaz je analogický důkazu Tvrzení 1. □

Okamžik t_k další inspekce budeme hledat jako řešení rovnice (13). Levá a pravá strana rovnice (13) mají tvar

$$\begin{aligned} C_k^0(t_k) &= k(cn+b) + \frac{L}{\pi_0(t_{k-1})} \left[\pi_0^0 c_0(t_k) - (\pi_0^0 - \pi_0^1) [G(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + c_0(t_{k-1})] \right] \\ C_{k+1}^0(t_k) &= (k+1)(cn+b) + \frac{L}{\pi_0(t_k)} \pi_0^1 c_0(t_k). \end{aligned}$$

Rovnici (13) opět přepíšeme ve tvaru $D_k(t) = 0$ kde

$$\begin{aligned} D_k(t) &= (cn+b) + \frac{L}{\pi_0(t)} \pi_0^1 c_0(t) \\ &\quad - \frac{L}{\pi_0(t_{k-1})} \left[\pi_0^0 c_0(t) - (\pi_0^0 - \pi_0^1) [G(t_{k-1})(t - t_{k-1}) + c_0(t_{k-1})] \right] \end{aligned}$$

Příklad (pokračování): Pokračujme ve výpočtu v našem příkladu. Postupným výpočtem v prostředí programu MATLAB podle Tvzení 2 a pro hodnoty parametrů $c = 0.1$, $n = 5$, $b = 0.2$, $L = 8$, $\delta = 1$, $\tau = 24$ dostaneme posloupnost časů $t_0 = 4.8964$, $t_1 = 9.1970$, $t_2 = 12.9338$,

5. Závěr

V článku je uvedena metoda pro optimální odhad časů jednotlivých inspekci v adaptivním regulačním diagramu Shewhartova typu. K těmto odhadům využívá informace o apriorním rozdělení pravděpodobnosti doby mezi poruchami, způsobujícími změny v chování sledovaného procesu. Na základě Bayezovského přístupu jsme schopni nalézt posloupnost časů jednotlivých inspekci v závislosti na zvyšující se pravděpodobnosti vzniku poruchy, která s pravděpodobností 1 v čase nastane. Ve chvíli, kdy by měl být časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími inspekcemi příliš krátký, postupujeme dále s ekvidistantními inspekcemi, nebo provedeme preventivní údržbu procesu, která jej opět vrátí do stavu jako v čase 0.

Tato metoda se nezabývá dalšími parametry regulačního diagramu, jako je počet měření při jednotlivých inspekcích či nastavení regulačních mezí. Také výpočet ARL či ADEL je v tomto případě poměrně komplikovaný. Vzhledem k tomu, že se jedná o ekonomickou optimalizaci, měla by být aplikace popsané metody vždy provázena statistickou optimalizací.

Reference

- [1] CÉZOVÁ, E.: Ekonomicko-statistický návrh Regulačního diagramu. *Sborník konference REQUEST'08*, ISBN 978-80-214-3774-6 (2008), 303–313
- [2] DOHNAL, G.: Design of Control Charts. *Sborník konference ROBUST 2008*, (2008), 303–313
- [3] MARCELLUS, R. L.: Bayesian Monitoring to Detect a Shift in Process Mean. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 24 (2008), pp. 303–313
- [4] NENES, G., TAGARAS G.: The economically designed two-sided Bayesian $\bar{X}$ control chart. *European Journal of Operational Research* 183 (2007), pp. 263–277
- [5] RUNGER, G. C., MONTGOMERY, D. C.: Adaptive sampling Enhancements for Shewhart Control Charts. *IIE Transactions*, Vol. 25, 3 (1993), pp. 41–51

Poděkování. Tato práce vznikla za podpory projektu 1M06047 MŠMT ČR Centrum pro jakost a spolehlivost výroby.

PROCESS DEPENDABILITY MANAGEMENT INVOLVEMENT IN ENTERPRISE MANAGEMENT

ZAČLENĚNÍ MANAGEMENTU SPOLEHLIVOSTI PROCESŮ DO PODNIKOVÉHO MANAGEMENTU

Radim Flegl

ISQ PRAHA, s.r.o.,
Pechlátova 19, 150 00 Praha 5
flegl.radim@isq.cz

Abstract: *Contribution deals with organizational integration of process dependability assurance to corporational management. Author proposes to integrate process dependability assurance into organizationa frame of quality management system. Proposal is based on two-level architecture with centralized Process dependability counsel solving methodological and coordinating problems and decentralized teams – Work process dependability groups solving partial problems in production process.*

Keywords: dependability, process, dependability management, dependability programme.

Abstrakt: *Příspěvek pojednává o problematice organizačního začlenění péče o spolehlivost podnikových procesů v rámci podnikového managementu. Autor navrhuje začlenit péči o spolehlivost podnikových procesů do organizačního rámce systému managementu kvality. Návrh vychází z dvouúrovňové architektury s centrálním útvarem Rada procesní spolehlivosti řešícím metodické a koordinační úkoly a decentralizovanými týmy – Pracovními skupinami spolehlivosti procesů řešícími konkrétní problémy v podnikových procesech.*

Klíčová slova: spolehlivost, proces, management spolehlivosti, programy spolehlivosti.

DOI: 10.5300/IB/2011-2/35

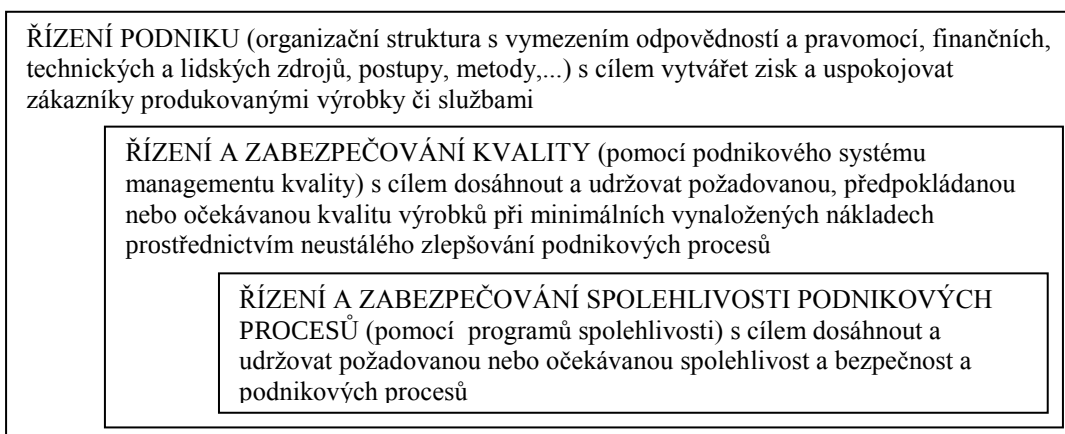
1. Úvod

Péče o spolehlivost podnikových procesů je aktuálním problémem dneška. Aby bylo možno spolehlivost procesů plánovat, řídit, hodnotit a zlepšovat, je potřeba ji začlenit do systému podnikového managementu.

Spolehlivost je jedním z obecně uznávaných parametrů kvality. V řešení péče o spolehlivost je proto možné se opřít o analogie z oblasti péče o kvalitu. Je možné se inspirovat, jak v oblasti využití metod, tak i v oblasti organizační. Samozřejmě je potřeba převzaté poznatky patřičně modifikovat pro účely péče o spolehlivost.

2. Charakteristika managementu spolehlivosti procesů

Řízení a zabezpečování spolehlivosti je vhodné koncipovat jako nedílnou součástí řízení a zabezpečování kvality (které je zase nedílnou součástí řízení podniku - obr. č. 1), má ale určitá specifika oproti standardně, rutinně chápanému zabezpečování kvality.



Obr. č. 1 - Hierarchické uspořádání řízení podniku, kvality a spolehlivosti

K dosažení spolehlivosti je tedy nutné se v rámci managementu kvality systematicky zabývat managementem spolehlivosti, tj. zajištěním všech funkcí a činností nezbytných pro určení a splnění požadavků na spolehlivost včetně specifických postupů zabezpečování (prokazování) spolehlivosti (tj. provádění příslušných plánovaných a systematických postupů a operací nezbytných pro dosažení přiměřené důvěry, že proces splní specifikované požadavky na spolehlivost). Obsahem managementu spolehlivosti je tedy stanovení a realizace cílů v oblasti spolehlivosti.

Aby management spolehlivosti mohl být nazýván managementem, musí v sobě zahrnovat všechny manažerské funkce. V odborné literatuře bývá management jako řídicí proces rozdělován do několika základních manažerských funkcí¹, představujících typické úkoly, které vedoucí pracovník ve své řídicí práci řeší. I když klasické úlohy manažera byly definovány již H. Fayolem (plánování, organizování, přikazování, koordinace a kontrola), v současné době se nejčastěji používá toto třídění:

- plánování,
- organizování,
- výběr a vedení lidí,
- kontrolování.

K těmto funkcím, označovaným některými autory jako sekvenční, jsou někdy přiřazovány tzv. průběžné manažerské funkce:

- analyzování,
- komunikování,
- rozhodování.

Všechny výše uvedené funkce by měl management spolehlivosti řešit.

Podle výše uvedeného členění hlavních manažerských funkcí by měl mít management kvality v oblasti spolehlivosti procesů následující obsahovou náplň:

Plánování: představuje stanovení poslání, cílů a úkolů a cest (taktik, programů, směrnic apod.) k jejich dosažení. V případě managementu spolehlivosti podnikových procesů tedy cílů a úkolů a cest zvyšování spolehlivosti těchto procesů, například formou programů zvyšování spolehlivosti.

Organizování: je charakterizováno stanovením a přidělením realizačních rolí jednotlivcům a skupinám a zajištěním jejich vzájemných vztahů. V případě managementu spolehlivosti podnikových procesů tedy stanovením a přidělením realizačních rolí jednotlivcům a skupinám

¹ BAUER, J.; KLIMEŠ, F. *Teorie managementu*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1998. 214 s. ISBN 80-01-01892-X. (s.38)

v oblasti zvyšování spolehlivosti těchto procesů a zajištěním vzájemných vztahů těchto jednotlivců či skupin. To znamená organizačně zajistit proces zvyšování spolehlivosti, resp. programy zvyšování spolehlivosti.

Výběr a vedení lidí: představuje identifikaci nároků na zaměstnance, jejich výběr z disponibilních zdrojů, rozmístění na funkční místa (pozice) a přímé (pomocí příkazů, směrnic apod.) i nepřímé usměrňování pracovníků při výkonu jim svěřených činností (vedením se na rozdíl od řízení rozumí činnost, která se vztahuje výhradně na lidského činitele). Výběr a vedení lidí je v oblasti spolehlivosti obzvláště důležitý, neboť problematika spolehlivosti je odborně náročná, je zde tedy kladen důraz na odbornou připravenost, a zásadní význam má i motivace pracovníků, neboť proces neustálého zlepšování vyžaduje nadšení pro věc, vysoké pracovní nasazení v pracovní době, případně i aktivity realizované mimo rámec pracovní doby.

Kontrolování: v zásadě porovnává záměr (cíl, plán) s dosaženým výsledkem, hodnotí kvantitu nebo kvalitu výsledků činností. V případě managementu spolehlivosti podnikových procesů kontrolujeme výsledky činnosti jednotlivců i skupin zapojených do programů růstu spolehlivosti.

Analýza: souvisí zpravidla s rozhodovacími procesy manažerských činností, analyzuje se daný problém z hlediska cíle, obtížnosti a doby přípravy rozhodnutí. Management spolehlivosti by měl využívat analýz spolehlivosti k vytyčení oblastí pro zlepšování. Následovat by mělo plánování a realizace opatření.

Komunikace: je proces předávání a přijímání informací, vzájemné vnímání a chápání, a tím představuje základní spojovací článek mezi lidmi v procesu řízení. V oblasti neustálého zlepšování, a tedy i v oblasti zlepšování spolehlivosti podnikových procesů, hraje komunikace zásadní roli. Informace a znalosti musí být sdíleny jednotlivými týmy, bez vad musí být i komunikace mezi jednotlivými stupni řízení v rámci zlepšovacího procesu.

Rozhodování: je výběrem - volbou z více než jedné možnosti řešení (variant) a je výsledkem - závěrem rozhodovacího procesu. V případě managementu spolehlivosti podnikových procesů rozhodujeme například mezi jednotlivými variantami opatření, které mají vést ke zvyšování spolehlivosti procesů.

V analogii k managementu kvality je nezbytné zajistit jednoznačnou odpovědnost vrcholového vedení při realizaci managementu spolehlivosti v organizaci vytvořit a udržovat:

- dokument vyjadřující politiku a cíle ve vztahu ke spolehlivosti výrobků a příslušných podpůrných služeb,
- potřebné prvky a zdroje programu k zabezpečení spolehlivosti (v rámci systému kvality, programu spolehlivosti, plánu spolehlivosti),
- postupy pro průzkum trhu ke stanovení potřeb zákazníků na spolehlivost a jejich převedení do specifikací,
- postupy přezkoumání přijatého programu spolehlivosti (oficiální hodnocení stavu a přiměřenosti ve vztahu k politice a cílům kvality a spolehlivosti).

Významnými nástroji uplatňování managementu spolehlivosti v organizacích zejména ve vztahu ke konkrétnímu výrobku či projektu jsou různé formy přezkoumání a analýz spolehlivosti s následnými rozhodnutími o opatřeních k nápravě, způsobech jejich realizace, odpovědnostech včetně stanovených termínů plnění, vyhodnocení jejich efektivnosti a účinnosti atd. Jejich efektivní a účinné využívání v organizacích vyžaduje:

- "manažerské" zajištění (vymezení pravomocí, odpovědností, přidělení zdrojů, technické zabezpečení atd.),
- týmovou činnost,
- počítačovou podporu (tj. využívání vhodných softwarových produktů pro jejich podporu).

3. Programy spolehlivosti procesů

Úvod do programů spolehlivosti

Existuje řada norem ČSN IEC věnovaných problematice řízení spolehlivosti, z nichž mnohé mají charakter metodického návodu². Tyto normy se bohužel vztahují především k řízení spolehlivosti produktů/výrobků. Nicméně z metodického hlediska mohou posloužit jako hodnotná inspirace i pro řešení problematiky spolehlivosti podnikových procesů.

Základní normou z oblasti řízení spolehlivosti je ČSN IEC 300-1, převzatá do souboru norem ČSN ISO řady 9000 jako ČSN ISO 9000-4 "Řízení programu spolehlivosti". Zde můžeme konstatovat, že i tvůrci řady norem ISO 9000 neopomněli problematiku spolehlivosti a počítají s jejím integrálním zařazením do systému managementu kvality.

Norma ČSN ISO 9000-4 "Řízení programu spolehlivosti" se týká hlavních znaků úplného programu spolehlivosti pro plánování, organizaci, směr a operativní řízení zdrojů za účelem produkovat výrobky, které budou bezporuchové a udržitelné. V oblasti řízení se týká toho, co se má udělat, proč, kdy a jak se to má udělat; nestanoví (a ani nemůže) přesně, kdo to má dělat a kde. Uváděné požadavky jsou zaměřeny zejména na operativní řízení vlivů na spolehlivost ve všech fázích životního cyklu výrobků. Norma formuluje:

- odpovědnost vedení: koncepce; organizace; systém managementu kvality; průzkum trhu a plánování výrobku; přezkoumání vedením organizace; přezkoumání programu spolehlivosti
- samostatné prvky programu: zavádění programu spolehlivosti; metody; soubory informací; záznamy o spolehlivosti
- specifické prvky programu: plánování a vedení; přezkoumání a spolupráce; požadavky spolehlivosti; techniky; výrobky poskytované externí organizací; přezkoumání analýzy, předpovědi a návrhu; ověřování, potvrzování správnosti a zkoušení; program nákladů na životní cyklus; plánování provozní činnosti a zajištění údržby; opatření ke zdokonalování; zpětná vazba zkušeností.

Obsah, nástroje a prostředky managementu spolehlivosti

V podmínkách konkrétních organizací se uplatňují prostředky a způsoby, které jsou:

- formálně samostatně nevyčleněné, ale jednoznačně identifikovatelné v politice kvality, v plánech kvality a zejména v systému kvality organizace, nebo
 - vyčleněné a systematicky samostatně prezentované v programu spolehlivosti a/nebo v plánu spolehlivosti (ve vztahu ke konkrétnímu výrobku, smlouvě či projektu)
- K tomuto tématu existuje samostatná norma ČSN EN 60300-1³,

a to v obou případech jako součást systému, resp. plánu kvality pro všechny činnosti podél smyčky kvality, resp. etapy životního cyklu.

K uplatňování managementu spolehlivosti v organizacích podle jejich zaměření a cílů je obecně použit vhodná kombinace nástrojů a prostředků. Jako příklady nástrojů a prostředků, využitelných po příslušné úpravě v péči o spolehlivost procesů je možno uvést následující:

- program spolehlivosti: organizační struktura, odpovědnosti, postupy a zdroje používané v organizaci pro řízení a zabezpečování spolehlivosti,
- plán spolehlivosti: dokument stanovující v oblasti spolehlivosti zdroje a sled činností vztahujících se k jednotlivému procesu,

² např.:

ČSN EN 60300-1:2004 *Management spolehlivosti - Část 1: Systémy managementu spolehlivosti*;

ČSN EN 60300-2:2005 *Management spolehlivosti - Část 2: Směrnice pro management spolehlivosti*;

ČSN IEC 61014:2004 *Programy růstu bezporuchovosti*

³ ČSN EN 60300-1:2004 *Management spolehlivosti - Část 1: Systémy managementu spolehlivosti*.

- přezkoumání: postupy systematického, periodického a nezávislého posuzování přiměřenosti používaných komponent procesu, postupů a nástrojů včetně hodnocení efektivnosti nákladů na program spolehlivosti procesů,
- analýzy spolehlivosti: analýzy funkční struktury výrobku či procesu, druhů poruchových stavů, mechanismů vzniku poruch, projevů a následků vzniku poruch v procesech,
- informační systém spolehlivosti: sběr a zpracování dat a distribuce informací o poruchovosti procesů ve vazbě na provozní podmínky,
- zkoušky spolehlivosti: experimentální postupy určování nebo ověřování ukazatelů spolehlivosti procesů,
- program růstu bezporuchovosti procesů: odpovědnosti, postupy a zdroje používané v organizaci pro proces postupného zlepšování dosahovaných hodnot ukazatelů bezporuchovosti procesů.

Výběr, plánování, rozpracování a zavedení těchto nástrojů a prostředků je potřeba realizovat zejména:

- na začátku vývoje nových procesů,
- před podstatnějšími změnami (inovacemi) procesů, výrobních postupů, výrobních technologií apod., které ovlivňují spolehlivost procesu,
- jako odezva na analýzu nedostatků kvality procesů, subdodávek apod., které ovlivňují jejich spolehlivost.

Pro zabezpečování spolehlivosti z hlediska etap životního cyklu, jak výrobku, tak i procesu jsou dominantními definiční a vývojová fáze, v nichž je podle dlouhodobých zkušeností spolehlivost z cca 80% "založená" ("vprojektovaná"). Není-li v těchto fázích požadovaná nebo očekávaná spolehlivost do procesů "vprojektována", "vkonstruována", zpravidla to již nelze beze ztrát zcela napravit. Proto metodám a postupům uplatňovaným v těchto fázích životního cyklu je vhodné věnovat zvýšenou pozornost.

Rád bych zdůraznil, že řízení a zabezpečování spolehlivosti je třeba chápat jako systémový problém řešení všech procesů a činností ve svých vzájemných vazbách, jejichž technické, organizačně správní, ekonomické a lidské faktory dominantně ovlivňují spolehlivost procesu ve všech fázích jeho životního cyklu.

Odlišnosti v přístupech a složitosti řešení problematiky spolehlivosti a uplatnění managementu spolehlivosti v podmínkách jednotlivých organizací pak jsou závislé na mnoha okolnostech, zejména na:

- charakteru a složitosti procesu (např. v závislosti na tom, zda se jedná dílčí proces výroby součástky nebo složitý montážní proces, proces automatizovaný či prováděný ručně apod.) a s tím spojeným vývojovým rizikem,
- čase, finančních a lidských zdrojích, jež jsou k dispozici,
- výchozí situaci řešení spolehlivosti, tj. zda se navazuje na již předešlé systematicky prováděné aktivity v této oblasti nebo zda se k systematickému řešení teprve přistupuje,
- požadované úrovni bezpečnosti, životnosti, bezporuchovosti, udržitelnosti, zajištění údržby atd. a požadovaných průkazech, zárukách, přezkoumáních,
- objemu výroby (kusová, sériová, velkosériová).

Programy a plány spolehlivosti

Jedním ze základních možných způsobů realizace managementu spolehlivosti v organizacích jsou programy resp. plány spolehlivosti, které jsou svou podstatou obdobou systémů kvality resp. plánů kvality:

- plán spolehlivosti: je dokument, stanovující v oblasti spolehlivosti zdroje a sled činností vztahujících se k jednotlivému výrobku, smlouvě procesu nebo projektu,
- program spolehlivosti: je definován jako organizační struktura, odpovědnosti, postupy a zdroje používané v organizaci pro řízení a zabezpečování spolehlivosti; zahrnuje všechny etapy životního cyklu procesů.

Plán spolehlivosti procesu je možné myšlenkově odvodit z plánu kvality procesu.

Plán kvality je obecně definován⁴ jako: „Dokument, který specifikuje procesy systému managementu kvality (včetně procesů realizace výrobku) a zdroje, které mají být použity pro specifický výrobek, projekt nebo smlouvu“. Plán kvality má být v souladu se všemi ostatními požadavky systému managementu kvality organizace a má zajistit splnění specifikovaných požadavků na výrobek, projekt nebo smlouvu⁵. Plán kvality je obvykle součástí většího celkového plánu.

Plánům kvality je věnována samostatná mezinárodní norma⁶, která je zpracována jako směrnice pro plány kvality a může být vodítkem při přípravě, přezkoumání, přijímání a revizi plánů kvality. Tato norma je sice zpracována v návaznosti na požadavky na systémy managementu kvality podle norem souboru ISO 9000 a zároveň je primárně určena jako pomůcka k plánování kvality výrobků, ale obecné principy jsou platné i pro zpracování plánů kvality procesů.

Program spolehlivosti a plán spolehlivosti je v organizacích obvykle budován, udržován a rozvíjen pro plánování, organizaci a řízení zdrojů za účelem produkce bezporuchových a udržovatelných výrobků. Jejich využití však možné rozšířit i na problematiku zajištění spolehlivé realizace podnikových procesů.

Programy a plány spolehlivosti se uplatňují zejména v případech, kdy problematika spolehlivosti má vzhledem k podnikatelským záměrům a cílům organizace důležitou úlohu, obzvláště v případech sériové výroby finálních výrobků, resp. jejich komponent, v případech velkosériové produkce součástek a u výrobků či projektů s předem specifikovanými požadavky na spolehlivost (např. pro použití v oblasti vojenské, energetiky, spojů, dopravy spod.). Programy a plány spolehlivosti je vhodné aplikovat na předem vybrané stěžejní podnikové procesy.

V rámci programu spolehlivosti je nutno v konkrétních podmínkách organizace zavést, udržovat a dokumentovat:

- organizační strukturu (pravomoci, odpovědnosti, finanční, technické a lidské zdroje) a prvky programu,
- prostředky řízení, zabezpečování a zlepšování (postupy a metody analýz a hodnocení, způsoby a prostředky realizace opatření k nápravě atd.),
- vzdělávací a výcvikový program pro kategorie pracovníků, kteří budou postupy a metody používat,
- informační systém pro vytváření, udržování a aktualizaci souborů informací, způsobu jejich zpracování, přenášení a využívání při návrhu, resp. zlepšování procesů.

Program spolehlivosti je tvořen řadou úkolů, náležejících do specifické tématické oblasti tzv. prvků programu. Úkoly programu jsou chápány jako řada činností zaměřených na hlediska spolehlivosti výrobku, resp. procesu. Prvky programu spolehlivosti se podle ČSN ISO 9000-4 člení na dvě velké skupiny:

I. samostatné:

⁴ ČSN EN ISO 9000:2006 *Systémy managementu kvality – Základní principy a slovník*. Praha : ČNI, 2006.

⁵ PLURA, J. *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*. Praha : Computer Press, 2001. 244 s. ISBN 80-7226-543-1. (s.10).

⁶ ČSN ISO 10005 *Systémy managementu kvality - Směrnice pro plány kvality*. Praha : ČNI, 2006.

- zavádění programu spolehlivosti s výběrem úkolů, aby se zajistilo plnění specifikovaných požadavků na spolehlivost (dokumentace struktury a prvků programu s popisem postupů, metod analýzy, nástrojů a statistických zásad používaných v organizaci pro stanovení ukazatelů spolehlivosti, jejich řízení a vyhodnocování);
- vytvoření a udržování přístupu k potřebným kvalitativním a kvantitativním metodám, postupům a modelům pro předpověď, analýzu a odhad znaků spolehlivosti, včetně realizace navazujících výcvikových programů pro pracovníky, kteří je budou používat;
- vytvoření a udržování souborů informací ze zkoušek a z provozu pro zajištění zpětné vazby;
- zavedení a udržování systematické dokumentace v podobě tzv. záznamů o spolehlivosti (analogie záznamů o kvalitě);

II. specifické pro konkrétní výrobek nebo proces:

- plánování a management (vedení) - zpracování plánu spolehlivosti jako součásti plánu výrobku (procesu), jeho přezkoumání a zajištění sledovatelnosti požadavků na spolehlivost;
- postupy přezkoumání smlouvy a spolupráce (tzv. služební styk);
- příprava požadavků na spolehlivost, zahrnující jejich kvalitativní a kvantitativní specifikaci, jejich alokaci (rozdělení) na subsystémy, komponenty a díly výrobku, včetně interpretace těchto požadavků (analýza typických podmínek a omezení pro zamýšlené použití výrobku) a jejich přezkoumání;
- směrnice a postupy používané k dosažení požadované spolehlivosti při navrhování výrobku a zajištění jeho údržby, označované jako techniky inženýrství spolehlivosti (inženýrství bezporuchovosti, inženýrství udržitelnosti, inženýrství testovatelnosti/možnosti zkoušení, inženýrství lidských faktorů apod.);
- postupy specifikace požadavků na spolehlivost externě dodávaných výrobků, tj. ze smluvních dodávek a výrobků dodaných zákazníkem;
- analýzy, předpovědi a oficiální přezkoumání návrhu přiměřené pro výrobek (projekt);
- postupy pro efektivní a přiměřené ověřování a validaci (potvrzování správnosti) splnění požadavků na spolehlivost, plánování a provádění zkoušení spolehlivosti (vedle zkoušek bezporuchovosti, udržitelnosti, životnosti, skladovatelnosti, pohotovosti spod. při náběhu výroby, během výroby, přejímací zkoušky atd., též zkoušky s růstem bezporuchovosti, třídící zkoušky namáháním pro zlepšení bezporuchovosti);
- program nákladů životního cyklu, jehož základem jsou ekonomické analýzy pro posouzení celkových nákladů během životního cyklu výrobků, tj. posouzení celkových nákladů na pořízení a vlastnictví výrobku za účelem jejich optimalizace;
- plánování provozní činnosti a zajištění údržby, poskytnutí zákazníkovi informací potřebných pro provoz výrobku, včetně jeho instalace, zajištění servisu a zásobování náhradními díly (východiskem je specifikace, určování a hodnocení nároků na udržitelnost, požadavků na dosahování a ověřování cílů udržitelnosti, sestavení a provádění příslušných programů; doporučeným základem je zpracování koncepce udržitelnosti v období návrhu a z ní odvozené podmínky zajištění údržby v podobě doporučení o druhu a množství náhradních dílů, zkušebních zařízeních, speciálních nástrojích, požadavcích na kvalifikaci pracovníků údržby apod.);
- opatření ke zlepšování (tj. postupy systematické identifikace a zavádění všech nezbytných zlepšení bezporuchovosti a udržitelnosti výrobku a zajištění údržby) a postupy řízení modifikací výrobku;

- získávání a analýza údajů o poruchách, poruchových stavech a podmínkách užívání ze zkoušek a z provozu pro realizaci zpětné vazby k využívání zkušeností.

Obecně by měl plán spolehlivosti řešit přinejmenším následující oblasti:

- identifikace a popis prvků a úkolů, které se použijí,
- identifikace a popis úkolů prověrek a přezkoumání, požadovaných pro zajištění přiměřeného provádění úkolů plánu a koordinace s ostatními činnostmi,
- organizační umístění, zodpovědnost, pravomoci a vzájemný vztah osob, které řídí, provádějí a ověřují provádění úkolů,
- popis postupu při realizaci úkolů, časový popis, rozhodovací body (milníky) a kontrolní body, popis kritérií přezkoumání návrhu, ověřování a validace,
- definice zdrojů požadovaných pro včasné provedení stanovených úkolů v celém programu,
- definice případných dodávaných výrobků nebo dokumentů pro každý rozhodovací a kontrolní bod a identifikace organizace (podniku), která bude vyvíjet, vybírat a používat požadované dokumenty,
- definice systému řízení dokumentů a managementu konfigurace,
- zavedení informačních spojení mezi spolehlivostí a dalšími oblastmi pro zajištění koordinovaného přenosu platných dat,
- řízení smluvních subdodavatelů.

Při zpracování a následné realizaci plánu spolehlivosti je nutné dokumentovat jednotlivé kroky, aby bylo možné zpětně vyhodnotit účinnost a efektivnost přijatých opatření a použít tyto informace pro zpřesňování plánů spolehlivosti v budoucnosti.

4. Organizační zajištění péče o spolehlivost procesů

Problematika spolehlivosti podnikových procesů je velmi rozsáhlá a komplikovaná. Je tedy otázkou, jakým způsobem organizačně zajistit péči o spolehlivost procesů v organizaci, aby byl přístup dostatečně funkční a pokrýval celé spektrum procesů v organizaci.

Jednou z možností řešení takovýchto problematik v podniku, která je obvyklá v podnikové praxi, je ustavení řešitelského týmu, složeného z několika odborných pracovníků. Zde bych rád zdůraznil nezbytnost vhodného složení týmu - tým by měl být tvořen zkušenými pracovníky různých útvarů; předpokládám především účast středního managementu podniku. Tento přístup reprezentuje postup řešení problému „shora“ – iniciované vrcholovým vedením. Vzhledem k rozsahu a charakteru řešeného problému má takovýto postup řešení následující nevýhody:

- Procesů existuje v podniku obrovské množství – malá skupina pracovníků nemůže detailně obsáhnout všechny klíčové podnikové procesy. Na druhou stranu počet členů týmu není možno příliš zvyšovat z důvodu udržení akceschopnosti týmu.
- Detailní informace o vznikajících problémech, potenciálních hrozbách a možných zlepšovacích aktivitách mají pracovníci v první linii - pracovníci, kteří se na daném procesu přímo podílejí. Dle mého názoru tedy hrozí nebezpečí, že tým bude mít informace „z druhé ruky“ a nepronikne ke skutečné podstatě problému.

Opačnou možností je inspirovat se zlepšovateľskými aktivitami zdola - např. legendárními japonskými „Kroužky jakosti“. Tato varianta by znamenala založit celou řadu dílčích týmů, složených z pracovníků přímo se podílejících na procesech. Tento přístup reprezentuje postup řešení problému „zespodu“ – iniciované přímými účastníky podnikových procesů.

Tento postup má následující nevýhody:

- Nedostatek nadhledu – dle mého názoru hrozí nebezpečí, že řadoví pracovníci nebudou správně vnímat kontext procesního řízení celé organizace.

- Nekoncepčnost - dle mého názoru hrozí nebezpečí, že řadoví pracovníci budou mít tendenci řešit spíše dílčí problémy.
- Nedostatečná vyjednávací síla s vrcholovým vedením organizace - dle mého názoru hrozí nebezpečí, že řadoví pracovníci schopni prosadit zásadnější změny, zejména pokud budou spojeny s významnějšími náklady.

Z výše uvedených důvodů je tedy vhodné zvolit určité kompromisní řešení - dvoustupňový model péče o spolehlivost procesů:

- řešitelský tým na celopodnikové úrovni - Rada procesní spolehlivosti (dále RPS),
- dílčí týmy pro zvyšování spolehlivosti jednotlivých procesů - Pracovní skupiny spolehlivosti procesů (dále PSSP).

Rada procesní spolehlivosti

Hlavním úkolem RPS by mělo být řízení a metodické vedení jednotlivých pracovních skupin příslušných podnikovým procesům (PSSP). RPS bude koordinátorem programů zlepšování spolehlivosti podnikových procesů – bude koordinovat činnost jednotlivých PSSP. RPS bude vypracovávat programy zlepšování spolehlivosti procesů a provádět centrální vyhodnocování úspěšnosti jednotlivých zlepšovatelských akcí.

Pro úspěšné zlepšování spolehlivosti procesů je nezbytné manažerské zajištění (vymezení pravomocí, odpovědností, přidělení zdrojů atd.), aby bylo možné analýzy spolehlivosti procesů provázat s řídicími zásahy v podobě nápravných opatření k odstranění příčin identifikovaných poruch v procesech.

Manažerské zajištění znamená, že vrcholové vedení organizace musí rozhodnout o programu zvyšování spolehlivosti podnikových procesů, přidělit potřebné zdroje, nechat vypracovat směrnici, která organizačně a metodicky vymezí činnost jednotlivých týmů a jejich vzájemnou součinnost.

Do čela RPS je třeba jmenovat předsedu RPS, který bude odpovědný za plánování a realizaci programů zvyšování spolehlivosti podnikových procesů. Předseda RPS bude jmenován vrcholovým vedením a bude vybaven potřebnými pravomocemi a odpovědnostmi. Předseda RPS by měl být členem vrcholového vedení organizace, aby mohl přímo uplatňovat výsledky práce RPS na poradách vrcholového vedení organizace.

Předseda RPS by mohl přímo navrhopvat složení RPS (řešitelského týmu), aby si mohl sestavit tým lidí, dle svého uvážení. Jednotliví členové RPS budou potom jmenováni do funkce vrcholovým vedením.

Dalším nezbytným předpokladem úspěšného zlepšování podnikových procesů je zajištění přístupu k souboru potřebných informací a zajištění zpětné vazby (problémová hlášení z realizovaných procesů atd.). Teprve systematickým a dlouhodobým přístupem k problematice se zvyšování spolehlivosti procesů stává skutečně efektivním.

Práci RPS lze chápat jako týmovou. Při zdokonalování procesů by se mělo vycházet z technicko-inženýrské "kolektivní" zkušenosti - jeden pracovník sám zlepšování může jen obtížně kvalitně provádět, neboť mu chybí pohledy na problematiku z dalších profesních oblastí. Vhodné složení a zejména dobré vedení řešitelského týmu je pro systematickou práci RPS dalším z velmi důležitých předpokladů pro dosažení úspěchu v podmínkách konkrétní organizace.

Pro efektivní fungování RPS v podmínkách konkrétní organizace je potřeba realizovat následujících kroky:

1. Základní organizační zabezpečení:

- a) Vrcholové vedení organizace rozhodne o (systematickém) zlepšování spolehlivosti procesů v organizaci.
- b) Vrcholové vedení organizace jmenuje odpovědného pracovníka za oblast - předsedu RPS.

- c) Jmenovaný předseda RPS spolu s dalšími zainteresovanými pracovníky vypracuje podnikovou směrnici pro zlepšování spolehlivosti podnikových procesů, která vymezuje organizaci péče o spolehlivost procesů, režim práce, odpovědnosti a pravomoci spojené s řešením a další náležitosti, které mají charakter vazeb v příslušném systému managementu kvality organizace.
 - d) Vrcholové vedení organizace schválí podnikovou směrnici pro zlepšování spolehlivosti podnikových procesů.
2. Ustavení RPS:
- a) Jmenovaný předseda RPS, odpovědný za plánování a realizaci programů zlepšování spolehlivosti podnikových procesů, navrhne členy RPM (řešitelského týmu).
 - b) Vrcholové vedení organizace na základě návrhu předsedy RPS jmenuje členy RPS.
3. Svolání zasedání RPS:
- a) Zasedání RPS se svolává pravidelně např. v měsíčním intervalu.
 - b) Před každým svoláním RPS je přesně stanoven obsah řešené problematiky.
 - c) Je nutné dbát na to, aby se práce v týmu účastnili odborníci, kteří mohou svými poznatky a zkušenostmi přispět ke zdárnému řešení problému.
4. Průběh jednání RPS:
- a) Předseda RPS seznámí členy RPS s předmětem jednání a musí dbát na to, aby se mohli všichni členové k řešenému problému vyjádřit a shodnout se na optimalizovaném řešení problematiky.
 - b) Vlastní pracovní činnost týmu měla být organizována postupem řízeného brainstormingu.
 - c) Členové se na zasedání RPS připravují, využívají výsledků jednodušších analytických metod (např. Ishikawova diagramu), výsledků statistických metod (např. SPC, Paretovy analýzy apod.) a výsledků z řízení o neshodách v procesech.
 - d) Předseda RPS dbá, aby žádný závažný problém nebyl zapomenut.
 - e) Je nutné průběžně kontrolovat plnění úkolů, které vzešly z analýz, a údaje neustále aktualizovat opakovanými „optimalizačními“ analýzami. Pouze tak bude zlepšování spolehlivosti procesů úspěšné.
 - f) Jednání RPS je dokumentováno, vyhotovují se zápisy.
 - g) Podrobnější zásady řízení postupu musí stanovit příslušná podniková směrnice pro zlepšování spolehlivosti podnikových procesů.

Vlastní průběh zlepšovacího procesu, resp. práci v týmu, ovlivňují zejména dva zásadní faktory:

- odborná úroveň a schopnosti pracovníků,
- dostupnost, rozsah a kvalita informací.

V této souvislosti bych rád zdůraznil úlohu vzdělávání ve zlepšovacím procesu. Členy RPS proto je potřeba školit zejména v těchto oblastech:

- management kvality, nástroje managementu kvality,
- procesní management, metody analýzy a zlepšování procesů,
- teorie spolehlivosti se zaměřením na spolehlivost procesů
- a průběžně doškolovat.

Pracovní skupiny spolehlivosti procesů

Hlavním úkolem PSSP bude analyzovat spolehlivost svěřeného procesu a realizovat programy zlepšování spolehlivosti tohoto procesu.

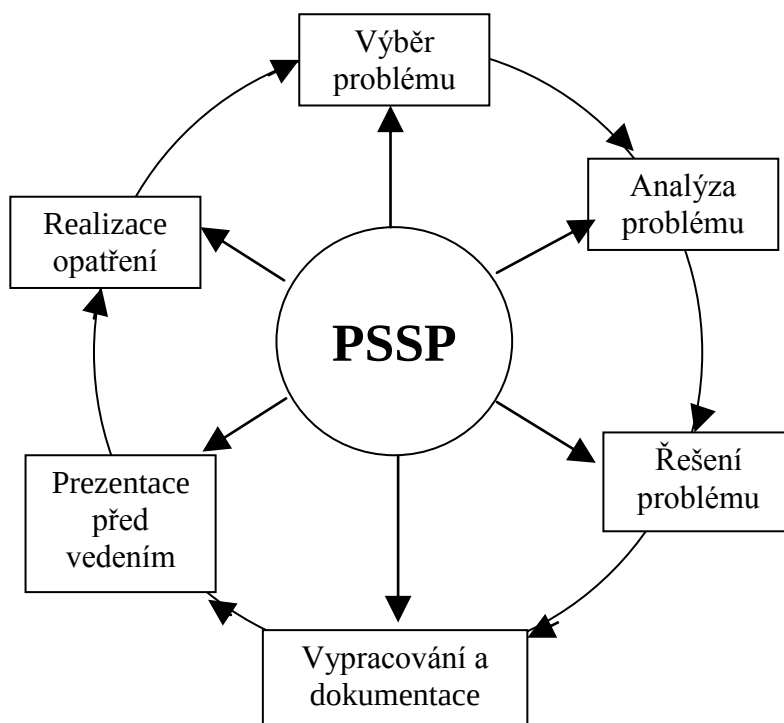
PSSP bude složena z pracovníků bezprostředně se podílejících na realizaci procesu. Vedoucím skupiny bude tzv. „majitel (vlastník) procesu“ (ve smyslu, jak jej známe z procesního managementu dle norem řady ISO 9000).

PSSP bude skupinou lidí podílejících se na témž procesu (často ze stejného pracoviště), kteří se budou scházet pravidelně jednou týdně zhruba na hodinu, resp. dle aktuální potřeby, a pod vedením majitele procesu budou řešit pracovní problémy spojené se spolehlivostí procesu, které si sami určí. Na rozdíl od japonských „kroužků jakosti“ není vhodné členství v PSSP založit jen na dobrovolnosti a identifikaci pracovníků s organizací. V českých podmínkách je vhodnější provést výběr zkušených a perspektivních pracovníků a ty nominovat do dané PSSP. Samozřejmě je nezbytné pracovníky stimulovat finančně, ale i nefinančními motivačními prostředky. Je vhodné vyvolat v podniku atmosféru, že členství v PSSP je prestižní záležitostí a členy mohou být jen ti nejzkušenější pracovníci.

Lidé v PSSP se budou učit novým technikám a rozvíjet své schopnosti a dovednosti. Týmový přístup je samozřejmostí a pomáhá vytvářet ovzduší důvěry a respektu k talentu a umu spoluzaměstnanců. PSSP by mohl být prostředek, který by dával zaměstnancům příležitost dělat něco pozitivního s problémy souvisejícími se spolehlivostí komponent procesu, se kterými se setkávají a které jím ztěžují život. PSSP jsou stejně jako „kroužky jakosti“ založeny na filozofii co nejefektivnějšího využití nejcennějšího aktiva organizace - lidí.

PSSP by, dle mého návrhu měly pracovat tak, že jejich členové vyberou problémy, které konkrétní proces nejvíce ohrožují a které se budou postupně odstraňovat. Pracovníci budou sbírat data o všech aspektech problému a podle nejlepších schopností a možností se snažit využít všech dostupných technik a nástrojů pro systematické řešení dílčích problémů. Dále je potřeba vyhodnocovat náklady na opatření, účinnost řešení a výsledky předkládat managementu podniku. Pokud dojde k schválení a je to možné, bude se realizovat řešení navržené pracovníky PSSP a budou se sledovat jeho efekty (viz schéma na obrázku č. 2)

Činnost PSSP se rovněž neobejde bez pečlivého a obezřetného plánování. Je důležité vzít v úvahu, jak se PSSP budou podílet na zdokonalování procesního managementu. PSSP budou jedním ze stavebních kamenů celkového procesního managementu. Proto je nezbytná koordinační činnost a metodické vedení Radou procesní spolehlivosti.



Obr. č. 2 – Schéma činnosti PSSP

Otázkou je, jak velké projekty budou PSSP moci řešit. Na začátku zlepšování spolehlivosti se dá předpokládat spíše řešení malých problémů. Po několika letech se členové PSSP stanou zkušenými, jejich potřeby se budou měnit a budou čím dál tím méně spokojeni s řešením pouze malých dílčích problémů.

Pro efektivní fungování PSSP je potřeba:

- Vytvořit podpůrnou atmosféru, která umožní aktivní zapojení všech zaměstnanců podílejících se na realizaci procesu do práce PSSP. Viditelná podpora a angažovanost ze strany vedení.
- Vysvětlit pracovníkům význam zvyšování spolehlivosti procesů ke zlepšování výsledků podniku a k jeho rozvoji. Jasná specifikace důvodů a cílů zavádění programů zvyšování spolehlivosti procesů.
- Dát pracovníkům pocit odpovědnosti za činnosti, které vykonávají. Rozhodnout, že budou PSSP považovány za součást normálních aktivit daného pracoviště (v pracovní době). V českých podmínkách je vhodné tyto aktivity realizovat plně v rámci fondu pracovní doby.
- Uplatňovat úctu k pracovníkům a vytvářet jim příznivé podmínky a prostředí k práci. Projevit uznání a pokud je to možné, vždy publikovat dosažené výsledky.
- Podporovat rozvoj dovedností pracovníků v oblastech analýzy a řešení problémů v oblasti procesního managementu. Zajištění adekvátního tréninku pro členy PSSP a pro ostatní, kteří budou na činnosti PSSP participovat.
- Vytvářet atmosféru „burzy nápadů“ (brainstorming).
- Zlepšovat pracovní a mezilidské vztahy na společném pracovišti a současně podporovat zlepšování oboustranné komunikace mezi všemi úrovněmi organizace.

5. Závěr

V textu byl prezentován určitý koncept přístupu k managementu spolehlivosti podnikových procesů zahrnující principiální otázky, metodický pohled i hlediska organizace péče o spolehlivost a její začlenění do struktur řízení organizace.

Literatura

- [1] BAUER, J.; KLIMEŠ, F. *Teorie managementu*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1998. 214 s. ISBN 80-01-01892-X.
- [2] ČSN EN ISO 9000:2006 *Systémy managementu kvality – Základní principy a slovník*. Praha : ČNI, 2006.
- [3] ČSN ISO 10005 *Systémy managementu kvality - Směrnice pro plány kvality*. Praha : ČNI, 2006.
- [4] ČSN EN 60300-1:2004 *Management spolehlivosti - Část 1: Systémy managementu spolehlivosti*;
- [5] ČSN EN 60300-2:2005 *Management spolehlivosti - Část 2: Směrnice pro management spolehlivosti*;
- [6] ČSN IEC 61014:2004 *Programy růstu bezporuchovosti*
- [7] ČSN EN 60300-1:2004 *Management spolehlivosti - Část 1: Systémy managementu spolehlivosti*.
- [8] MYKISKA, A. *Spolehlivost v systémech jakosti*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1995. 103 s. ISBN 80-01-01262-X.
- [9] MYKISKA, A. *Bezpečnost a spolehlivost technických systémů*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004. 206 s. ISBN 80-01-02868-2.
- [10] PLURA, J. *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*. Praha : Computer Press, 2001. 244 s. ISBN 80-7226-543-1.

DEMONSTRATIONAL SOFTWARE FOR EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS

DEMONSTRAČNÍ SOFTWARE PRO ROZDĚLENÍ EXTRÉMních HODNOT

Michal Fusek

Ústav matematiky
Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno
fusek.m@gmail.com

Abstract: *Theory of extreme value is a part of statistics which has achieved great development in recent years. There are many software packages for Matlab and R programming language which apply theory of extreme value. However, these packages are mostly intended for data analysis or solving specific problems from application areas. The presented paper tries to inform about a methodically aimed software which was created by the paper's author and provides a useful tool for graphical representations (cdf, pdf, survival function, hazard function) of the most frequently used distributions from the domains of attraction of extreme value distributions. Furthermore, this software is capable of simulating speed of convergence of the chosen distributions to the limiting distribution. The program can generate random samples from the domain of attraction of extreme value distributions, estimate parameters of the distributions by using method of maximum likelihood, construct histograms and Q-Q plots and do goodness-of-fit tests for block maxima which are created from generated samples. The results are illustrated graphically.*

Keywords: *extreme value distribution, software, simulation, speed of convergence*

Abstrakt: *Teorie extrémních hodnot je oblast statistiky, které se v poslední době věnuje mnoho autorů. Existuje řada programových balíčků využívajících teorii extrémních hodnot (např. určených pro Matlab nebo programovací jazyk R). Tyto programy ale slouží spíše pro vlastní analýzu dat s rozdělením extrémního typu nebo pro řešení konkrétních úkolů z daných aplikačních oblastí. Tento článek má za úkol informovat o autorem vytvořeném softwaru, který je zaměřen metodicky, umožňuje grafické znázornění (distribuční funkce, hustoty, funkce přežití, rizikové funkce) většiny v praxi využívaných rozdělení z oborů atraktivity daných rozdělení extrémního typu. Dále je program zaměřen na simulování rychlosti konvergence vybraných rozdělení z oborů atraktivity k danému rozdělení limitnímu. Program umožňuje provést simulaci výběrů z rozdělení z daného oboru atraktivity, odhad jeho parametrů metodou maximální věrohodnosti, konstrukci histogramů a Q-Q plotů a pro různé rozsahy výběrů provádí test dobré shody maxim bloků vytvořených ze simulovaných výběrů s rozdělením extrémního typu. Výsledky jsou průběžně graficky ilustrovány.*

Klíčová slova: *rozdělení extrémních hodnot, software, simulace, rychlost konvergence*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/47

1 Úvod

Tento článek se zabývá autorem vytvořeným demonstračním softwarem pro rozdělení extrémních hodnot. Nejdříve budou uvedeny základní poznatky z teorie extrémních hodnot (viz např. [1],[2]).

Uvažujme posloupnost nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ s distribuční funkcí F . Dále předpokládejme, že jsou dány posloupnosti reálných čísel $a_n > 0$, b_n , $n = 1, 2, \dots$ a transformovaná náhodná veličina $H_n = H_n(X_1, \dots, X_n)$ tak, že náhodná veličina $Y_n = \frac{H_n - b_n}{a_n}$ konverguje pro $n \rightarrow \infty$ v distribuci k náhodné veličině Y s limitní distribuční funkcí G . Tuto skutečnost budeme značit $\mathcal{L}(Y_n) \rightarrow G$. Je obecně známo, že pokud zvolíme $H_n = X_1 + \dots + X_n$, $a_n = \sigma\sqrt{n}$, $b_n = n\mu$, kde μ značí konečnou střední hodnotu a σ konečnou směrodatnou odchylku veličin $X_1, \dots, X_n$, pak posloupnost náhodných veličin Y_n konverguje

pro $n \rightarrow \infty$ v distribuci k náhodné veličině Y s normálním rozdělením $N(0; 1)$ (centrální limitní věta).

Teorie extrémních hodnot se zabývá jiným typem limitních vět. V tomto případě volíme $H_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$ a při vhodných konstantách a_n, b_n sledujeme, kdy limitní rozdělení náhodných veličin Y_n existuje a je nedegenerované. Lze ukázat (viz [1], [2]), že existují tři typy limitních rozdělení lišící se tvarem:

- Typ 1 (rozdělení Gumbelova typu):

$$G_X(x) = \exp \left\{ -e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- Typ 2 (rozdělení Fréchetova typu):

$$G_X(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\gamma} \right\}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

- Typ 3 (rozdělení Weibullova typu):

$$G_X(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)^{\gamma} \right\}, & x \leq \mu, \\ 1, & x > \mu, \end{cases}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ a $\gamma > 0$ jsou parametry.

Množina $\mathcal{D}(G) = \{F : \mathcal{L}(Y_n) \rightarrow G\}$ se nazývá oborem atraktivity rozdělení s distribuční funkcí G . Výchet rozdělení, která patří do oboru atraktivity jednotlivých limitních rozdělení, je uveden v tabulkách 1, 2, 3. Rozdělení byla vybrána podle [1]. Nyní již přistoupíme k popisu jednotlivých programů.

V dalších odstavcích se seznámíme s dvěma programy pro demonstraci rozdělení extrémních hodnot. Ke správné funkčnosti programů je nutný Matlab se statistickým toolboxem (testováno na verzi R2008a).

2 Program EVDgraph

Program EVDgraph (Obr. 1(a)) slouží ke grafickému znázornění rozdělení z oboru atraktivity rozdělení extrémních hodnot (Gumbelovo, Fréchetovo, Weibullovo).

2.1 Spuštění

Spustíme program Matlab a do příkazového řádku napíšeme **EVDgraph** (musíme se nacházet v adresáři s programem). Nyní přistoupíme k popisu jednotlivých částí programu.

2.2 Popis programu

Program je rozčleněn na několik částí. V sekci *Vyber rozdělení* lze zvolit jeden ze tří typů extrémálních rozdělení (Gumbelovo, Fréchetovo, Weibullovo). V závislosti na volbě se otevře podnabídka rozdělení patřících do oboru atraktivity zvoleného extrémálního rozdělení. Seznam a popis rozdělení je uveden v tab. 1 (rozdělení Weibullova typu), tab. 2 (rozdělení Gumbelova typu) a tab. 3 (rozdělení Fréchetova typu). V sekci *Parametry* se zobrazí parametry příslušné danému rozdělení, které lze podle potřeby měnit. V sekci *Rozsah na ose x* lze zvolit rozsah na ose x při vykreslování grafů. Konečně v sekci *Vyber úlohu* lze pro daná rozdělení zvolit různé úlohy, které nyní probereme podrobněji.

Rozdělení	$F(x)$	$F\left(x_* - \frac{1}{x}\right)$
Rovnoměrné	$x - x_* + 1,$ $x < x_*; x > x_* - 1$	$1 - \frac{1}{x}$ $x > 1$
Beta	$1 - \int_{x-x_*+1}^1 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du,$ $x < x_*; x > x_* - 1; p, q > 0$	$1 - \int_{1-\frac{1}{x}}^1 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$ $x > 1; p, q > 0$
Reverzní Burrovo	$1 - \left[\frac{\beta}{\beta + (x_* - x)^{-\tau}} \right]^\lambda,$ $x < x_*; \beta, \tau, \lambda > 0$	$1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x^\tau} \right)^\lambda$ $x > 0; \beta, \tau, \lambda > 0$
Extremální Weibullovo	$\exp(-(x_* - x)^\alpha),$ $x < x_*; \alpha > 0$	$\exp(-x^{-\alpha})$ $x > 0; \alpha > 0$

Tabulka 1: Rozdělení s Weibullovým oborem atraktivity, kde $x_* = \inf \{x : F(x) = 1\}$.

Vykreslit grafy:

Vykreslí zvolené funkce, tedy hustotu $f(x)$, distribuční funkci $F(x)$, rizikovou funkci $s(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ a funkci přežití $S(x) = 1 - F(x)$, vybraného rozdělení se zvolenými parametry.

Rozdělení	$F(x)$
Benktanderovo II	$1 - x^{-(1-\beta)} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x^\beta\right)$ $x \geq 1, \alpha > 0, 0 < \beta \leq 1$
Weibullovo	$1 - \exp(-\lambda x^\tau)$ $x > 0; \lambda, \tau > 0$
Exponenciální	$1 - \exp(-\lambda x)$ $x > 0; \lambda > 0$
Gama	$1 - \int_x^\infty \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \exp(-\lambda u) u^{m-1} du$ $x > 0; \lambda, m > 0$
Logistické	$1 - \frac{1}{1+\exp(x)}$ $x \in \mathbb{R}$
Lognormální	$1 - \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma u} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln u - \mu)^2\right) du$ $x > 0; \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Tabulka 2: Rozdělení s Gumbelovým oborem atraktivity.

vykreslení histogramu uložit do externího `txt` souboru a uchovat jej pro pozdější využití. Náhodná, přesněji pseudonáhodná, čísla jsou generována s využitím kvantilové funkce a pseudonáhodných čísel rovnoměrného rozdělení (inverse transform sampling). Histogram je normován tak, aby obsah plochy pod histogramem byl roven jedné.

Histogram:

Vykreslí histogram zvoleného vstupního vektoru a proloží jej hustotou daného rozdělení. Parametry zvoleného rozdělení jsou odhadovány metodou maximální věrohodnosti ze vstupního vektoru a jejich hodnoty se zobrazí v sekci *Parametry*. Program nabízí doporučené hodnoty parametrů, kde je výpočet maxima věrohodnostní funkce numericky stabilní. Nicméně se při některých specifických hodnotách parametrů, které vyžadují speciální numerické postupy kvůli nízké podmíněnosti úlohy, mohou objevit numerické obtíže.

Dále jako vstupní vektor můžeme zvolit buď náhodný výběr ze zvoleného rozdělení o rozsahu n , nebo načíst vektor z externího `txt` souboru (data ve sloupci). Pokud zvolíme vstupní vektor náhodný, program vygeneruje náhodný výběr ze zvoleného rozdělení, který je možné po

Q-Q plot:

Vykreslí Q-Q plot, který porovnává závislost teoretických kvantilů zvoleného rozdělení a empirických kvantilů vstupního vektoru. Parametry zvoleného rozdělení jsou opět odhadovány metodou maximální věrohodnosti ze vstupního vektoru a jejich hodnoty se zobrazí v sekci *Parametry*.

Samozřejmostí je možnost uložení veškerých grafických výstupů.

3 Program EVDSim

Program EVDSim (Obr. 1(b)) slouží ke grafickému znázornění rychlosti konvergence rozdělení z oboru atraktivity rozdělení extrémních hodnot k danému rozdělení limitnímu (Gumbelovo, Fréchetovo, Weibullovo).

3.1 Spuštění

Spustíme program Matlab a do příkazového řádku napíšeme **EVDSim** (musíme se nacházet v adresáři s programem). Nyní opět přistoupíme k popisu jednotlivých částí programu.

Rozdělení	$F(x)$
Paretovo	$1 - x^{-\alpha}$ $x > 0, \alpha > 0$
Zobecněné Paretovo	$1 - \left(1 + \frac{\lambda x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$ $x > 0; \lambda, \sigma > 0$
Burrovo (Typ XII)	$1 - \left(\frac{\eta}{\eta + x^\tau}\right)^\lambda$ $x > 0; \eta, \tau, \lambda > 0$
Burrovo (Typ III)	$\left(\frac{\eta}{\eta + x^{-\tau}}\right)^\lambda$ $x > 0; \eta, \tau, \lambda > 0$
F rozdělení	$1 - \int_x^\infty \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} w^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n}w\right)^{-(m+n)/2} dw$ $x > 0; m, n > 0$
Inverzní gama	$1 - \int_x^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda/w) w^{-\alpha-1} dw$ $x > 0; \lambda, \alpha > 0$
Logaritmické gama	$1 - \int_x^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{-\lambda-1} (\ln w)^{\alpha-1} dw$ $x > 1; \lambda, \alpha > 0$
Fréchetovo	$\exp(-x^{-\alpha})$ $x > 0; \alpha > 0$

Tabulka 3: Rozdělení s Fréchetovým oborem atraktivity.

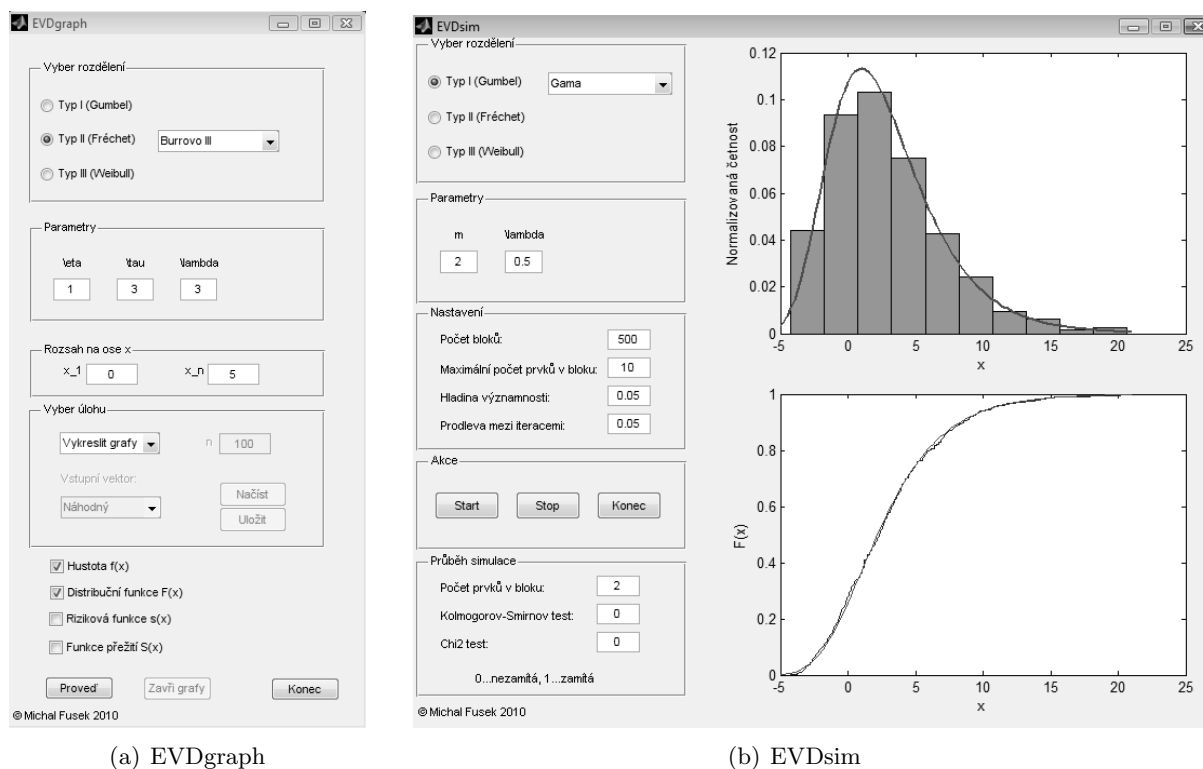
3.2 Popis programu

Program je opět rozčleněn na několik částí (sekce shodné s předchozím programem již nejsou uvedeny). V sekci *Nastavení* lze zvolit počet bloků, maximální velikost bloku (počet prvků, ze kterých se počítá maximum), hladinu významnosti pro testování hypotéz a prodlevu mezi

jednotlivými iteracemi. Sekce *Průběh simulace* informuje o velikosti bloku v dané iteraci a také o výsledcích testů dobré shody (Pearsonův χ^2 a Kolmogorovův-Smirnovův test).

Simulace délky N (počet bloků $\times$ velikost bloku) probíhá buď do doby, než dojde ke konvergenci k limitnímu rozdělení (což v tomto případě znamená, že oba testy dobré shody nezamítají hypotézu, že výběr pochází z daného limitního rozdělení, na dané hladině významnosti), anebo než je dosaženo zvolené maximální velikosti bloku. Na grafech je pak vidět případná shoda mezi normovaným histogramem a hustotou rozdělení pravděpodobností limitního rozdělení a mezi empirickou distribuční funkcí náhodného výběru a distribuční funkcí limitního rozdělení.

Konstanty a_n , b_n byly odvozeny podle [2], avšak kvůli omezenému rozsahu příspěvku nejsou uvedeny.



Obrázek 1: Demonstrační programy.

4 Závěr

Uvedené demonstrační programy umožňují uživateli získat základní představu o tvaru rozdělení extrémních hodnot a o rozděleních z jejich oborů atraktivit. Dále je možné uvedené simulační programy použít pro získání představy, jak velké musí být bloky, z nichž se počítají bloková maxima, a jaký musí být jejich počet, aby konvergence k limitnímu rozdělení extrémního typu byla dostatečně kvalitní. Takto získané představy o limitním rozdělení extrémních hodnot mohou být užitečné v praktických aplikacích (hydrologii, klimatologii apod.). Jejich použitím dostává uživatel možnost posoudit, zda rozsah jeho datového souboru je pro zamýšlený popis extrémních jevů dostatečný.

Reference

- [1] Beirlant, J.; Goegebeur, Y.; Segers, J.; Teugels, J. *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. Wiley, 2004. 522 s. ISBN 978-0-471-97647-9.
- [2] De Haan, L.; Ferreira, A. *Extreme Value Theory. An Introduction*. Springer, 2006. 421 s. ISBN 0387239464

MATHEMATICAL MODELLING OF CHOSEN LOGISTICS CHAIN PARAMETER IN MAPLE

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ VYBRANÉHO PARAMETRU LOGISTICKÉHO ŘETĚZCE V SYSTÉMU MAPLE

Zuzana Chvátalová¹, Lucie Gajdůková²

Fakulta podnikatelská, Vysoké učení technické v Brně
Kolejní 2906/4, 612 00 Brno
chvatalova@fbm.vutbr.cz; luciegajdokova@seznam.cz

Abstract: *This article deals with the using the Maple system in the mathematical modeling of logistic variables in the firm and the factors influencing these variables. The example of the chosen part of master thesis of the Faculty of Business and Management of Brno University of Technology of one of co-the authors of the paper is presented. There is mentioned the last version of Maple system in this article.*

Keywords: *Logistics, Supply Chain, Minimal Order Quantity, Setup Costs, system Maple.*

Abstrakt: *Tento příspěvek se zabývá využitím systému Maple při matematickém modelování logistických proměnných v podniku a faktory, které ovlivňují tyto proměnné. Prezentuje příklad vybrané části diplomové práce zpracované na Fakultě podnikatelské Vysokého učení technického v Brně jedním ze spoluautorů příspěvku. V tomto článku je zmíněna poslední verze systému Maple.*

Klíčová slova: *Logistika, dodavatelský řetězec, minimální množství zakázek, počáteční náklady, systém Maple.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/52

1. Úvod

Budování znalostní společnosti je globálním společenským trendem. Současné možnosti a rozšíření prostředků informačních a komunikačních technologií (v dalším ICT) provokují stále častěji k užití vědeckých výpočtů, vizualizací a simulací i v oblastech ekonomie a ekonomických teorií (dříve chápaných více jako společensko-vědní obory). V podnikové praxi pro rozhodování managementu k důležitým oporám patří modelování jevů a jejich analýzy. Jde například o finanční ukazatele pro určení výkonnosti podniku, ukazatele burzovního prostředí, optimalizaci portfolií, parametrů pro operace logistických řetězců a apod.

Matematicko-statistické modelování ekonomických jevů, ekonometrické analýzy a ekonometrické aplikace s přihlédnutím k náhodě či neurčitosti jednoznačně propojují teorii s praxí a řeší problémy interdisciplinárního charakteru. Užití pokročilých metod v ekonomii vyžaduje odborníky, kteří budou schopni nejen své vědomosti a schopnosti užívat korektně a dále je rozvíjet, ale budou disponovat i zkušenostmi a dobrou intuicí. Potřeba reflektovat tato fakta vyvstává primárně již v průběhu vzdělávání, a to nejen obsahem, ale i moderní formou podání. Fakulta podnikatelská Vysokého učení technického v Brně je dobrým příkladem toho, kdy jsou podporovány jak stálé inovace předmětů, tak kontakty školy s praxí. V roce 2010 je zpracovávám projekt FRVŠ MŠMT, č. 3186/2010¹. V rámci kontinuální aktualizace předmětů

¹Projekt FRVŠ MŠMT, č. 3186/2010 s názvem Videomanuál jako multimediální podpora inovací v předmětech matematika a matematický seminář, jehož řešitelkou je RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D., FP VUT v Brně.

a inovace prostředků ICT jeho snahou bude vytvářet základnu pro pevné usazení matematických vědomostí do budoucna, ale i pro podporu samostatnosti i práce v týmech.

V následujícím textu bude uvedena (z důvodu rozsahu příspěvku) zjednodušená ukázka postupu stanovení hladiny vybraného logistického parametru v procesu nakupování vstupního materiálu v podniku. Bude využit *počítačový systém Maple* jako příhodný uživatelský prostředek pro konstrukci a vizualizaci matematického modelu. Tento příklad byl inspirován vybranými částmi diplomové práce [1]. *Poznamenejme*, že z důvodu diskrétnosti vůči konkrétní společnosti, pro kterou byla problematika řešena, vstupní číselné údaje pro tvorbu modelu nebudeme uvádět na jejich faktických hladinách. Byť je lze chápat jako jejich „modelovou analogii“.

2. Modelování logistických parametrů podniku

Konec existence centrálně plánovaných ekonomik v 90. letech ve státech tzv. východní Evropy a transformace na tržní ekonomiku s sebou přinesly potřebu celé řady změn.

*„Logistika je proces plánování, realizace a kontroly účinného nákladově úspěšného toku a skladování surovin, zásob ve výrobě, hotových výrobků a příslušných informací z místa vzniku do místa spotřeby. Tyto činnosti mohou, ale nemusí zahrnovat služby zákazníkům, předvídání poptávky, distribuci informací, kontrolu zásob, manipulaci s materiálem, balení, manipulaci s vráceným zbožím, dopravu, přepravu, skladování a prodej.“*² Tato definice logistiky je s menšími úpravami používána CLM (Council of Logistics, dříve NC PDM) dodnes.

Nastavení parametrů v logistickém řetězci podniku hraje významnou úlohu pro jeho ekonomiku i postavení na trhu. Zaměříme se na nastavení klíčového parametru v procesu nakupování vstupního materiálu a jeho vlivu na ekonomiku v případě konkrétního podniku. Zabývejme se tedy volbou optimální velikosti minimálního objednáčím množství s ohledem na požadavky jednotlivých podnikových útvarů na velikost zásob, snižování logistických nákladů apod. a také s ohledem na možnosti dodavatele. Tyto parametry mj. ve svém důsledku významně ovlivňují náklady a objem pracovního kapitálu podniku.

Přitom snahou je užití metody, která bude nekomplikovaná a její výstup dostatečně vypovídající. Odvodíme proto jednoduchý matematický model (s využitím regresní analýzy) pomocí předdefinované procedury v knihovně *Statistics* v systému *Maple*. Volně řečeno tedy půjde o model vedoucí k odhadu „vlivu“ velikosti minimálního objednáčím množství materiálu na jeho cenu. Takový model může být dále užít kupříkladu k analýze řízení skladových zásob v podniku. Modelování reálné situace, její kvantifikace a vizualizace tak poskytnou možnost provedení celé řady analýz a získání podkladů pro rozhodování managementu podniku.

V následujícím odstavci se zabývejme krátce obecnými fakty (v souladu s [1]), která je nutno neustále reflektovat jak při tvorbě modelu, tak při interpretaci jeho výstupů.

3. Charakteristika výchozí situace

Tzv. *minimální objednáčím množství* (v dalším označme *MOQ* - Minimal Order Quantity), dodací lhůta a velikost rámcové objednávky hrají pro odběratele významnou úlohu. Povědomí o jejich hodnotách přináší evidentně důležitou primární informaci jak při řízení podniku, tak především při vzájemné komunikaci mezi odběratelem a dodavatelem. V praxi však situace bývá často komplikována právě skutečností, že konkrétní informace jsou špatně dostupné

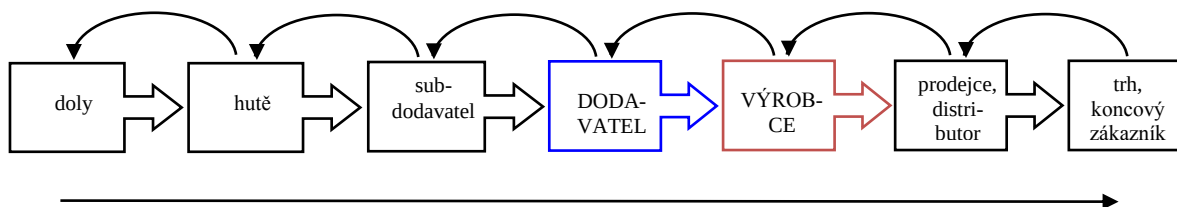
² National Council of Physical Distribution Management: Ballou, R.H. *Business Logistics Management*. Prentice-Hall Inc., New Persey, 1974.

(bývají předmětem obchodního tajemství), neúplné, nepřesné apod. (Dodavatel logicky nemá zájem na tom, aby odběratel znal výši jeho výrobních nákladů, a to z důvodu možného odkrytí jeho obchodní marže a snížení své vyjednávací pozice pro cenu dodávaného materiálu.) Při modelování je třeba citlivě zvažovat aspekty konkrétního popisovaného prostředí získané odbornou i praktickou zkušeností, analyzovat a ujasnit co nejpřesněji frekventované pojmy, správně zařadit položky aj. fakta, o které se zúčastněné strany opírají.

Snaha firem o neustálé snižování svých nákladů je předpokladem pro snižování cen svých výrobků. Potenciál ke snižování nákladů v oblasti výroby bývá většinou vyčerpán (existuje dolní limitující hranice, pod niž lze náklady stlačovat pouze na úkor vlastního zisku). Proto je účelné využívat dobrých obchodních vztahů v rámci logistického řetězce a při vzájemné spolupráci *snižovat také náklady logistické*.

Logistický řetězec (stručně) je soustava několika prvků, jimiž plyne materiálový tok a dochází v něm tak k postupné transformaci surovin v konečný výrobek, který je v konečné fázi distribuován k zákazníkovi. [4] V praxi se často nahrazuje tento pojem termínem *dodavatelský řetězec* (anglicky Supply Chain).

Zadavatel úlohy (v dalším označme VÝROBCE) je v našem případě významným tuzemským výrobcem kvalitních slitinových součástek³. Jeho logistický řetězec (materiálový tok) lze charakterizovat takto (Obr. 1):

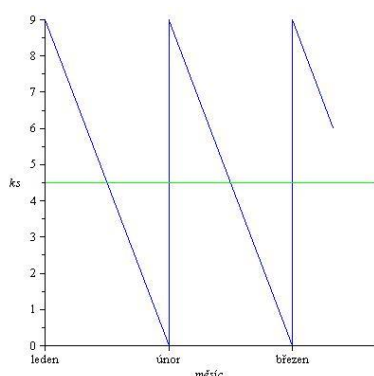


Obr. 1: Logistický řetězec
Zdroj: Zpracování v souladu s [1]

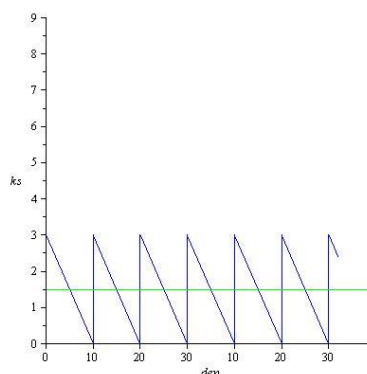
Vazba čtvrtého a pátého článku je předmětem naší pozornosti. Případ, kdy je dodavatel závislý pouze na jednom odběrateli, v praxi bývá výjimkou. V našem případě však je to skutečností, neboť uvažovaný dodavatel (v dalším označme DODAVATEL) je závislý svými prodeji na VÝROBCE 81% objemem své produkce.

Hlavním požadavkem z hlediska snížení nákladů spojených s logistickým procesem ze strany VÝROBCE je vyjednat s DODAVATELEM co nejnižší cenu materiálu tak, aby vytvořila na DODAVATELE tlak směrem ke snižování jeho vlastních výrobních nákladů, ale zároveň v takové výši, aby mu nezpůsobila krach. K odhadu ceny je nutné zjistit výši *počátečních nákladů DODAVATELE na spuštění výrobní dávky* neboli tzv. Setup Costs. Přitom je třeba reflektovat stanoviska VÝROBCE. Za Setup Costs považuje *jednorázové fixní náklady spojené se spuštěním výrobní linky za účelem výroby výrobní dávky dílů*. Ta je zpravidla shodná s MOQ (režijní náklady odstavené linky a nerealizovaná produkce, náklady na zaměstnance, kteří se starají o spuštění a nastavení výrobních linek, náklady na čas potřebný k provedení změny v nastavení linky, náklady na navedení materiálu, náklady na testovací výrobu, snížená produktivita v náběhu výroby atd.). Obecně se MOQ stanoví dohodou mezi dodavatelem a odběratelem. Jde o veličinu variabilní a její hladina závisí ze strany dodavatele na cenách materiálu, výrobní, správní a odbytové režii, ze strany odběratele na skladovacích a pořizovacích nákladech. (Poznamenejme, že skladovací náklady vzrůstají s rostoucí výší průměrných zásob. Dodací náklady / náklady na pořízení vzrůstají úměrně s cenou kupovaného materiálu v závislosti na tom, jak klesá objednávková množství a vzrůstá frekvence objednávek (Obr. 2 a Obr. 3)).

³ Z důvodu nežádoucí identifikace zadavatele úlohy nebudeme v dalším odkrývat jeho obchodní název.



Obr. 2: Průměrný stav zásob při dodávkách ve velkých množstvích



Obr. 3: Průměrný stav zásob při dodávkách v malých množstvích

Zdroj: Zpracování v souladu s [1]

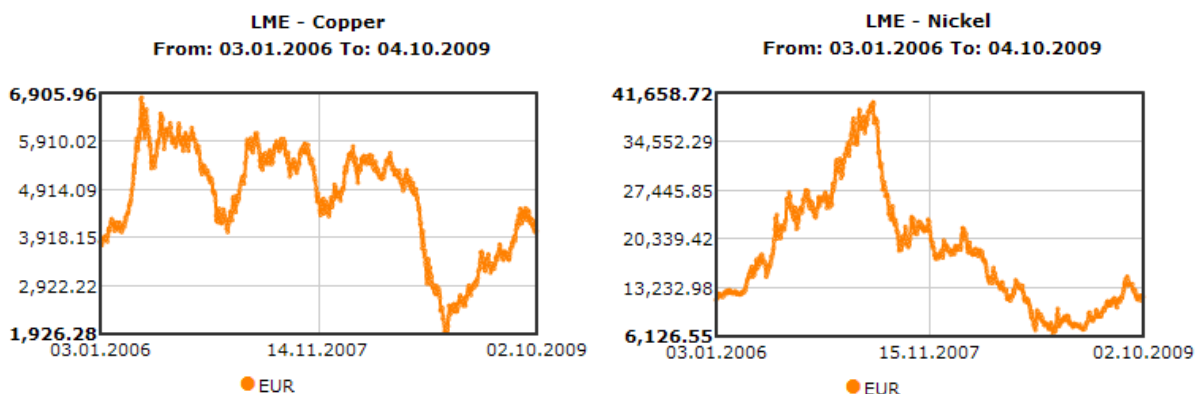
Materiálový management je významným článkem podnikového logistického řetězce. Je vystaven tlakům jak interním ze strany vlastníků a výroby, tak externím ze strany dodavatelů. Musí tak řešit i konflikty zájmu jednotlivých skupin, jak vyjadřuje Tab. 1. Je výsledkem podrobného průzkumu u VÝROBCE. Při interpretaci konstruovaného modelu je nezbytné tato fakta mít na zřeteli, stejně jako respektovat vliv různých faktorů.

Tab.1: Zájmy účastníků logistického řetězce (červená barva políčka znamená tlak na co nejvyšší hodnotu položky, modrá tlak na co nejnižší hodnotu položky, resp. směr šipky; počet šipek význam oblasti)

Zdroj: Zpracování v souladu s [1]

Skupina Aspekt	Dodavatel	Akcionáři a manage- ment	Strategic- ký nákup	Logistika, plánování	Výroba
Cena	↑↑↑↑	↓↓↓↓	↓↓↓↓	X	X
Vedlejší pořizovací náklady	X	↓	↓	↓↓↓↓	X
Dodací lhůta	↑↑↑↑	↓	↓↓	↓↓↓↓	↓
Minimální objednací množství	↑↑↑↑	↓	↑↑	↓↓↓↓	X
Skladové zásoby (u odběratele)	X	↓↓↓↓	↓	↓↓↓↓	↑
Kvalita	?	↑↑↑↑	↑↑	↑↑	↑↑↑↑
Roční spotřeba	↑↑↑↑	X	X	X	X

Objektivní faktory může VÝROBCE v našem případě ovlivnit jen minimálně. Podílejí se na ceně od počátku celého logistického řetězce prostřednictvím burzy London Metal Exchange (LME) a dalších burz kovů. Díly / materiál jsou vyhotoveny z bronzové slitiny RG5. Proto pro cenu odlitku jsou rozhodující vývoje cen mědi a niklu na světových trzích (viz Obr. 4).



Obr. 4: Vývoj cen mědi (vlevo) a niklu (vpravo) na světových trzích v letech 2006 až 2009 v EUR za tunu
Zdroj: <http://www.lme.com/>

Vytěžené surové kovy jsou zpracovávány do tvaru hutních polotovarů, v tomto případě jako profilové tyče či ingoty. Z pohledu hutních subdodavatelů polotovarů jde o nákladovou složku *LB* (tedy práce, režie a marže). Materiál (*M*) je určován prostřednictvím burzy.

Technologické faktory jsou reprezentovány především náklady na výrobu, které dále souvisejí s technologií výroby (úrovní, charakterem a kvalitou). Právě typ výrobního zařízení, které vzhledem k velikosti výrobní dávky, a tedy i vzhledem k požadované frekvenci „přenastavování“, se musejí výrobci snažit volit „pokud možno“ optimální. Zpravidla platí, že vyšší celkový objem zakázky spolu s vyššími minimálními velikostmi výrobních dávek umožní výrobci nasazení nejproduktivnějších technologií s nízkými jednicovými náklady a „rozpuštění“ nákladů na přestavení strojů do většího počtu vyrobených dílů.

Tržní faktory - silné konkurenční prostředí - mají významný vliv na cenu materiálu. Dodavatel neví s jistotou, zda a kolik dalších společností potenciální odběratel oslovil. Proto bude jeho snahou vytvořit co nejzajímavější nabídku. Proces získávání, porovnávání a vyhodnocování jednotlivých nabídek mají dnes firmy usnadněny zavedením systémů jako jsou Request for Quotations, Total Costs of Ownership, eRFQ, eAuction. Dodavatel vychází při tvorbě cenové strategie z několika cílů v souladu se strategickým plánováním podniku (zisk a jeho maximalizace, tržní podíl, růst objemu prodeje, návratnost investic, špičková kvalita výrobků a jiné cíle - více například v [2, 3]).

K *logistickým faktorům* patří především dodací lhůta (její zkracování nutí dodavatele mj. držet vysoké nevyužité kapacity; vysoké skladové zásoby, nutí dodavatele k využívání např. neefektivní dopravy) a minimální objednávkové množství (ovlivňuje mj. možnost automatizace namísto manuální práce, nasazení vysokoproduktivních automatů s dlouhým nastavovacím časem namísto rychle nastavitelných univerzálních strojů s nižší produktivitou, množstevní efekt při nákupu surovin, Setup Costs).

Lze konstatovat, že z pohledu *zásob* se u VÝROBCE již několik let zavádí systém „One Piece Flow“, jehož smyslem je mj. omezit zásoby nedokončené výroby na minimum. Tedy na každém stupni výroby se zpracovává právě jeden výrobek, a zároveň se netvoří mezioperační zásoby. Náklady na zásoby lze dělit na objednávkové náklady / pořizovací na doplnění zásob (chápeme je jako fixní), náklady na držení zásob (v případě VÝROBCE činí kapitálové náklady na držení zásob 9,5 % z jejich průměrného stavu v pořizovací hodnotě), náklady vznikající při nedostatku zásob (jde o náklady, které vznikají v situaci, kdy výrobce nemá žádané zboží na skladě a nemůže uspokojit potřeby zákazníka). Pro řízení zásob VÝROBCE využívá interně i ve vztahu ke svým dodavatelům systému PULL. Tedy principu, kdy rozpracovaný výrobek nelze předat dalšímu výrobnímu článku, dokud si jej sám „nevytáhne“.

Pro tyto účely byl vytvořen a zaveden systém Kanban (jeho základem je zavedení vztahu zákazník – dodavatel mezi jednotlivými pracovišti - každé pracoviště je zároveň zákazníkem i dodavatelem). Nevýhodou tohoto systému je riziko vzniku časových prodlev v důsledku nesouladu výrobních kapacit jednotlivých pracovišť, a v důsledku toho pak hromadění výrobků na některých pracovištích.

4. Výchozí informace a data

Z nabídky DODAVATELE a celkové reálné situace je VÝROBCEI umožněno *částečně* nahlédnout do struktury nákladů DODAVATELE prostřednictvím uvedených informací o ceně vstupního materiálu, vyrobeného odlitku a velikosti nákladů *LB*. Nabídka obsahuje tři druhy dílů / odlitků. Jejich výroba je technologicky totožná, jejich hmotnost přibližně shodná. Proto je lze považovat za srovnatelné vstupy (jako jeden výrobek pro tři různé hladiny *MOQ*, což se projeví na výši konečné ceny). Vzhledem k omezeným možnostem VÝROBCE k získání dalších dat je třeba tyto informace považovat za primární a postačující.

Tab. 2: Informace získávané z ERP systému VÝROBCE pro tvorbu matematického modelu
Zdroj: Zpracování v souladu s [1]

Druh odlitku	MOQ (ks)	Cena materiálu <i>M</i> (€)	<i>LB</i> (€)	Cena odlitku <i>P</i> (€)
A	500	0,287	1,128	1,415
B	2 000	0,287	0,839	1,126
C	16 000	0,361	0,691	1,052

Platí:

$$P = M + LB,$$

kde *P* je cena odlitku, *M* cena materiálu, *LB* Labour and Burden (práce a režijní náklady) na jednotku produkce, jejichž součástí jsou také *SetupCosts* a marže na jednotku produkce. Lze tedy psát:

$$P = M + (LB' + SetupCosts_j),$$

kde navíc *LB'* značí Labour and Burden očištěné o Setup Costs a *SetupCosts_j* jsou náklady na spuštění výroby jedné výrobní dávky vztahované na jednotku produkce.

Poznamenejme: „*SetupCosts*“ bude chápáno jako matematická veličina. „Setup Costs“ je ekonomickým pojmem.

K tvorbě matematického modelu navíc musíme (jak bylo výše zmíněno) akceptovat reálné podmínky určené empirickými zkušenostmi zadavatele – VÝROBCE. Navíc z logiky věci vyplývá fakt, že s rostoucí velikostí *MOQ* klesá cena odlitku, avšak pouze do okamžiku, kdy jsou *SetupCosts* a *LB* v objemu tržeb získaných za prodej výrobků tzv. „rozpuštěny“.

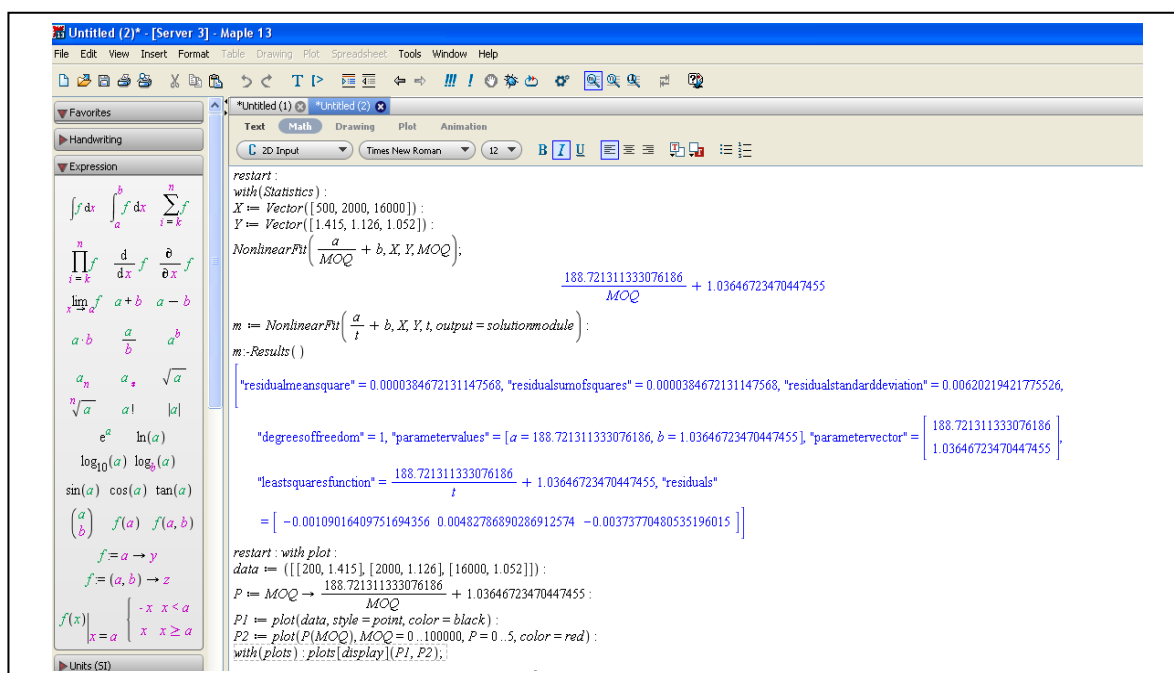
Tuto interpretaci lze matematicky popsat klesající funkcí jako závislost ceny *P* na velikosti *MOQ*, jejímž grafem je příslušná část hyperboly v prvním kvadrantu (na horizontální ose bude vynášena velikost *MOQ*, na vertikální ose cena *P* jednoho kusu odlitku). Pak tedy lze předepsat model (v analogii s výše popsány veličinami):

$$P = f(MOQ) = \frac{SetupCosts}{MOQ} + M + (LB - SetupCosts_j).$$

5. Výpočet a vizualizace modelu v Maple

Pro konstrukci příslušného modelu cestou regresní analýzy je využita zabudovaná procedura v knihovně *Statistics* v systému Maple, kde je možno spustit i určitou statistickou diagnostiku, jak lze vidět na Obr. 5 v Maple dokumentu. Užitím dalších Maple prostředků především interaktivního charakteru je model snadno graficky vizualizován (včetně bodového diagramu). Poznamenejme, že příslušné grafy jsou exportovány z Maple dokumentu do Word dokumentu (viz Obr. 6 a 7).

Upozorníme, že poslední verze systému umožňují rychlou interaktivní manipulaci a úpravy (pravým tlačítkem myši), a tak například na Obr. 6 uprostřed a vpravo pro zvýšení přehlednosti osa horizontální je převedena / obě osy jsou převedeny do logaritmického měřítka.



Obr. 5: Maple dokument – tvorba modelu

Zdroj: Vlastní zpracování

(A) Tedy jak bylo řečeno, získaný analytický předpis modelu je vyjádřen jako klesající funkce (jde pouze o první kvadrant v důsledku povahy vystupujících veličin) takto:

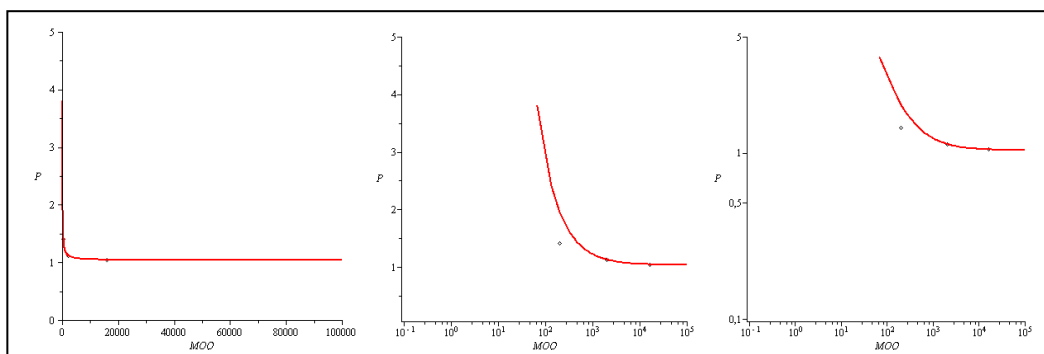
$$P = f(MOQ) = \frac{188,7213115}{MOQ} + 1,036467213.$$

Reziduální součet čtverců v případě uvedené regrese nabývá hodnoty 0.0000384672131147568 (další statistiky uvedené na Obr. 5 zde nebudeme popisovat).

Dle výše uvedené interpretace lze snadno určit:

$$SetupCosts \doteq 188,7 \text{ € a } (LB - SetupCosts_j) \doteq 1,0 \text{ €}.$$

(B) Vizualizace modelu a diskuze vzhledem ke stanovení MOQ :

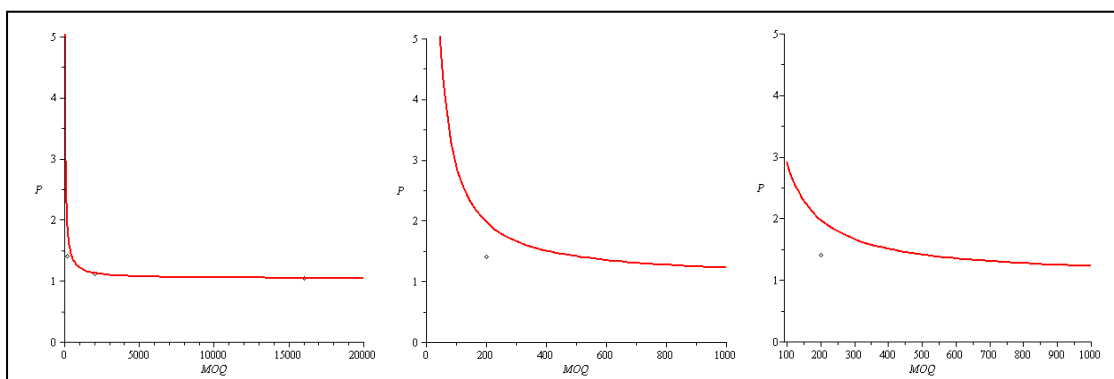


Obr. 6: Graf závislosti ceny P materiálu na velikosti MOQ při $MOQ \leq 10^5$ (vlevo), totéž v logaritmickém měřítku (uprostřed pro horizontální osu a vpravo pro obě osy) včetně bodového diagramu

Zdroj: Vlastní zpracování

Graf na Obr. 6 vlevo vykreslený v daném rozsahu není přehledný. Proto rychlou interaktivní volbou režimu logaritmického měřítka v Maple lze získat mnohem výstižnější výstupy (grafy uprostřed a vpravo). Mají tutéž vypovídací hodnotu, nicméně usnadní vytvoření konkrétnější představy o průběhu dané funkce v okolí jejího výrazně změněného charakteru. Proto je takové znázornění grafu užitečné pro interpretaci a diskusi získaných výsledků.

Je zřejmé, že v reálných podmínkách má smysl uvažovat o možném snižování MOQ pouze do takových hodnot, než začne jim odpovídající cena materiálu růst nade všechny meze. Jako hranici lze tedy považovat „koleno“ grafu ve směru „zprava doleva“.



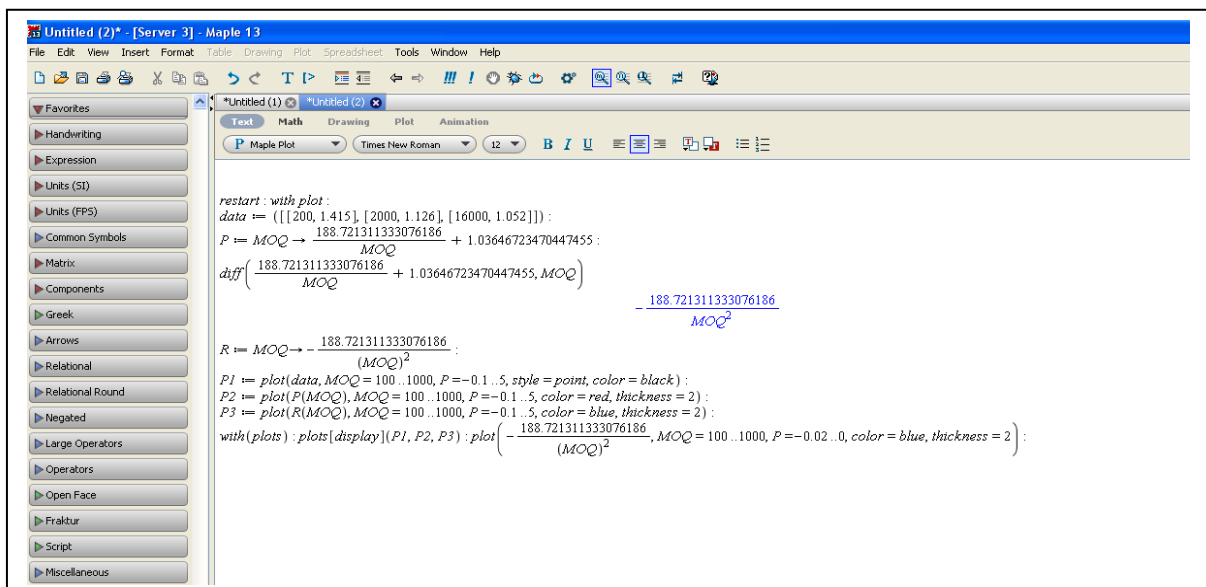
Obr. 7: Graf závislosti ceny P materiálu na velikosti MOQ na při zúžení přibližně na interval pozorovaných hodnot (vlevo), při cílené užší restrikci $MOQ \leq 10^3$ (uprostřed) a při restrikci na tzv. „koleno“ grafu pro $10^2 \leq MOQ \leq 10^3$ (vpravo) včetně bodového diagramu

Zdroj: Vlastní zpracování

Diskuze: Vizuálním i výpočtovým vyhodnocením v tomto konkrétním případě lze odhadnout a doporučit hraniční minimální objednávkové množství MOQ , a to na hladině cca 1000 ks. Tedy pro snižující se hladiny MOQ pod 1000 ks začínají náklady na pořízení materiálu výrazně růst. O intervalu cca (400; 1000) by šlo v nutném případě rovněž uvažovat pro stanovení MOQ , neboť v tomto intervalu funkce neklesá „tak rychle“ a bodový graf myšlenku lehce jednou svou hodnotou „lehce“ podporuje. Avšak pod hranici 400 by se hladina MOQ jistě neměla dostat.

(C) Zajímejme se proto v uvedeném intervalu ještě o dynamiku sledovaného jevu. Prověrme rychlost poklesu funkce derivací modelované funkce zejména pro $MOQ \in (100; 1000)$. To lze

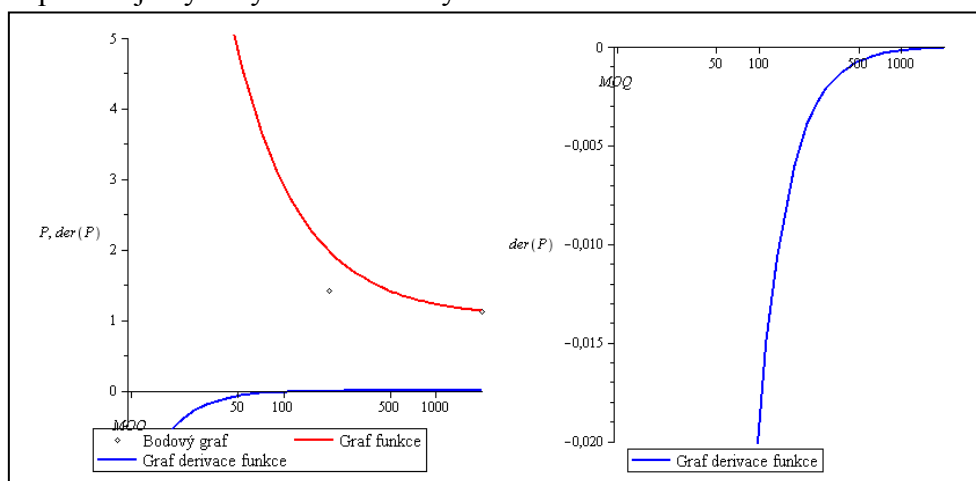
v Maple velmi rychle zjistit již z načtených, resp. vyjádřených výrazů opět užitím klikacího kalkulu (viz Obr. 8).



Obr.8: Maple dokument – derivace funkce; grafické znázornění

Zdroj: Vlastní zpracování

Pro zvýšení přehlednosti (obdobně jako tomu bylo výše na Obr. 5) grafické výstupy jsou exportovány do Word dokumentu (Obr. 9). Vlevo jsou grafy vykresleny v téže souřadnicové soustavě. Vzhledem k výrazným numerickým rozdílům hodnot funkce a hodnot její derivace je derivace vykreslena vpravo samostatně. Derivace je stále záporná: $-\frac{188.721311333076186}{MOQ^2}$ a její průběh potvrzuje výše vyslovené závěry.



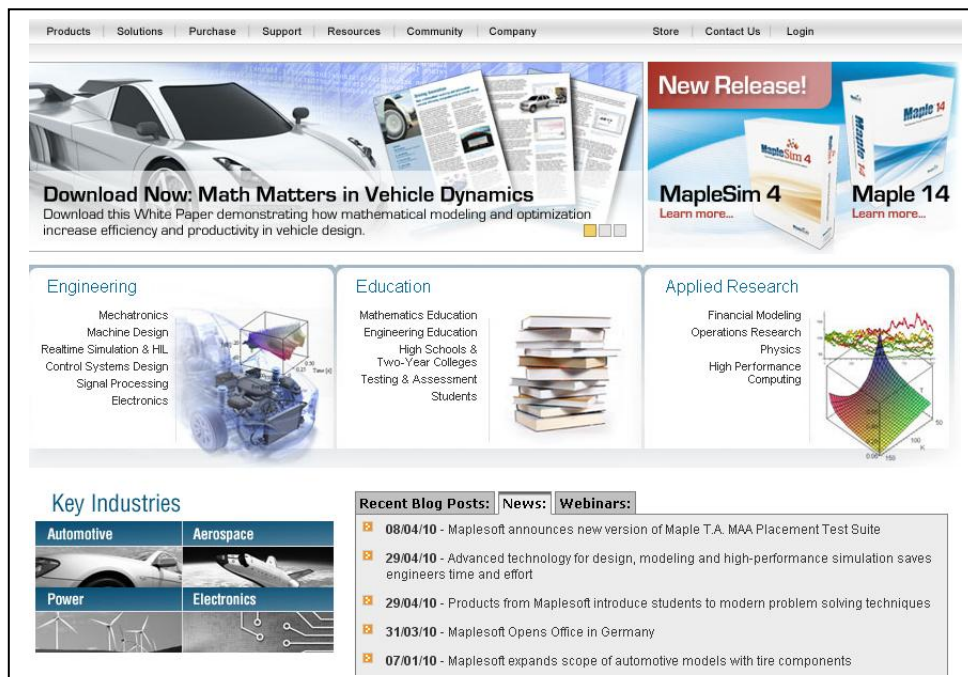
Obr. 9: Graf závislosti ceny P materiálu na velikosti MOQ intervalu (0,1000), včetně bodového diagramu a její derivace (vlevo); derivace samostatně při zjemnění měřítka na vertikální ose (vpravo)

Zdroj: Vlastní zpracování

6. Systém Maple

Systém počítačové algebry Maple není třeba představovat vzhledem ke své časté frekvenci nasazování a stále větší uživatelské oblibě. A to jak v poloze matematického vzdělávání, tak v oblastech jejích aplikací v praxi i ve sféře komerční. Kanadská společnost Maplesoft Inc.

(maplesoft.com) vyvinula v letošním roce již čtrnáctou verzi a čtvrtou verzi produktu MapleSim.



Obr. 10: Ze vstupního web-portálu společnosti Maplesoft Inc.
Zdroj: (6)

Zmíňme pouze nejvýraznější novinky verze Maple 14 uváděné na webovských stránkách podporovaných Českým klubem uživatelů Maple (CzMUG, maplesoft.cz):

Maple 14 poskytuje velké vylepšení pro práci s nástroji Maple a systémem samotným [7]:

- Maple dokument je možné spouštět programově.
- Je vylepšená práce s tabulkami.
- Je vylepšené vykreslování 2-D funkcí s nespojitostmi.
- Je zdokonalený nástroj pro zobrazování aktuálních souřadnic v 2-D obrázcích.

Tab. 3: Vybrané novinky systému Maple 14
Zdroj: [7]

Akademická sféra (pro matematiky)	Inženýrská sféra	Komerční sféra
Vytvořený MapleCloud	Vytvořený MapleCloud	Linearizační nástroje (Linearization Tools)
Výkonnější výpočetní jádro	Více nástrojů pro inženýrské a matematické aplikace	Řešiče pro algebraické Riccatiho rovnice (CARE/DARE)
Vylepšené vyhledávání	Integrace propojení se systémem MATLAB	Vylepšení Control Design Tools
Rozšíření vykreslovacího jádra	Vylepšené vyhledávání	Integrace propojení se systémem MATLAB
Nové šablony	Nové šablony	Vylepšené vyhledávání

7. Závěr

Rychlý rozvoj prostředků informačních a komunikačních technologií, internetových sítí a jiných komunikačních kanálů poskytují firmám nové možnosti uplatnění se na trhu. Firmy jsou schopny se včas informovat a rozhodovat, mají-li vybudované patřičné zázemí. Počítačový systém Maple je vhodným prostředkem pro rychlé a srozumitelné řešení řady ekonomických problémů. Reálnou situaci je však třeba dobře analyzovat v souvislostech, resp. dynamice, a to jak z kvantitativního, tak kvalitativního pohledu. Pro včasné rozhodnutí je často vhodnější matematický jednoduchý a srozumitelný než příliš komplikovaný model. Musí však korektně reflektovat ekonomické vlastnosti modelovaného jevu. Musí s ním pracovat odborník, který problematiku dobře ovládá. Na Fakultě podnikatelské Vysokého učení technického v Brně jsou vyvíjeny dobré podmínky pro to, aby posluchači získali patřičné vědomosti moderní formou, ale především širokým kontaktem s praxí během studia byli odpovědně připraveni na svou budoucnost a zaměstnanost.

Z důvodu rozsahu příspěvku byla uvedena zjednodušená ukázka matematického modelování veličin logistického řetězce podniku v návaznosti na úspěšnou diplomovou práci (podrobněji v [1]), jejíž autorka je spoluautorkou tohoto příspěvku.

Literatura:

- [1] GAJĐOKOVÁ L. *Optimalizace parametrů objednávek výrobního materiálu v podniku*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2010. 99 s. Vedoucí diplomové práce RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.
- [2] JUROVÁ M. *Obchodní logistika*. 2. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2009. 175 s. ISBN: 978-80-214-3852-1.
- [3] LAMBERT D. M. *Logistika*. 1. vydání. Praha: Computer Press, 2000. 589 s. ISBN: 80-7226-221-1.
- [4] VANĚČEK D. *Řízení dodavatelského řetězce*. 1. vydání. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Ekonomická fakulta. 2008. 150 s. ISBN 978-80-7394-078-2.
- [5] London Metal Exchange. *Market Data* [online]. 2010, [cit. 2010-01-14]. Dostupné z WWW: <<http://www.lme.com/>>.
- [6] MapleSoft.com. *Maple* [online]. 2010, [cit. 2010-08-04]. Dostupné z WWW: <http://www.maplesoft.com/maple>.
- [7] MapleSoft.cz. *Maple* [online]. 2010, [cit. 2010-08-04]. Dostupné z WWW: <<http://www.maplesoft.cz/maple>>.

Poděkování:

Tato práce byla podpořena částečně projektem FRVŠ MŠMT, č. 3186/2010 s názvem Videomanuál jako multimediální podpora inovací v předmětech matematika a matematický seminář, jehož hlavní řešitelkou je RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D., FP VUT v Brně.

Tento příspěvek je podporován Grantovou agenturou České republiky. Název projektu: Konstrukce metod pro vícefaktorové hodnocení komplexní výkonnosti společností ve vybraných odvětvích. Reg. č. P403/11/2085.

PROBABILISTIC APPROACHES TO MOBILE ROBOT NAVIGATION

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PŘÍSTUPY K NAVIGACI MOBILNÍCH ROBOTŮ

Stanislav Jančík, Jiří Dvořák, Ivo Stárek

Ústav automatizace a informatiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické Brno
Technická 2896/2, 616 69 Brno
yjanci02@stud.fme.vutbr.cz, dvorak@fme.vutbr.cz

Abstract: *The paper deals with problems of handling uncertainty in mobile robot navigation. These problems are often modeled by means of Markov decision processes. The paper makes a survey of approaches to solving these processes, and in more detail describes the method of focussed dynamic programming and a method based on AND/OR graph searching. The last part of paper presents results of computational experiments comparing both above mentioned methods.*

Keywords: *Mobile robot navigation, Markov decision processes.*

Abstrakt: *Článek se zabývá problematikou zpracování neurčitosti při navigaci mobilních robotů. Často se k tomuto účelu používají Markovské rozhodovací procesy. V článku je podán přehled přístupů k řešení těchto procesů, přičemž podrobněji je popsána metoda směrovaného dynamického programování a metoda založená na prohledávání AND/OR grafu. Na závěr jsou prezentovány výsledky výpočetních experimentů, srovnávajících obě výše uvedené metody.*

Klíčová slova: *Navigace mobilních robotů, Markovské rozhodovací procesy.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/63

1. Úvod

Navigace je jedním ze základních problémů mobilní robotiky. Jejím cílem je zajistit pohyb robotu ze startovní do cílové pozice bez kolize s překážkami. Lokální navigace se týká navigace v blízkém okolí robotu a hlavním problémem je vyhýbání se překážkám. Úkolem globální navigace je na základě mapy prostředí najít cestu ze startu do cíle bez kolize se známými statickými překážkami.

V praktických podmínkách se navigace mobilních robotů musí nějak vyrovnávat s neurčitostí, která může mít řadu příčin. Jednou z nich je neurčitost v lokalizaci pozice robotu, v důsledku které se robot může odchýlit od zamýšleného kursu. Rovněž vlastnosti akčních členů a vlastnosti povrchu mohou způsobit, že plánovaná akce skončí v jiné než očekávané pozici. Dalším zdrojem neurčitosti jsou senzory a neurčitostí může být také zatížena interpretace dat z těchto senzorů. Neurčitá může být mapa prostředí a přirozeně neurčité jsou informace o stavu dynamického prostředí.

Jako modely pro rozhodování za neurčitosti jsou v umělé inteligenci často využívány *Markovské rozhodovací procesy* (Markov decision processes, MDP), resp. *částečně pozorovatelné Markovské rozhodovací procesy* (Partially observed Markov decision processes, POMDP). Pro navigaci robotů jsou tyto procesy využity např. v pracích [3], [4], [6], [7], [9], [13].

2. Markovské rozhodovací procesy

Markovské rozhodovací procesy modelují problémy sekvenčního rozhodování zahrnující akce, které transformují aktuální stav do jednoho z několika možných následujících stavů, přičemž každý z těchto možných přechodů se může uskutečnit s jistou pravděpodobností. Formálně může být Markovský rozhodovací proces charakterizován takto: je dána konečná množina stavů S , konečná množina akcí A , pro každý stav $i \in S$ je dána množina akcí $A(i)$ dostupných v tomto stavu, přechod ze stavu i do stavu j v důsledku akce a se uskuteční s pravděpodobností $p_{ij}(a)$, přičemž $c_i(a)$ je okamžitá cena akce a ve stavu i .

Řešení MDP má tvar zobrazení $\pi: S \rightarrow A$ z množiny stavů do množiny akcí a nazývá se *strategií* (policy). Strategie je realizována zjištěním aktuálního stavu a provedením akce předepsané pro tento stav. Řešení reprezentované tímto způsobem implicitně obsahuje rozvětvení a cykly. Rozvětvení se vyskytuje v důsledku toho, že stav, jenž je stochastickým výsledkem akce, určuje další akci. K výskytu cyklu může dojít proto, že použitá strategie může vést k opětnému navštívení téhož stavu. Je-li dána strategie π a cenová funkce c , můžeme definovat hodnotu stavu i vztahem

$$V_\pi(i) = c_i(\pi(i)) + \sum_{j \in S} p_{ij}(\pi(i)) V_\pi(j) \quad (1)$$

3. Přístupy k řešení MDP

Optimální strategie může být nalezena pomocí technik dynamického programování, jako jsou iterace hodnot nebo iterace strategií.

Iterace hodnot začíná tím, že inicializuje všechny stavy horní mezí $V^{(0)}$ hodnotové funkce (uvažujeme minimalizační případ) a pak v každé iteraci aktualizuje hodnoty všech stavů podle hodnotové rovnice

$$V^{(k+1)}(i) = \min_{a \in A(i)} \left(c_i(a) + \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V^{(k)}(j) \right) \quad (2)$$

Hodnotová iterace dokazatelně konverguje k optimální hodnotové funkci. Optimální strategie pak může být získána tak, že v každém stavu se vybere akce, pro kterou je dosaženo minima hodnotové funkce.

Iterace strategií začíná z nějaké počáteční strategie $\pi^{(0)}$. V každé iteraci nejprve počítá pro aktuální strategii a všechny stavy hodnoty příslušné hodnotové funkce

$$V_{\pi^{(k)}}(i) = c_i(\pi^{(k)}(i)) + \sum_{j \in S} p_{ij}(\pi^{(k)}(i)) V_{\pi^{(k)}}(j) \quad (3)$$

a pak pro všechny stavy aktualizuje strategii podle vztahu

$$\pi^{(k+1)}(i) = \arg \min_{a \in A(i)} \left(c_i(a) + \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_{\pi^{(k)}}(j) \right) \quad (4)$$

Tento proces se opakuje, dokud se strategie mezi jednotlivými iteracemi nepřestane měnit. Iterace strategií také dokazatelně konverguje.

Metody iterace hodnot a iterace strategií mají každá svoje výhody a nevýhody. Výhodou iterace strategií je, že se získá přesná požadovaná hodnota, ale za cenu vyššího výpočetního času. Iterace hodnot naopak trvá kratší výpočetní čas, ale hodnotu získá pouze přibližnou. Přesnost této přibližné hodnoty je ovšem ve většině případů pro práci s ní dostatečná.

Problémem je, že klasické metody pro řešení MDP mají v nejlepším případě polynomiální časovou složitost a při práci s velkými stavovými prostory mohou být extrémně těžkopádné [6]. Byla navržena řada přístupů, jak redukovat výpočetní složitost. Obvykle tyto přístupy používají alespoň jednu ze dvou následujících metod. Prvá z metod omezuje množinu uvažovaných stavů pouze na ty, které jsou nezbytné pro nalezení optimálního řešení. To dovoluje ignorovat potenciálně velké oblasti prostředí a tak redukovat potřebný počet aktualizací hodnot stavů. Druhá metoda věnuje zvláštní pozornost pořadí, ve kterém jsou stavy aktualizovány, takže každá aktualizace může být co možná nejefektivnější.

Barto et al. [1] navrhli algoritmus nazvaný *Dynamické programování v reálném čase* (Real-Time Dynamic Programming, RTDP), který se pokouší omezit počet zkoumaných stavů jenom na malý zlomek celého stavového prostoru. Tento algoritmus začíná odhadem přijatelné hodnoty pro každý stav. Pak provádí sérii simulovaných průchodů prostředím, které začínají v počátečním stavu a sledují „hladovou“ strategii vzhledem k aktuálním odhadům hodnot stavů. Hodnoty stavů podél těchto průchodů jsou pak aktualizovány pomocí hodnotové rovnice. V práci [1] bylo dokázáno, že tento algoritmus konverguje k optimální hodnotové funkci na množině všech stavů dosažitelných z počátečního stavu při použití optimální strategie. Bonet a Geffner [2] zrychlili konvergenci algoritmu RTDP pomocí značkování stavů, které již plně konvergovaly (Labeled RTDP, LRTDP).

Dean et al. [5] popisují příbuznou metodu redukce stavů, nazvanou „rozšiřování obalu“ (Envelope Propagation, EP). Tato metoda začíná také odhadem přijatelné hodnoty pro každý stav stavového prostoru. Nejprve se generuje deset cest ze startu do cíle hledáním do hloubky. Pak se odstraní redundantní kroky v každé z těchto cest a vybere se nejkratší cesta. Tato cesta představuje počáteční obal, jenž je pak „zesilován“ přidáváním sousedních buněk, které mohou pomoci zvýšit šance agenta setrvat v obalu, když se pokouší sledovat strategii indukovanou touto cestou. Pak se v metodě střídají dvě fáze: rozšiřování obalu a generování strategie. Fáze rozšiřování obalu sestává z řady průchodů obalem ze startovního stavu při použití aktuální strategie. Jestliže se při průchodu vyskytne stav, který není součástí obalu, označí se jako potenciální prvek pro přidání do obalu. Po ukončení všech simulovaných běhů se do obalu přidají stavy navštívené nejčastěji. Obal je pak posilován hledáním cest z každého z těchto nových stavů zpět do obalu a přidáváním stavů na těchto cestách rovněž do obalu. Fáze generování strategie spočívá v aplikaci dynamického programování na aktuální obal s cílem najít optimální (vzhledem k obalu) strategii pro každý stav v obalu. Toto může být provedeno buď pomocí iterace strategií nebo iterace hodnot.

Hansen a Zilberstein [8] navrhli pro řešení MDP metodu LAO*, která je zobecněním metody AO* určené k heuristickému prohledávání AND/OR grafů. AND/OR graf byl navržen pro reprezentaci rozkladu problému na podproblémy. Každý uzel v takovém grafu představuje nějaký problém a následníci nějakého uzlu představují podproblémy příslušného problému. AND/OR graf obsahuje dva typy uzlů. Uzel AND je kořenem rozkladu odpovídajícího problému na podproblémy, které musejí být všechny vyřešeny (v grafickém znázornění jsou hrany vedoucí k následníkům tohoto uzlu spojeny obloučkem). Uzel OR je kořenem rozkladu na podproblémy, z nichž stačí vyřešit pouze jeden. MDP může být modelován pomocí AND/OR grafu tak že OR uzly odpovídají stavům, kdežto AND uzly představují akce (ze stavů vedou hrany do jim příslušejících akcí a z akcí směřují hrany do stavů, které mohou být výsledkem těchto akcí). Vzniklý graf ovšem na rozdíl od normálního AND/OR grafu může obsahovat cykly (loops), takže k řešení je nutné místo algoritmu AO* použít algoritmus LAO*. Tento algoritmus dokáže pracovat s cykly a stejně jako AO* může najít optimální řešení bez vyhodnocování celého stavového prostoru.

Moore a Atkeson [10] vyvinuli algoritmus zvaný *Prioritized sweeping* (PS) pro aplikaci posilovaného učení na stochastické Markovské systémy. Namísto provádění průchodů

prostředím, při nichž je každý stav aktualizován, algoritmus PS udržuje prioritní frontu a aktualizuje stavy prostředí v závislosti na jejich prioritě v této frontě. Jsou dva možné způsoby využití algoritmu PS pro plánování cesty v MDP [6]. V prvním jsou inicializovány všechny stavy přijatelnými hodnotami, prioritní fronta startovním stavem a pak se aktualizace nákladů šíří směrem od startu. Při druhém způsobu jsou inicializovány všechny stavy s výjimkou cíle nekonečnými hodnotami, prioritní fronta stavy sousedícími s cílem a aktualizace nákladů se šíří směrem od cíle (tento způsob se autorům článku [6] ukázal jako efektivnější). V obou případech algoritmus opakuje následující kroky. Stav i s maximální prioritou je vyňat z fronty a je pro něj provedena aktualizace hodnoty. Je vypočten rozdíl Δ hodnoty stavu i před a po aktualizaci a každý stav sousedící se stavem i je vložen do fronty s prioritou Δ (resp. je jeho priorita touto hodnotou nahrazena, pokud se již ve frontě vyskytuje s prioritou nižší). Tento proces se opakuje, dokud není prioritní fronta prázdná nebo dokud není dosaženo akceptovatelné řešení. Algoritmus PS směřuje výpočet do oblastí, kde se podle dosavadních zkušeností dají očekávat největší změny hodnot.

Ferguson a Stentz [6] navrhli algoritmus *Směřovaného dynamického programování* (*Focussed Dynamic Programming*, FP), vycházející z nových metod dynamického programování a z myšlenek deterministického hledání. Jejich přístup zaměřuje pozornost na nejslibnější oblasti stavového prostoru a zpracovává tyto oblasti v pořadí, které redukuje rozsah výpočtů. Tento algoritmus používá heuristiky pro omezení počtu zkoumaných stavů a směřuje aktualizace hodnot tak, že jsou prováděny co nejefektivněji. Tak jako zpětný algoritmus A* postupuje směrem od cílového stavu. Vybírá stavy k aktualizaci na základě heuristického odhadu jejich hodnoty a heuristických nákladů na dosažení počátečního stavu.

Bakker et al. [4] redukuje prohledávání stavového prostoru jeho hierarchizací. Navrhují algoritmus pro hierarchické plánování cesty pro stochastické úlohy založený na MDP a dynamickém programování. Prostedí je modelováno pomocí hierarchické soustavy map, které jsou formalizovány jako Markovské rozhodovací procesy. Tato hierarchie je řešena hierarchickou variantou iterace hodnot. Uvedený algoritmus je efektivnější než standardní dynamické programování pro „ploché“ MDP, protože redukuje stavový prostor pro všechny úrovně jeho hierarchie a dovoluje využít dříve nalezené částečné strategie. Této výpočetní přednosti je ovšem dosaženo za cenu zvýšených paměťových nároků na reprezentaci a koordinování hierarchického systému a v některých případech o něco delšími cestami do cílové pozice.

4. Metody FDP a LAO*

Algoritmus FDP [6] kombinuje dva přístupy. První využívá omezení množiny uvažovaných stavů a používá pouze ty, které jsou nezbytně nutné k nalezení optimálního řešení. Tento přístup velmi omezuje prostor uvažovaných stavů a snižuje tím výrazně celkový počet aktualizací hodnot stavů. Druhý přístup klade důraz na pořadí, v němž budou stavy aktualizovány, a tím zajišťuje optimální aktualizaci každého jednotlivého stavu. Algoritmus se koncentruje na oblasti, ve kterých dochází k největším aktualizacím hodnot. Ukázka algoritmu je uvedena v tabulce 1, kde $pred(j)$ představuje všechny možné předchozí stavy stavu j (tj. všechny stavy i , kde existovala nějaká akce a s nenulovou pravděpodobností přechodu z i do j). Stanovení hodnot funkcí G a H je popsáno v [6].

Algoritmus LAO* (*LOOP AND/OR*) [8] vychází z algoritmu AO*, určeného k prohledávání AND/OR grafů a rozšiřuje jej o řešení problému s cykly. Místo normálního AND/OR grafu je použit hypergraf, jehož uzly reprezentují stavy procesu. Z neterminálních uzlů vycházejí hyperhrany (tzv. k-spojky). Každá z nich odpovídá jedné akci a spojuje daný stav s jeho možnými následníky.

Podobně jako algoritmus AO* umožňuje i LAO* nalézt optimální řešení bez uvažování všech stavů daného procesu. To znamená, že graf G stavového prostoru není prohledávacím algoritmu explicitně dodán, ale je implicitně určen startovním stavem a funkcí pro určení následníků. Prohledávací algoritmus konstruuje explicitní graf G' , který na počátku obsahuje pouze startovní stav. Listový stav explicitního grafu se nazývá terminální, jestliže to je cílový stav, jinak se mu říká neterminální. Neterminální listový stav může být expandován tak, že se do explicitního grafu přidají z něj vycházející k -spojky (jedna pro každou akci) a všechny následné stavy, které ještě nejsou v explicitním grafu.

1. Vezmi stav j s minimální hodnotou klíče z fronty. 2. Pro každý stav $i \in \{j \cup \text{pred}(j)\}$ $V^{(k+1)}(i) := \min_{a \in A(i)} \left(c_i(a) + \sum_{j \in S} (p_{ij}(a) V^{(k)}(j)) \right)$ $\Delta := V^{(k)}(i) - V^{(k+1)}(i)$ $V^{(k)}(i) := V^{(k+1)}(i)$ Jestliže $\Delta > \varepsilon$ (i) $H(s, i) :=$ heuristická cena cesty z počátečního stavu s do stavu i. (ii) $G(i, g) :=$ heuristická cena cesty ze stavu i do cílového stavu g. (iii) $K(i) := H(s, i) + G(i, g)$ (iv) Vlož stav i do fronty s klíčovou hodnotou $K(i)$.

Tab. 1. Algoritmus FDP

1. Explicitní graf G' se skládá z počátečního stavu s. 2. Jestliže nejlepší řešení grafu obsahuje nějaký neterminální listový stav, proved': - a.) <i>Expanduj nejlepší částečné řešení:</i> Expanduj nějaký neterminální stav i nejlepšího částečného řešení a přidej všechny nové následné stavy do G'. Pro každý nový stav j přidáný do G' expanzí i proved': jestliže j je cílový stav, pak $V(j) := 0$, jinak $V(j) := h(j)$. - b.) <i>Aktualizuj ceny stavů a označ nejlepší akce:</i> i. Vytvoř množinu Z, která obsahuje expandovaný stav a všechny jeho předky v explicitním grafu podél hran označených akcí. ii. Proved' dynamické programování (iterace strategií nebo iterace hodnot) na stavech množiny Z k aktualizaci cen stavů a určení nejlepší akce pro každý stav. 3. <i>Test konvergence:</i> Pokud byla použita iterace strategií, tak pokračuj krokem 4. Jinak proved' iteraci hodnot na stavech v nejlepším grafu řešení. Pokračuj, dokud není splněna jedna ze dvou podmínek: (i) jestliže je hranice chyby nižší než ε, tak přejdi na krok 4; (ii) jestliže se nejlepší aktuální řešení změní tak, že má neexpandovaný listový stav, tak přejdi na krok 2. 4. Vráti optimální (nebo ε-optimální) graf řešení.
--

Tab. 2. Algoritmus LAO*

LAO* řeší problém prohledávání stavového prostoru postupným vytvářením grafu řešení počínaje startovním stavem. Graf částečného řešení je definován podobně jako graf řešení

s tím rozdílem, že jeho listové stavy mohou být neterminální stavy implicitního AND/OR grafu. Graf částečného řešení je definován následovně:

- startovní stav náleží do grafu částečného řešení,
- pro každý nelistový stav v grafu částečného řešení patří do tohoto grafu právě jedna výstupní k-spojka (odpovídající nějaké akci) a každý z jejich následníků také náleží do grafu částečného řešení,
- každá orientovaná cesta v grafu částečného řešení končí v listovém stavu explicitního grafu.

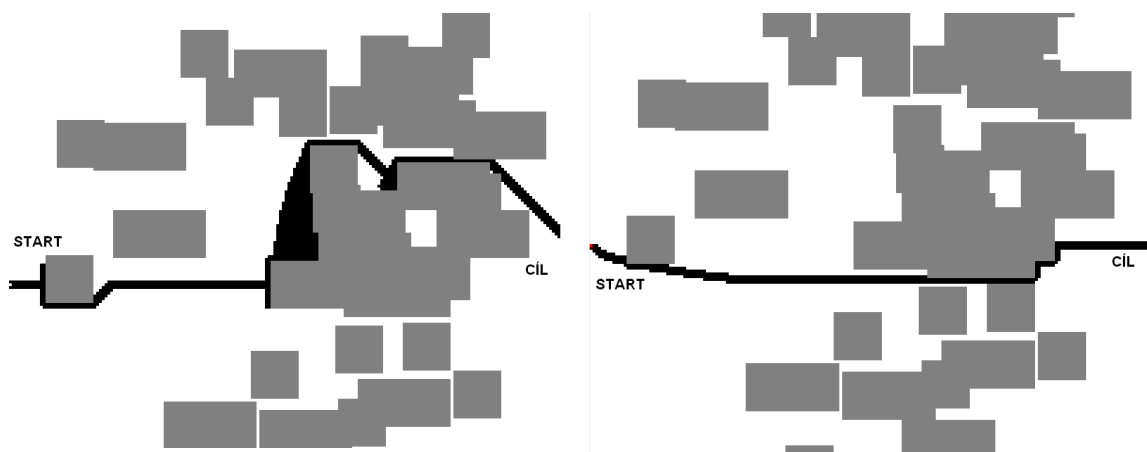
Zjednodušený popis algoritmu LAO* je uveden v tabulce 2, kde h označuje nějakou přípustnou heuristickou funkci. Hansen a Zilberstein v práci [8] prezentují také modifikaci algoritmu LAO*, kterou zde označujeme jako MLAO* a popisujeme ji v tabulce 3.

1. Explicitní graf G' na počátku obsahuje počáteční stav s .
2. *Expanduj nejlepší částečné řešení, aktualizuj ceny stavů a označ nejlepší akce:* Pokud nejlepší graf řešení obsahuje nějaký neterminální listový stav, proved' hledání do hloubky nejlepšího částečného grafu řešení. Pro každý navštívený stav i :
 - (a) Jestliže stav i není expandován, tak jej expanduj.
 - (b) Polož $V(i) := \min_{a \in A(i)} [c_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)V(j)]$ a označ nejlepší akci pro i .
3. *Test konvergence:* proved' iterace hodnot na stavech v nejlepším grafu řešení. Pokračuj dokud není splněna jedna z podmínek. (i) jestliže je hranice chyby nižší než ε , tak přejdi na krok 4; (ii) jestliže se nejlepší aktuální řešení změní tak, že má neexpandovaný listový stav, tak přejdi na krok 2.
4. Vracení ε -optimálního grafu řešení.

Tab. 3. Algoritmus MLAO*

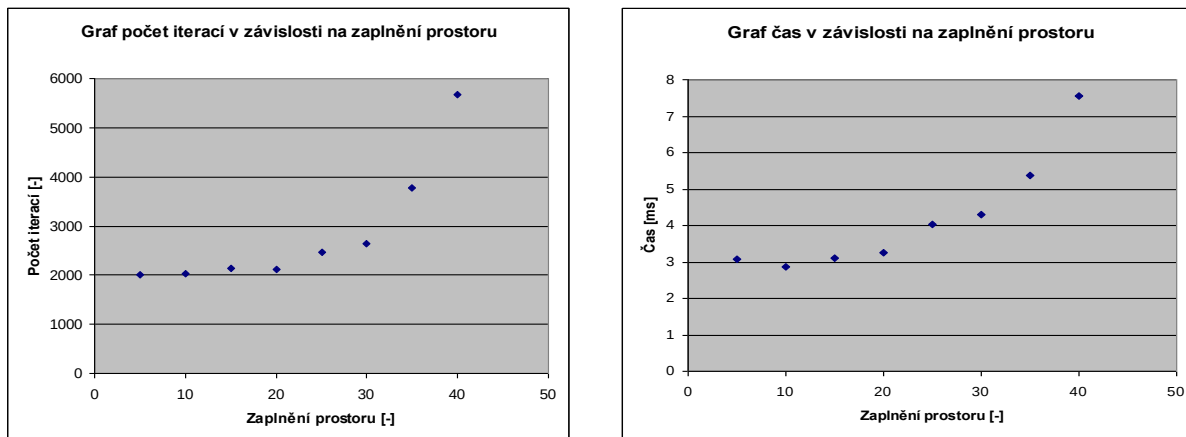
5. Výpočetní experimenty

Algoritmy FDP a MLAO* byly implementovány ve vývojovém prostředí Delphi 7 a následně byla testována jejich použitelnost pro navigaci autonomních mobilních robotů [12]. Simulační program byl navržen tak, aby v něm bylo možné nastavit typ prostředí, množství překážek a velikost překážek. Velikost simulačního prostředí byla pevně stanovená na 200×200 polí. V simulačním prostředí byl testován především algoritmus FDP a algoritmus MLAO* sloužil hlavně jako porovnávací měřítko. Byl v něm použit zjednodušený test konvergence a z toho pak vyplýval větší počet iterací potřebných k nalezení cíle.

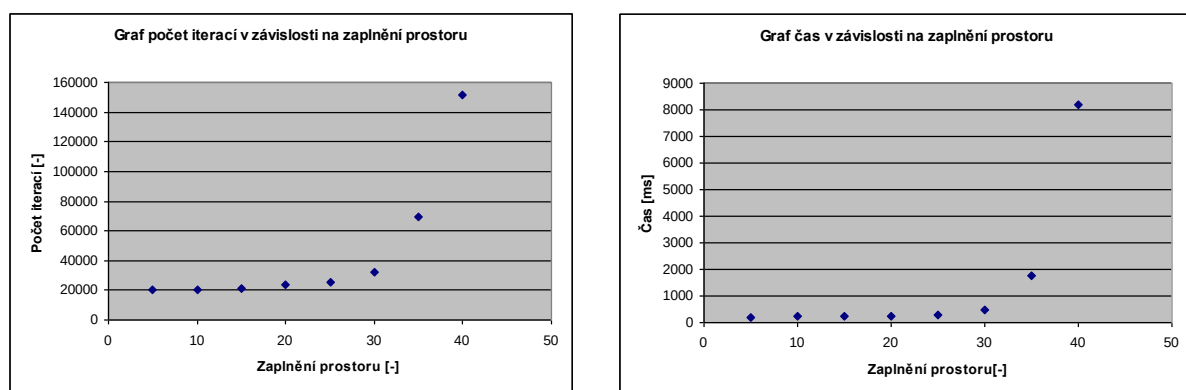


Obr. 1. Vlevo plánování cesty pomocí MLAO*, vpravo pomocí FDP

Prostředí na obr. 1 bylo náhodně vygenerováno a jednotlivé algoritmy v této vygenerované mapě hledaly cestu do cíle při tomto nastavení pravděpodobností přechodů: $P(a_s) = 0.006$, $P(a_{sv}) = 0.075$, $P(a_v) = 0.85$, $P(a_{jv}) = 0.075$, $P(a_j) = 0.006$, $P(a_{jz}) = 0.075$, $P(a_z) = 0.85$, $P(a_{sz}) = 0.075$, kde a_x označuje akci a x směr, kterým se robot pohybuje. Prahová hodnota ε byla nastavena na hodnotu 2000. Je patrné, že kratší cestu našel algoritmus FDP.



Obr. 2. Algoritmus FDP



Obr. 3. Algoritmus MLAGO*

Na obr. 2 a obr. 3 jsou zobrazeny závislosti jednotlivých algoritmů na čase a počtu iterací při různém zaplnění prostoru. Lze všimnout, že algoritmus FDP je při pětiprocentním zaplnění prostoru překážkami asi desetkrát rychlejší než algoritmus MLAGO*. Pokud je prostor zaplněn více, tak je algoritmus FDP ještě výkonnější.

6. Závěr

V článku byla popsána problematika navigace mobilních robotů využívající Markovských rozhodovacích procesů, přičemž hlavní pozornost byla věnována algoritmům FDP (směřované dynamické programování) a LAO* (algoritmus prohledávání AND/OR grafů obsahujících cykly). Ze srovnání algoritmu FDP a zjednodušené verze algoritmu MLAGO* lze podle výsledků testů označit za efektivnější algoritmus FDP. Byla otestována a ověřena jeho úspěšnost a efektivita při hledání cesty, zejména jeho menší výpočetní složitost a tím i menší potřeba času k nalezení optimálního řešení. Rozdíl ve výpočetní složitosti se projevil zejména s komplikovanějším charakterem prostředí. Důvodem vyšší efektivity algoritmu FDP je skutečnost, že neprovádí aktualizaci hodnot pro celý prostor již prozkoumaných stavů, nýbrž

se zaměřuje pouze na stav vyjmutý z prioritní fronty a stavy, jež jsou součástí okolí tohoto stavu. V dalším výzkumu se hodláme zabývat plnou implementací algoritmů LAO* a MLAO* a možnostmi jejich vylepšení.

Literatura:

- [1] BARTO, A., BRADTKE, S., SINGH, S. Learning to Act Using Real-Time Dynamic Programming. *Artificial Intelligence*, vol. 72, 1995, pp. 81-138.
- [2] BONET, B., GEFFNER, H. Labeled RTDP: Improving the Convergence of Real-Time Dynamic Programming. In *Proceedings of the International Conference on Automated Planning and Scheduling (ICAPS)*, Trento, Italy, 2003.
- [3] BATALIN, M. A., SUKHATME, G. S., HATTIG M.: Mobile Robot Navigation using a Sensor Network. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, April 26 - May 1, 2004, pp. 636-642.
- [4] BAKKER, B., ZIVKOVIC, Z., KRÖSE, B. Hierarchical Dynamic Programming for Robot Path Planning. *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005, pp. 3720-3725.
- [5] DEAN, T., KAEHLING, L., KIRMAN, J., NICHOLSON, A. Planning Under Time Constraints in Stochastic Domains. *Artificial Intelligence*, vol. 76, no. 1-2, 1995, pp. 35-74.
- [6] FERGUSON, D., STENTZ, A. Focussed Processing of MDP's Path Planning. In *Proceedings of the 16th IEEE International Conference ICTAI 2004*, 2004, pp. 310-317.
- [7] FOKA, A., TRAHANIAS, P.: Real-time Hierarchical POMDPs for Autonomous Robot Navigation. *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, 2007, pp. 561-571.
- [8] HANSEN, E., ZILBERSTEIN, S. LAO*: A Heuristic Search Algorithm that Finds Solutions with Loops. *Artificial Intelligence*, vol. 129, no. 1-2, 2001, pp. 35-62.
- [9] KOENIG, S., SIMMONS, R.G.: Xavier: A Robot Navigation Architecture Based on Partially Observable Markov Decision Process Models. In Kortenkamp, D., Bonasso, R., Murphy, R. (eds.), *Artificial Intelligence Based Mobile Robotics: Case Studies of Successful Robot Systems*, MIT Press, 1998, pp. 91-122.
- [10] MOORE, A., ATKESON, C. Prioritized Sweeping: Reinforcement Learning with Less Data and Less Real Time. *Machine Learning*, vol. 13, 1993, pp. 103-130.
- [11] MURPHY, R. (eds.), *Artificial Intelligence Based Mobile Robotics: Case Studies of Successful Robot Systems*, MIT Press, 1998, pp. 91-122.
- [12] STÁREK, I. *Plánování cesty robota pomocí dynamického programování*. Diplomová práce. FSI VUT v Brně, 2009, 53 s.
- [13] THEOCHAROUS, G., MAHADEVAN, S.: Approximate Planning with Hierarchical Partially Observable Markov Decision Process Models for Robot Navigation. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Washington, DC, May 2002, pp. 1347-1352.

Poděkování: Tato práce vznikla v rámci řešení výzkumného záměru Inteligentní systémy v automatizaci podporovaného MŠMT ČR pod registračním číslem MSM 0021630529 a projektu Simulační modelování a optimalizace řízení mechatronických soustav FSI-S-10-83.

SOFTWARE FOR CALCULATION OF SYSTEM FUZZY RELIABILITY BY MEANS OF FJK – ALGORITHM

SOFTWARE PRO VÝPOČET FUZZY SPOLEHLIVOSTI SOUSTAV S VYUŽITÍM FJK – ALGORITMU

Zdeněk Karpíšek, Karel Martišek

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno
karpisek@fme.vutbr.cz, kmartisek@email.cz

Abstract: *The paper describes PC software for calculating of fuzzy reliability of a combined system of independent elements with a Weibull-fuzzy-distributed time to failure. A computer program has been written to calculate fuzzy reliability using an FJK-algorithm. The results can be applied to determining the reliability of real objects in cases where the time to failure data are of a vague numerical type.*

Keywords: *fuzzy probability distribution, fuzzy reliability, reliability of system, Weibull distribution, FJK-algorithm*

Abstrakt: *V článku je popsán PC software pro výpočet fuzzy spolehlivosti kombinovaného systému nezávislých prvků, které mají Weibullovo fuzzy rozdělení pravděpodobnosti doby do poruchy. Metoda výpočtu fuzzy spolehlivosti systému je založena na tzv. FJK-algoritmu. Software může být použit pro určení spolehlivosti reálných systémů, jestliže pozorované doby do poruchy prvků systému mají stochastický vágní numerický charakter.*

Klíčová slova: *fuzzy rozdělení pravděpodobnosti, fuzzy spolehlivost, spolehlivostní systém, Weibullovo rozdělení, FJK-algoritmus*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/71

1. Úvod

Při sledování provozní spolehlivosti systémů a jejich prvků se často setkáváme s různě nepřesnými informacemi o dobách do poruchy i podmínkách provozu. Ze zdrojů nepřesnosti lze zejména uvést: záměrné zkreslení údajů uživatelem anebo výrobcem, nízká úroveň nebo zkušenost obsluhy, nevhodná údržba, neúplné sledování výrobku v provozu, konstrukční změny výrobku a vliv provozních podmínek. Jednotlivé údaje s různou věrohodností o dobách do poruch i dobách oprav můžeme vyjádřit pomocí **fuzzy reálných čísel**. Tento přístup umožňuje modelovat spolehlivost objektu (systému i jeho prvků) pomocí **fuzzy spolehlivosti**. Takový model sice nevede ke zpřesnění výsledných informací, ale dovoluje posoudit hodnoty sledovaných charakteristik v celém možném rozsahu včetně stupňů příslušnosti jejich jednotlivých hodnot jako měř jejich věrohodnosti.

2. Fuzzy spolehlivost s Weibullovým fuzzy rozdělením pravděpodobnosti

Fuzzifikace klasického dvoustavového spolehlivostního modelu objektu bez obnovy je založena na předpokladu, že doba bezporuchového provozu objektu je fuzzy náhodná veličina $\underline{T}$ nabývající hodnot $t \in [0; +\infty)$, která má fuzzy rozdělení pravděpodobnosti $(\underline{T}, \underline{F})$, kde $\underline{F}(t)$ fuzzy distribuční funkce je fuzzy svazek distribučních funkcí [1], [2], [3], [6]. Tento model respektuje jednak neurčitost času t přechodu od bezporuchového stavu objektu do poruchového stavu, jednak vágnost rozdělení pravděpodobnosti doby bezporuchového stavu.

Fuzzy funkce spolehlivosti (fuzzy spolehlivost) je pro $\forall t \in [0; +\infty)$ fuzzy pravděpodobnost

$$\tilde{R}(t) = \tilde{P}(\tilde{T} \geq t) = 1 \ominus \tilde{F}(t),$$

kde $\tilde{F}(t)$ je fuzzy distribuční funkce. Zřejmě $\tilde{R}(0) = 1$ a $\tilde{R}(+\infty) = 0$.

Fuzzy intenzita je fuzzy funkce

$$\tilde{\lambda}(t) = ([0; +\infty); \mu_{\tilde{\lambda}}),$$

kde

$$\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = \sup_{\substack{F \\ \frac{f}{1-F} = \lambda}} \mu_F(F) \text{ pro } \forall t \in [0; +\infty).$$

Fuzzy střední doba do poruchy je fuzzy střední hodnota $\tilde{E}(\tilde{T})$ fuzzy náhodné veličiny $\tilde{T}$ a

$$\tilde{E}(\tilde{T}) = \int_0^{+\infty} \tilde{R}(t) dt = ([0; +\infty); \mu_{\tilde{E}(\tilde{T})}),$$

kde

$$\mu_{\tilde{E}(\tilde{T})}(t^*) = \sup_{\substack{F \\ \int_0^{+\infty} R(t) dt = t^*}} \mu_F(F).$$

„Obyčejná“ náhodná veličina T s **dvoupametrickým Weibullovým rozdělením pravděpodobnosti** $W(b, \delta)$, kde $b > 0$ je parametr tvaru, $\delta > 0$ je parametr měřítka a $t \in [0; +\infty)$, má tyto funkční a číselné charakteristiky:

$$\text{distribuční funkce } F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^b\right],$$

$$\text{funkce spolehlivosti } R(t) = 1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^b\right],$$

$$\text{intenzita } \lambda(t) = \frac{b}{\delta} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{b-1},$$

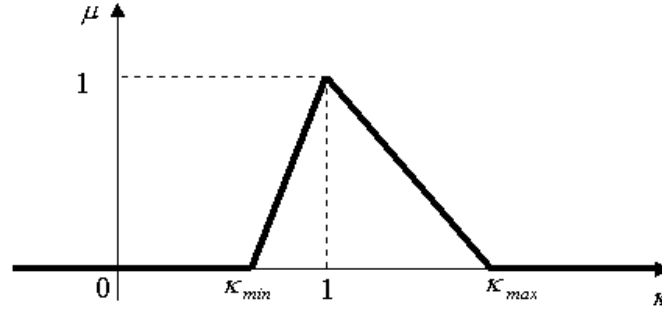
$$\text{střední hodnota } E(T) = \delta \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right), \text{ kde } \text{gama funkce } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} \exp(-y) dy,$$

$$\text{P-kvantil } t_p = \delta [-\ln(1 - P)]^{\frac{1}{b}} \text{ pro } P \in [0; 1).$$

Náš model fuzzy spolehlivosti je založen na předpokladu, že hodnoty fuzzy náhodné veličiny $\tilde{T}$ jsou fuzzy čísla $\tilde{t} = ([0; \infty), \mu_{\tilde{t}})$ a $\tilde{t} = \kappa t$, kde t je pozorovaná hodnota náhodné veličiny T a κ je tzv. **koeficient nepřesnosti**. Tento koeficient je trojúhelníkové reálné fuzzy číslo $\kappa = ([0; \infty), \mu_{\kappa})$ s hlavní hodnotou (jádro) $\kappa = 1$ a funkcí příslušnosti

$$\mu_{\kappa}(\kappa) = \begin{cases} \frac{\kappa - \kappa_{\min}}{1 - \kappa_{\min}}, & \kappa \in [\kappa_{\min}; 1], \\ \frac{\kappa - \kappa_{\max}}{1 - \kappa_{\max}}, & \kappa \in [1; \kappa_{\max}], \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde $0 < \kappa_{\min} \leq 1 \leq \kappa_{\max}$, a hraniční hodnoty $\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$ jsou určeny expertně. Na obr. 1 je graf $\mu_{\kappa}(\kappa)$.



Obr. 1: Funkce příslušnosti koeficientu nepřesnosti κ

Jestliže náhodná veličina T má Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti $W(b, \delta)$, pak odpovídající fuzzy náhodná veličina $\tilde{T}$ s **Weibullovým fuzzy rozdělením pravděpodobnosti** $\tilde{W}(b, \delta)$ má následující fuzzy charakteristiky.

Pro $\forall t \in [0; \infty)$ **fuzzy distribuční funkce**

$$\tilde{F}(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\kappa \delta} \right)^b \right],$$

takže pro $\forall \alpha \in [0; 1]$ α -řezy fuzzy distribuční funkce jsou

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(t) &= [F_{1\alpha}(t); F_{2\alpha}(t)] = \\ &= \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta[(1 - \kappa_{\max})\alpha + \kappa_{\max}]} \right)^b \right]; 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta[(1 - \kappa_{\min})\alpha + \kappa_{\min}]} \right)^b \right] \right]. \end{aligned}$$

Pro $\forall t \in [0; \infty)$ **fuzzy funkce spolehlivosti**

$$\tilde{R}(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\kappa \delta} \right)^b \right],$$

takže pro $\forall \alpha \in [0; 1]$ α -řezy fuzzy funkce spolehlivosti jsou

$$\begin{aligned} R_{\alpha}(t) &= [R_{1\alpha}(t); R_{2\alpha}(t)] = \\ &= \left[\exp \left[- \left(\frac{t}{\delta[(1 - \kappa_{\min})\alpha + \kappa_{\min}]} \right)^b \right]; \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta[(1 - \kappa_{\max})\alpha + \kappa_{\max}]} \right)^b \right] \right]. \end{aligned}$$

Pro $\forall t \in [0; \infty)$ *fuzzy intenzita*

$$\lambda(t) = \frac{bt^{b-1}}{(\kappa\delta)^b},$$

takže pro $\forall \alpha \in [0; 1]$ α -řezy fuzzy intenzity jsou

$$\lambda_\alpha(t) = [\lambda_{1\alpha}(t); \lambda_{2\alpha}(t)] = \left[\frac{bt^{b-1}}{(\delta[(1-\kappa_{\max})\alpha + \kappa_{\max}])^b}; \frac{bt^{b-1}}{(\delta[(1-\kappa_{\min})\alpha + \kappa_{\min}])^b} \right].$$

Fuzzy střední hodnota fuzzy náhodné veličiny T je trojúhelníkové fuzzy číslo

$$\tilde{E}(T) = \kappa\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right),$$

kde

$$\mu_{\tilde{E}(T)}(t) = \begin{cases} \frac{t - \kappa_{\min}\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)}{(1 - \kappa_{\min})\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)}, & t \in \left[\kappa_{\min}\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right); \delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)\right], \\ \frac{t - \kappa_{\max}\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)}{(1 - \kappa_{\max})\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)}, & t \in \left[\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right); \kappa_{\max}\delta\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)\right], \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Fuzzy P-kvantil fuzzy náhodné veličiny T je pro $\forall P \in [0; 1)$ trojúhelníkové fuzzy číslo

$$t_P = \kappa\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}},$$

kde

$$\mu_{t_P}(t) = \begin{cases} \frac{t - \kappa_{\min}\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}}{(1 - \kappa_{\min})\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}}, & t \in \left[\kappa_{\min}\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}; \delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}\right], \\ \frac{t - \kappa_{\max}\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}}{(1 - \kappa_{\max})\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}}, & t \in \left[\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}; \kappa_{\max}\delta[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{b}}\right], \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

3. FJK-algoritmus výpočtu fuzzy spolehlivosti kombinovaného systému

Pro výpočet fuzzy spolehlivosti kombinovaného systému vzájemně nezávislých prvků byl zobrazen **JK-algoritmus** výpočtu spolehlivosti systému založený na spojení *metody seznamu* a *metody cest* [4].

Metoda seznamu je založena na sestavení množiny všech možných logických událostí v systému, které pak slouží k vlastnímu výpočtu spolehlivosti systému pomocí disjunktních náhodných jevů. Cestou v orientovaném grafu v našem případě rozumíme posloupnost hran odpovídajících prvkům systému, které spojují uzly mezi vstupním a výstupním uzlem grafu.

Předpokládáme, že spolehlivostní systém A je vyjádřen pomocí prostého acyklického orientovaného grafu s **maticí sousednosti** $\mathbf{A} = (a_{kl})_{k,l=1}^m$, kde hrana a_{kl} z uzlu k do uzlu l

odpovídá prvku systému A_i . Jestliže jsou uzly k a l spojeny hranou, klademe $a_{kl} = 1$ a v opačném případě $a_{kl} = 0$. Jestliže graf systému není prostý (systém obsahuje paralelní subsystém), můžeme jej transformovat na prostý např. **zúžením** nebo **půlením** paralelních hran [4]. Označme 1 **vstupní uzel** a m **výstupní uzel** grafu. Platí, že $1 \leq m-1 \leq n \leq (m-1)m/2$.

Pro výpočet fuzzy spolehlivosti systému A vzájemně nezávislých prvků předpokládáme, že prvky systému A_i mají známé fuzzy spolehlivosti $R_i(t)$ s α -řezy $R_{i\alpha}(t) = [R_{i\alpha 1}(t); R_{i\alpha 2}(t)]$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha \in [0, 1]$. Fuzzy spolehlivost kombinovaného systému A můžeme v libovolném čase $t \in [0; \infty)$ určit postupnou realizací kroků tzv. **FJK – algoritmu**:

1. Vygenerujeme seznam všech možných stavů prvků daného systému ve formě matice $\mathbf{V}$ typu $(2^n, n)$, jejíž řádky tvoří všechny variace n -té třídy s opakováním z dvouprvkové množiny $\{0;1\}$ (jde vlastně o dvojková čísla od 0 do $2^n - 1$).
2. Pro každou variaci stavů prvků vypočteme pomocí algebraického doplňku D_{m1} matice $\mathbf{D} = \mathbf{E} - \mathbf{A}$, kde $\mathbf{E}$ značí jednotkovou matici, stav systému $S_j = \text{sgn}(D_{m1})$, $j = 1, \dots, 2^n$, přičemž za prvek a_{kl} matice sousednosti $\mathbf{A}$ dosadíme hodnotu stavu odpovídajícího prvku A_i z matice $\mathbf{V}$.
3. Určíme α -řez $R_\alpha(t)$ fuzzy spolehlivosti systému $R(t)$ v čase t pomocí α -řezů $R_{i\alpha}(t)$ fuzzy spolehlivostí $R_i(t)$ jednotlivých prvků, $i = 1, \dots, n$, a stavu systému $S_j = \text{sgn}(D_{m1})$, $j = 1, \dots, 2^n$, užitím vzorce

$$R_\alpha(t) = [R_{\alpha 1}(t); R_{\alpha 2}(t)] = \left[\sum_{j=1}^{2^n} \left\{ S_j \prod_{i=1}^n \left[(1 - R_{i\alpha 1}(t))^{1-A_i} (R_{i\alpha 1}(t))^{A_i} \right] \right\}; \sum_{j=1}^{2^n} \left\{ S_j \prod_{i=1}^n \left[(1 - R_{i\alpha 2}(t))^{1-A_i} (R_{i\alpha 2}(t))^{A_i} \right] \right\} \right],$$

kde klademe $0^0 = 1$.

Ze získaných α -řezů $R_\alpha(t)$ pak můžeme vypočítat další funkční a číselné fuzzy charakteristiky spolehlivosti daného systému, např. pro uvedené Weibullovo fuzzy rozdělení pravděpodobnosti jeho prvků

4. Software Fuzzy spolehlivost soustav

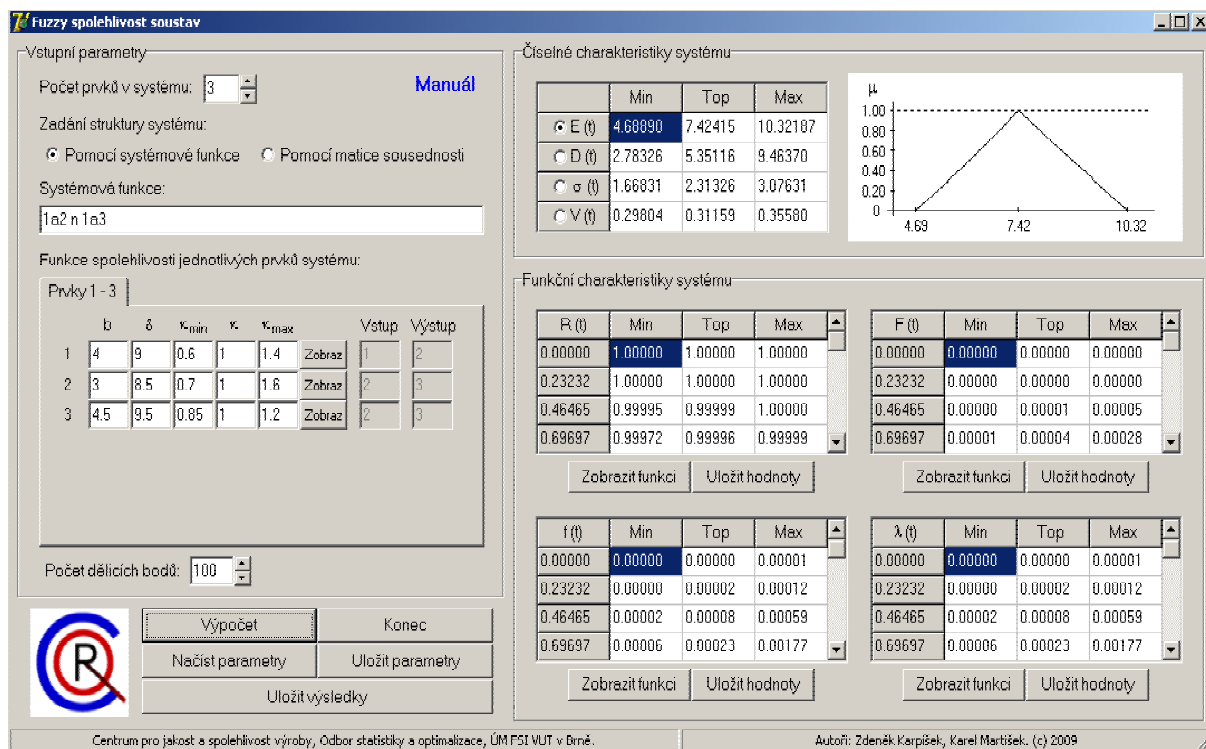
Software Fuzzy spolehlivost soustav provádí na základě implementace FJK-algoritmu výpočet základních číselných a funkčních fuzzy charakteristik kombinovaného systému vzájemně nezávislých prvků, jejichž spolehlivost se řídí Weibullovým fuzzy rozdělením.

4.1. Vstupní údaje

Vstupní údaje o systému prvků, které uživatel zadává, jsou:

- počet prvků systému n ,
- struktura systému
- parametry fuzzy funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků systému,
- počet dělicích bodů pro numerický výpočet funkčních fuzzy charakteristik.

Základní uživatelské rozhraní je zobrazeno na obr. 2.



Obr. 2: Základní uživatelské rozhraní

Počet prvků systému lze zadat v rozmezí 2 až 18. Podle zadaného čísla se zobrazí odpovídající počet řádků pro vložení parametrů fuzzy funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků systému. Všechny vstupní parametry je možné rovněž načíst z textového souboru.

Strukturu systému lze zadat pomocí systémové funkce nebo pomocí matice sousednosti.

Systémová funkce je souhrn všech cest v systému. Jednotlivé cesty musí být od sebe odděleny trojicí znaků ‘mezera’, ‘n’ a ‘mezera’. Cesta je posloupnost čísel jednotlivých prvků (oddělených znakem ‘a’), která při bezporuchovém stavu uvedených prvků zaručuje bezporuchový stav celého systému. Takto vytvořená systémová funkce se запиše do příslušného pole.

Při popisu struktury systému pomocí **matice sousednosti** grafu systému je nutné nejdříve sestavit příslušný orientovaný graf systému, ve kterém hrany grafu odpovídají jednotlivým prvkům systému. Každé hraně se přiřadí vstupní a výstupní uzel a tyto uzly se očíslovají. Vstupní uzel grafu musí mít vždy číslo 1 a výstupní uzel grafu musí mít vždy nejvyšší číslo v grafu. Matice sousednosti grafu systému se nezadáva přímo. Stačí pouze zapsat do odpovídajících polí ke každému prvku systému číslo jeho vstupního uzlu a výstupního uzlu. Číslo vstupního uzlu musí být vždy menší než číslo výstupního uzlu.

Software Fuzzy spolehlivost soustav pracuje s prvky, jejichž funkce spolehlivosti mají Weibullovo fuzzy rozdělení. Pro každý prvek je tedy třeba zadat **parametr tvaru** b a **parametr měřítka** δ . Parametr měřítka je pak fuzzifikován pomocí **koeficientu nepřesnosti** κ zadáním jeho mezí $\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$, kde $0 < \kappa_{\min} \leq 1 \leq \kappa_{\max}$.

Pomocí tlačítka **Zobraz** je možné vykreslit jednotlivé funkční fuzzy charakteristiky pro všechny prvky systému (viz oddíl 4.4).

Počet dělicích bodů lze zadat v rozmezí 10 až 500 (s krokem 10). Program na základě fuzzy funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků systému navrhne vhodný čas t , pro který se budou všechny výstupní funkční fuzzy charakteristiky vykreslovat. Pro vlastní numerický

výpočet je pak tento časový interval rozdělen na příslušný počet subintervalů podle zadaného počtu dělicích bodů.

4.2. Ovládací tlačítka

Funkce jednotlivých ovládacích tlačítek jsou následující:

- **Výpočet** – provede kontrolu vstupních dat a poté výpočet fuzzy charakteristik systému.
- **Uložit výsledky** – uloží kompletní vstupní i výstupní data do textového souboru.
- **Uložit parametry** – uloží parametry fuzzy funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků pro možnost pozdějšího načtení.
- **Načíst parametry** – načte parametry fuzzy funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků z textového souboru, který byl vytvořen pomocí tlačítka *Uložit parametry*.
- **Konec** – ukončí program.

4.4. Výstupní data

Výstupem programu jsou jednotlivé číselné a funkční fuzzy charakteristiky zadaného systému.

Číselné charakteristiky jsou:

- fuzzy střední hodnota $E(t)$,
- fuzzy rozptyl $D(t)$,
- fuzzy směrodatná odchylka $\sigma(t)$,
- fuzzy variační koeficient $V(t)$.

Každá číselná charakteristika je fuzzy reálné číslo, které se zobrazí v grafu vpravo. Tabulka pak obsahuje jádro a meze pro jednotlivá fuzzy čísla. Pomocí přepínačů v prvním sloupci lze zvolit, která číselná charakteristika je právě zobrazena. Hodnoty z grafu lze rovněž odečítat pomocí pohybu kurzoru myši.

Funkční charakteristiky jsou:

- fuzzy funkce spolehlivosti $R(t)$,
- fuzzy distribuční funkce $F(t)$,
- fuzzy hustota pravděpodobnosti $f(t)$,
- fuzzy intenzita poruch $\lambda(t)$.

Každá tabulka obsahuje pouze základní hodnoty příslušné funkční fuzzy charakteristiky pro jednotlivé dělicí body. Tlačítkem **Uložit hodnoty** je možné uložit podrobný výpis hodnot do textového souboru.

Stisknutím tlačítka **Zobrazit funkci** dojde k podrobnému vykreslení příslušné funkční fuzzy charakteristiky v nově otevřeném okně (viz oddíl 4.4).

4.4. Zobrazení funkčních fuzzy charakteristik

Všechny funkční fuzzy charakteristiky, jak jednotlivých prvků, tak celého systému, lze podrobně zobrazit ve zvláštním okně (viz obr. 3).

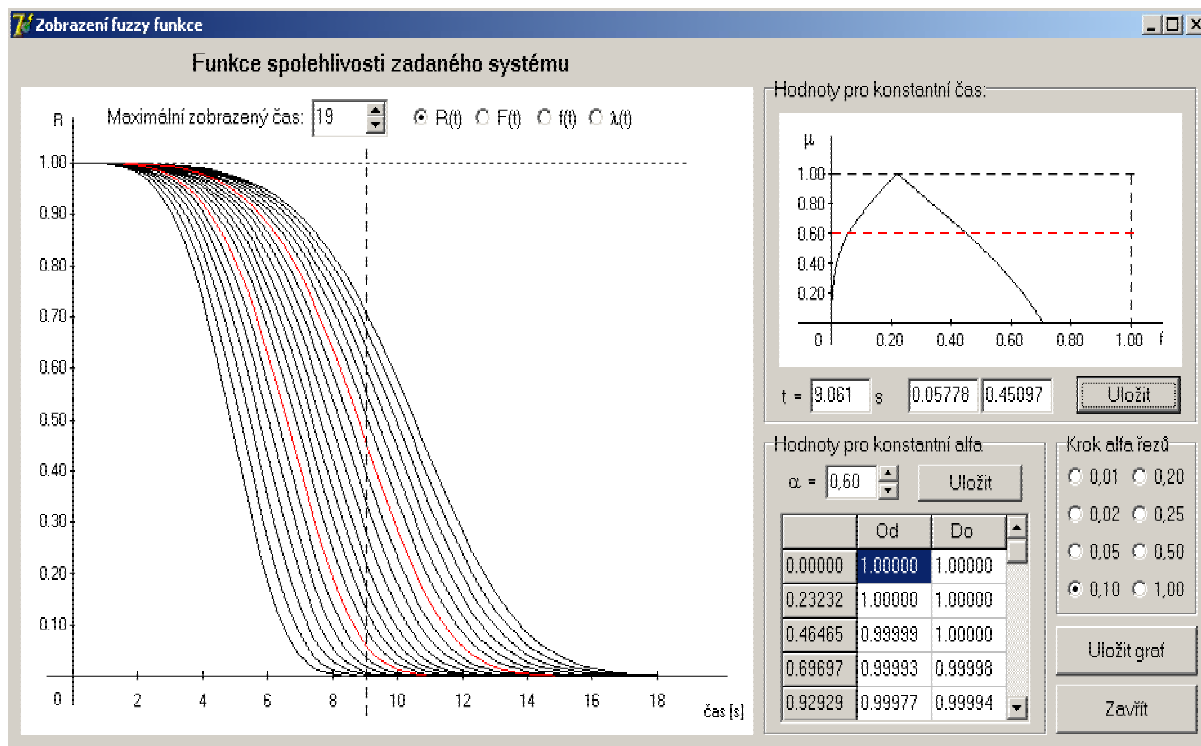
Hlavní graf zobrazuje závislost vybrané fuzzy charakteristiky na čase. Jednotlivá „vlákna“ grafu reprezentují hodnoty pro příslušné konstantní alfa a představují tak vrstevnice funkce dvou proměnných.

Tažením čárkované čáry v hlavním grafu pomocí myši se ve **vedlejší grafu** zobrazuje řez funkcí v aktuálním čase. Hodnoty lze opět odečítat jednak přímo z grafu pomocí pohybu kurzoru myši a jednak je lze uložit do textového souboru pomocí tlačítka **Uložit**.

Přepínač nad hlavním grafem slouží k výběru funkce, která je právě zobrazena. Hodnoty se dají z grafu opět odečítat pomocí pohybu kurzoru myši. Nevyhovuje-li navržené škálování časové osy, lze jej ručně upravit pomocí pole **Maximální zobrazený čas**.

Oddíl **Hodnoty pro konstantní alfa** slouží k výpisu hodnot vybrané funkční fuzzy charakteristiky v jednotlivých dělicích bodech pro vybrané konstantní alfa (tj. podél červeně zvýrazněného vlákna). Tyto hodnoty lze uložit do textového souboru příslušným tlačítkem **Uložit**.

Pomocí přepínače **Krok alfa řezů** lze měnit hustotu vrstevnic v hlavním grafu. Celý graf lze jako obrázek uložit pomocí tlačítka **Uložit graf**.



Obr. 3: Zobrazení funkčních fuzzy charakteristik

5. Závěr

Popsaná metoda fuzzifikace Weibullova rozdělení pravděpodobnosti umožňuje zpracovat nepřesná data o dobách do poruchy jednotlivých prvků kombinovaného spolehlivostního systému se známou konfigurací. Expertní odhady jejich koeficientů nepřesnosti můžeme také určit přímo z fuzzifikace jejich nepřesných pozorovaných dob do poruchy. Aplikace FJK-algoritmu pomocí software Fuzzy spolehlivost soustavy následně umožňuje vypočítat funkční a číselné fuzzy charakteristiky celého systému. Poznamenejme, že jejich hlavní hodnoty (jádra), $\alpha = 1$, odpovídají nefuzzifikovaným Weibullovým rozdělením pravděpodobnosti dob do poruchy jednotlivých prvků, a jejich superty, $\alpha = 0$, odpovídají intervalovým charakteristikám [6]. Další výhodou popsané metody a software je také skutečnost, často používané exponenciální rozdělení pravděpodobnosti dob do poruchy je speciálním případem Weibullova rozdělení pro $b = 1$. Korektnost FJK-algoritmu plyne z toho, že spolehlivost kombinovaného systému je neklesající funkcí spolehlivosti jednotlivých prvků. Autorizovaný software Fuzzy spolehlivost soustavy, který byl převeden také do anglické verze, byl úspěšně testován a verifikován na řadě simulovaných úloh. Je možno jej aplikovat při vyhodnocování spolehlivosti systémů v různých technických oborech i v analýze přežití. Pomocí popsané metody a software bude počítána spolehlivost různých betonových konstrukcí [7], kde jsou konkrétní provozní data o dobách do poruchy obvykle velmi vágní. Autorizovaný software Fuzzy spolehlivost soustav vznikl jako součást řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“ a je zájemcům k dispozici.

Literatura:

- [1] Karpíšek, Z. Fuzzy Probability Distribution - Characteristics and Models. In: *Proceedings 9th East West Fuzzy Colloquium 2001*. Zittau, 2001. 36-45, ISBN 3-9808089-0-4.
- [2] Karpíšek, Z. The Fuzzy Reliability with Weibull Fuzzy Distribution. In: *Proceedings 10th East West Fuzzy Colloquium 2002*. Zittau, 2002. 33-42, ISBN 3-9808089-2-0.
- [3] Karpíšek, Z., Slavíček, K. Two Fuzzy Probability Measures. In: *Third Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT 2003*. Zittau, 2003. 669-674, ISBN 3-9808089-4-7.
- [4] Jelínek, P., Karpíšek, Z. Types and Possibilities of System Fuzzy Reliability Calculation. In: *MENDEL '04, 10th International Conference on Soft Computing*. Brno, 2004. 216-221, ISBN 80-214-2676-4.
- [5] Karpíšek, Z. Class of Fuzzy Numbers for Fuzzy Probability Modeling. In: *5th International Conference APLIMAT 2006* (plenary lect.). Bratislava, 2006. 165-179, ISBN 80-967305-7-6.
- [6] Karpíšek Z., Lacinová V. *System Reliability Computed by Interval Arithmetic*. MENDEL 2010 - 16th International Conference on Soft Computing. June 23-25, 2010, Brno. 565-570, ISSN 1803-3814 (Mendel Journal Series on CD), ISBN 978-80-214-4120-0 (print).
- [7] Karpíšek, Z., Štěpánek, P., Jurák, P. *Weibull Fuzzy Probability Distribution for Reliability of Concrete Structures*. Engineering Mechanics (International Journal for Theoretical and Applied Mechanics), vol. 17 (2010), no. 5/6, 363-372, ISSN 1802-1484.

Poděkování: Příspěvek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čis. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“, grantového projektu GAČR reg. č. 103/08/1658 „Pokročilá optimalizace návrhu složených betonových konstrukcí“ a výzkumného úkolu „Podpora řízení malých a středních firem s využitím matematických metod“ soukromé vysoké školy Akademie Sting v Brně.

NONSTANDARD METRICS FOR APPROXIMATIONS

NESTANDARDNÍ METRIKY PRO APROXIMACE

Zdeněk Karpíšek*, Radomil Matoušek*, Zdeněk Sadovský**

*Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR

Fakulta strojního inženýrství

Vysoké učení technické v Brně

Technická 2, 616 69 Brno

karpisek@fme.vutbr.cz, matousek@fme.vutbr.cz

**Akademie Sting

Stromovka 1, 637 00 Brno

sadovsky@sting.cz

Abstract: *In applications of mathematics in practice we are very often encounter with requirement of the function approximation from measured values, eventually with problem of the statistical characteristics calculation of the measures of central tendency. For solution these problems we employs most frequently the method of least squares, eventually statistics average or median type. Objective hereof contribution is shown some nonstandard metrics available for these problems. These metrics can be created by means of so - called generating function, and they may at creation of the model suggest his robustness appearance toward outliers.*

Keywords: *metric, generating function, function approximation, measure of central tendency*

Abstrakt: *V aplikacích matematiky v praxi se velmi často setkáváme s potřebou aproximace funkcí z naměřených hodnot, resp. s úlohou výpočtu statistických charakteristik polohy pozorovaných dat. Pro řešení těchto úloh se nejčastěji používá metoda nejmenších čtverců, resp. statistiky typu průměr či medián. Cílem tohoto příspěvku je ukázat některé nestandardní metriky využitelné pro tyto úlohy. Tyto metriky mohou být vytvořeny pomocí tzv. generující funkce a mohou při tvorbě modelu ovlivnit jeho robustnost vzhledem k extrémně odchyleným hodnotám.*

Klíčová slova: *metrika, generující funkce, aproximační funkce, míra polohy*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/80

1. Úvod

Úlohou aproximace funkce je proložení naměřených dat takovou funkcí, která tato data podle nějakého zvoleného kritéria dobře reprezentuje. Na rozdíl od interpolace není nebo nemůže být přitom kladen požadavek na přesné proložení naměřených dat nalezenou funkcí. Naopak, vytvořený aproximační model může lépe odpovídat realitě, zejména když lze předpokládat, že naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou. Postup pro nalezení optimálního lineárního aproximačního modelu, ve statistice lineární regresní funkce, úspěšně navrhl již v roce 1794 C. F. Gauss. Tak vznikla dnes již notoricky známá metoda nejmenších čtverců, často využívaná např. k nalezení koeficientů polynomu (1) tak, aby reziduální součet čtverců (RSČ) (2), tj. součet kvadratických odchylek naměřených hodnot a hodnot polynomu, byl minimální:

$$f_k(x, b_0, \dots, b_k) = f_k(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k, \quad (1)$$

$$\text{RSČ} = \sum_{i=1}^n (y_i - f_k(x_i))^2. \quad (2)$$

Dvojice reálných čísel (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, jsou získány např. měřením a relace dvojic veličin x a y je aproximována pomocí funkce (1) tak, aby hodnota účelové funkce (2) byla minimál-

ní. Odchylky aproximace můžeme minimalizovat i vzhledem k jiným kritériím [1] než (2). Nejrozšířenější je však uvedená metoda nejmenších čtverců (LSD, Least Square Deviations). Její výhodou je, že řešení dané optimalizační úlohy je za jistých předpokladů jediné, případně dosažitelné analyticky nebo numericky. Na jiných často užívaných kritériích je založena metoda nejmenších absolutních odchylek (LAD, Least Absolute Deviations) a metoda minmax (Čebyševova aproximace).

Účelovou funkci Q , pomocí níž minimalizujeme nepřesnosti aproximace modelu vzhledem k naměřeným datům, můžeme vyjádřit dostatečně obecně pomocí vhodné metriky ρ ve tvaru

$$Q = \sum_{i=1}^n \rho(y_i, f(x_i)). \quad (3)$$

Při volbě účelové funkce jdou však často proti sobě požadavky přesnosti proložení dat a robustnosti vůči extrémně odchýleným pozorovaným hodnotám.

Rozsáhlou třídou úloh, kde by bylo možné nalézt uplatnění dále uvedených nestandardních (exotických) metrik jsou úlohy tzv. symbolické regrese z oblasti soft-computing, kdy je současně hledán tvar aproximační funkce i její optimální parametry. Jde ale o podstatně obtížnější úlohu, než při hledání optimálních parametrů zvoleného aproximačního (regresního) modelu. Tento typ problémů má však velký potenciál při tzv. automatickém generování programů [4], hledání nových zapojení elektrických obvodů, hledání trigonometrických identit [5] apod. V těchto úlohách jsou aplikovány algoritmy genetického programování (GP, Genetic Programming) [6], gramatické evoluce [7], případně analytické programování [8].

Volba účelové funkce může značně ovlivnit stabilitu nebo přímo dosažitelnost řešení daného soft-computing algoritmu. V práci [9] bylo navrženo dynamické kritérium optimality vycházející z metriky označené jako STE (Sum ε -Tube Error). Toto kritérium dávalo v porovnání s (2) pro úlohu symbolické regrese statisticky významně lepší výsledky.

Dále prezentované metriky budou v tomto smyslu dalším možným návrhem využitelným jak při úlohách aproximace funkcí, tak i symbolické regresi. Tyto metriky mohou být vytvořeny pomocí tzv. generujících funkcí. Jde o jiný přístup ke konstrukci metrik oproti metrikám prezentovaným v [1] a [3]. Navíc volbou parametru p těchto metrik může být docíleno změny robustnosti aproximačního modelu.

2. Funkce generující metriku

K návrhu různých metrik použijeme jistou reálnou funkci $\varphi(u)$, která umožňuje tyto metriky vytvářet. Její vlastnosti, které zajišťují splnění axiomů metriky, popisuje následující tvrzení [2].

Nechť nezáporná rostoucí a konkávní reálná funkce $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\varphi(0) = 0$, má spojité derivace 1. a 2. řádu v intervalu $(0, +\infty)$. Pak pro libovolná čísla $u, v \in [0, +\infty)$ je $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Jestliže pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ položíme $u = |x - y|$, pak funkce

$$\rho(x, y) = \varphi(|x - y|) \quad (4)$$

je metrika na $\mathbb{R}$.

O funkci $\varphi(u)$ říkáme, že **generuje** na $\mathbb{R}$ metriku $\rho(x, y)$.

Např. funkce $\varphi(u) = u$ generuje známou euklidovskou metriku na $\mathbb{R}$. V Tabulce 1 jsou příklady některých „nestandardních“ metrik $\rho(x, y)$ na $\mathbb{R}$ generovaných funkcí $\varphi(u)$ a obory jejich hodnot.

Tabulka 1.

$\varphi(u)$	$\rho(x, y)$	Obor hodnot
$u^p, p \in (0, 1]$	$ x - y ^p, p \in (0, 1]$	$[0, \infty)$
$\operatorname{sgn} u$	0 pro $x = y$, 1 pro $x \neq y$	$\{0, 1\}$
$\frac{u}{u+1}$	$\frac{ x-y }{ x-y +1}$	$[0, 1)$
$\ln(u+1)$	$\ln(x-y +1)$	$[0, \infty)$
$\operatorname{tgh} u$	$\operatorname{tgh} x-y $	$[0, \infty)$
$\operatorname{arctg} u$	$\operatorname{arctg} x-y $	$[0, \pi/2)$

Metriku $\rho(x, y) = \varphi(|x - y|)$ z (4) můžeme snadno zobecnit pro konečné reálné posloupnosti. Necht' je dána generující funkce $\varphi(u)$ splňující předpoklady výše uvedeného tvrzení a $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in [0, \infty)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je zřejmé

$$\sum_{i=1}^n \varphi(u_i + v_i) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) + \sum_{i=1}^n \varphi(v_i). \quad (5)$$

Odtud plyne, že pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, a generující funkci $\varphi(u)$ je

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \varphi(|x_i - y_i|) \quad (6)$$

metrika na $\mathbb{R}^n$. V Tabulce 2 jsou příklady některých nestandardních metrik $\rho(x, y)$ na $\mathbb{R}^n$ generovaných funkcí $\varphi(u)$ a obory jejich hodnot.

V aplikacích se nejčastěji používá jako míra vzdálenosti posloupností (vektorů) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ metrika

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

kde $p \in [1, \infty)$. Speciálně pro $p = 1$ jde o součtovou metriku, pro $p = 2$ jde o euklidovskou metriku a pro $p \rightarrow \infty$ se jedná o tzv. Čebyševovu metriku $D_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$.

Všechny metriky uvedené v tomto oddílu lze snadno zobecnit na metriky s váhami $w_i \geq 0$, jestliže místo $|x_i - y_i|$ vezmeme $w_i |x_i - y_i|$. Z (6) a (7) dostaneme

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(|x_i - y_i|),$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n w_i |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tabulka 2.

$\varphi(u)$	$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Obor hodnot
$u^p, p \in (0, 1]$	$\sum_{i=1}^n x_i - y_i ^p, p \in (0, 1]$	$[0, \infty)$
$\operatorname{sgn} u$	$\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} x_i - y_i $	$\{0, 1, \dots, n\}$
$\frac{u}{u+1}$	$\sum_{i=1}^n \frac{ x_i - y_i }{ x_i - y_i + 1}$	$[0, n)$
$\ln(u+1)$	$\sum_{i=1}^n \ln(x_i - y_i + 1)$	$[0, \infty)$
$\operatorname{tgh} u$	$\sum_{i=1}^n \operatorname{tgh} x_i - y_i $	$[0, \infty)$
$\operatorname{arctg} u$	$\sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} x_i - y_i $	$[0, \pi n / 2)$

3. Míra polohy statistického souboru

Základní úlohou v popisné statistice je určení tzv. míry polohy (střední hodnoty) kvantitativního jednorozměrného statistického souboru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Položíme-li $\mathbf{y} = \mathbf{c} = (c, c, \dots, c)$, jde vlastně o určení absolutního minima metriky

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n \varphi(|x_i - c|) \quad (8)$$

vzhledem k $c \in \mathbb{R}$. Hledaná hodnota číselné charakteristiky polohy pak je

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \arg \min_c \sum_{i=1}^n \varphi(|x_i - c|). \quad (9)$$

Výpočtem absolutního minima metriky

$$D_p(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - c|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

obdržíme tyto číselné charakteristiky $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polohy statistického souboru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

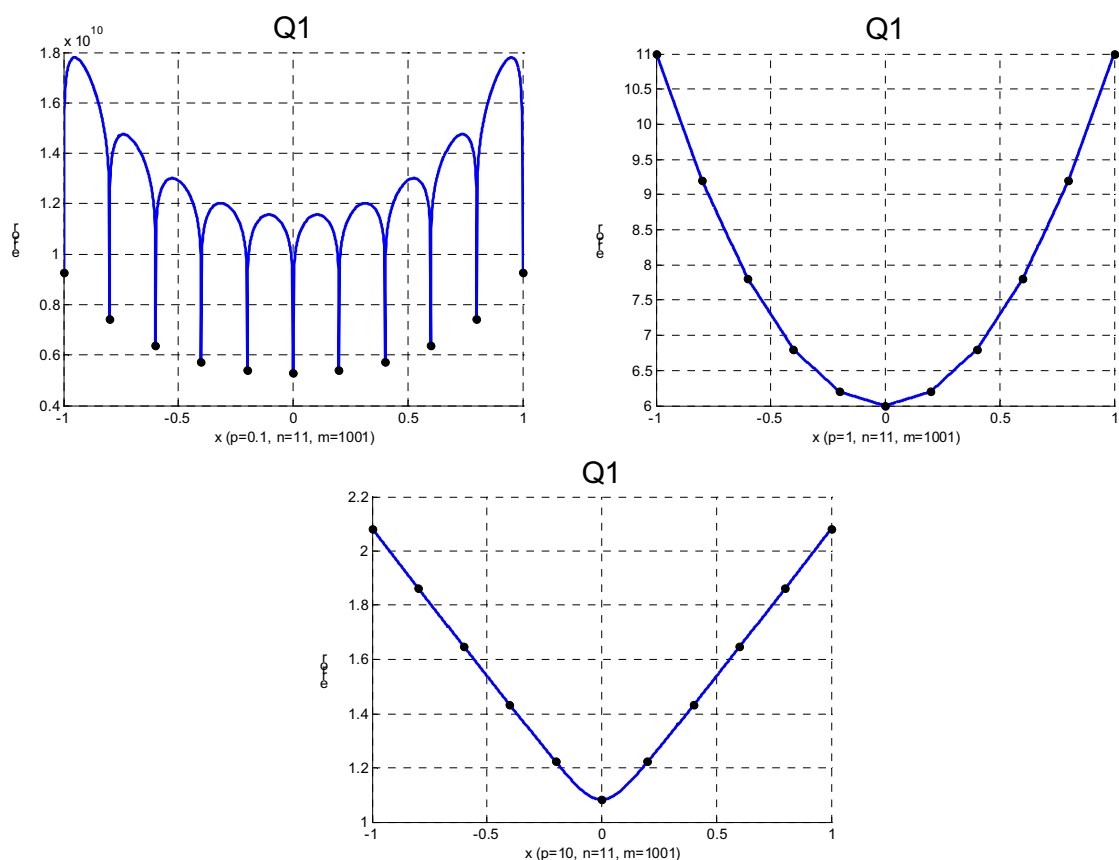
- medián pro $p = 1$,
- aritmetický průměr pro $p = 2$,
- polosuma pro $p \rightarrow \infty$.

Účelové funkce Q pro optimální aproximaci založené na metrikách z Tabulky 2 a metriky $D_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jsou v Tabulce 3, kde jsme navíc místo $|x_i - y_i|$ vzali $|x_i - y_i|^p$, $p \in (0, \infty)$.

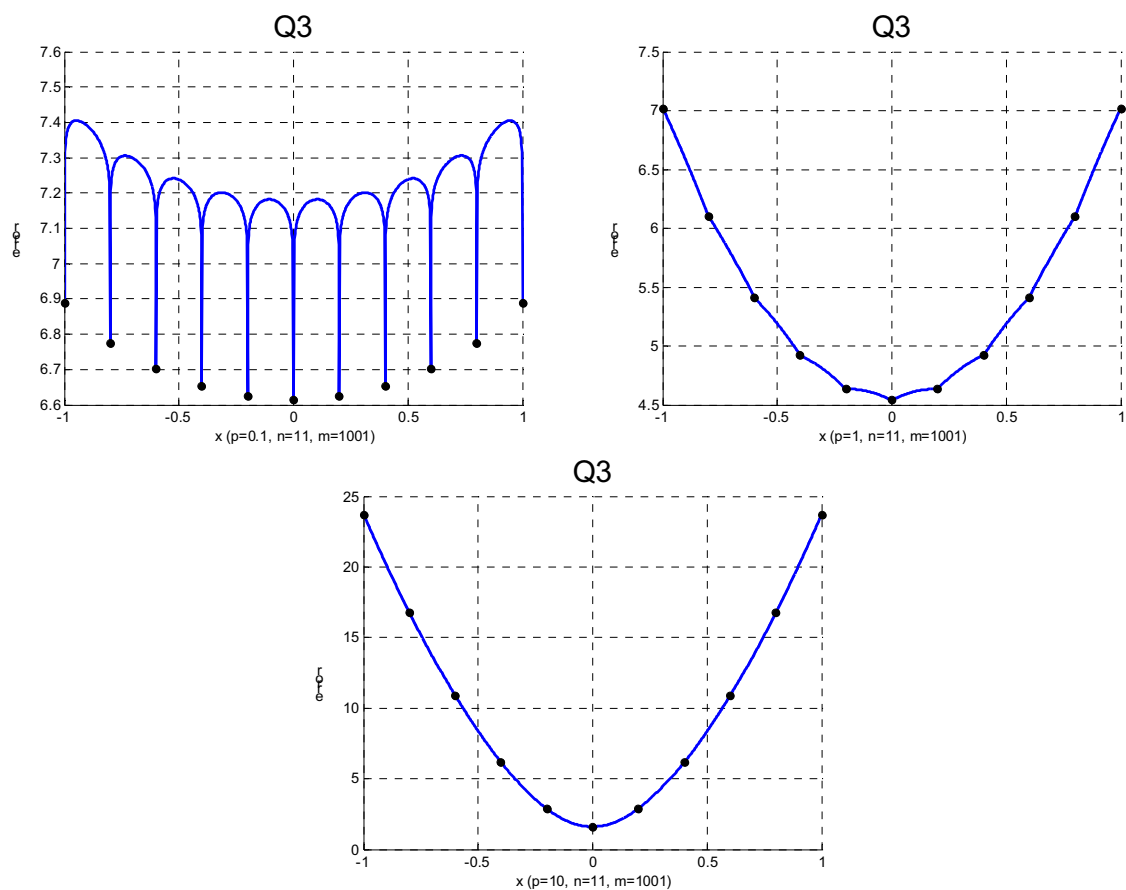
Tabulka 3.

Účelová funkce	Tvar účelové funkce	Obor hodnot
$Q1$	$\left(\sum_{i=1}^n x_i - c ^p \right)^{1/p}$	$[0, \infty)$
$Q2$	$\sum_{i=1}^n \frac{ x_i - c ^p}{ x_i - c ^p + 1}$	$[0, n)$
$Q3$	$\sum_{i=1}^n \ln(x_i - c ^p + 1)$	$[0, \infty)$
$Q4$	$\sum_{i=1}^n \operatorname{tgh} x_i - c ^p$	$[0, \infty)$
$Q5$	$\sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} x_i - c ^p$	$[0, \pi n / 2)$

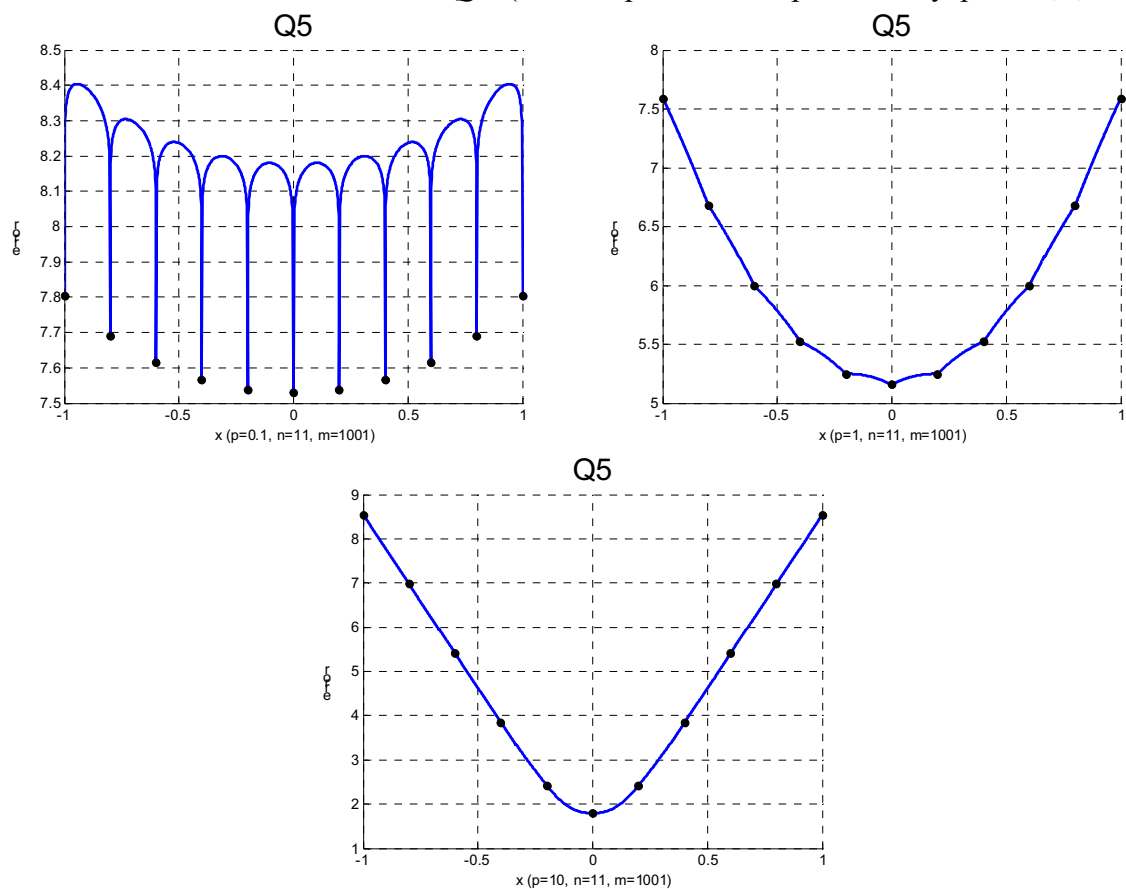
Cílem dále uvedených ukázek optimalizace účelových funkcí z Tabulky 3, konkrétně $Q1$, $Q3$ a $Q5$, bylo nalezení charakteristik polohy $c = \arg \min Q(\mathbf{x}, p)$ jednorozměrného statistického souboru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{11})$, $x_i \in [-1, 1]$, pro hodnoty $p = 0.2, 1, 10$. Obr. 1, 2 a 3 ukazují vliv parametru p na průběh vybraných účelových funkcí. Z obrázků dále vyplývá, že účelové funkce z Tabulky 3 mohou nabývat více lokálních extrémů.



Obr. 1: Hodnota účelové funkce $Q1$ (zleva doprava a dolů pro hodnoty $p = 0.2, 1, 10$).



Obr. 2: Hodnota účelové funkce Q_3 (zleva doprava a dolů pro hodnoty $p = 0.2, 1, 10$).



Obr. 3: Hodnota účelové funkce Q_5 (zleva doprava a dolů pro hodnoty $p = 0.2, 1, 10$).

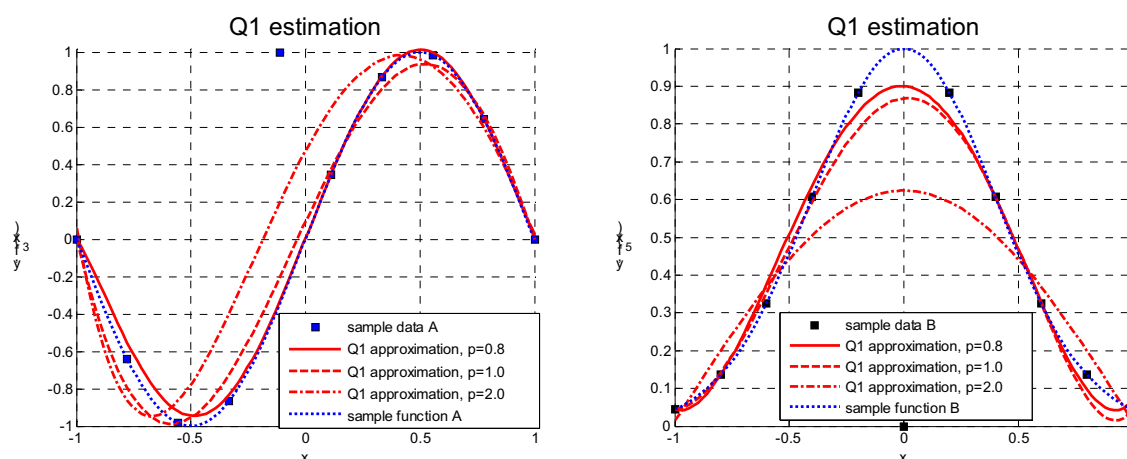
Výpočet charakteristik polohy statistického souboru pro různé hodnoty parametru p a různé (nestandardní) metriky vede obecně na řešení nelineární optimalizační úlohy. Se stejnými problémy se setkáváme i v regresní analýze, když pro určení bodových odhadů regresních koeficientů regresní funkce zvolíme některou z uvedených metrik. Výjimkou je pouze lineární regresní funkce (lineární vzhledem k regresním koeficientům), jestliže použijeme euklidovskou metriku (metoda nejmenších čtverců), která vede na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Volbou různých metrik však můžeme významně ovlivňovat robustnost regresního modelu vzhledem k extrémně odchýleným pozorovaným hodnotám.

4. Aproximace funkce s využitím nestandardních metrik

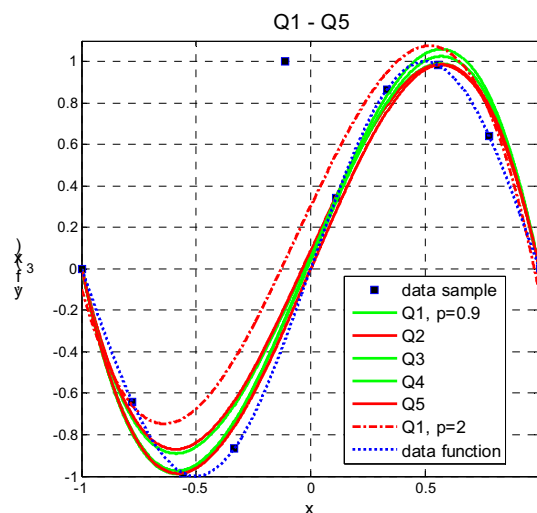
Vliv volby metriky, resp. hodnoty parametru p , ukážeme na příkladech dvou datových souborů.

Datový soubor A tvoří souřadnice bodů ležících na grafu funkce sinus s 10 ekvidistantními hodnotami argumentu z intervalu $[-1,1]$ a datový soubor B souřadnice bodů ležících na grafu funkce Gaussova typu s 11 ekvidistantními hodnotami argumentu. Pro demonstraci robustnosti zvolených metrik byly oba soubory upraveny tak aby obsahovaly jednu extrémně odchýlenou funkční hodnotu. Vzhledem ke tvaru daných funkcí byl pro aproximaci souboru A zvolen polynom třetího stupně a pro soubor B polynom pátého stupně. V případě euklidovské metriky byl problém řešen metodou nejmenších čtverců implementovanou v Matlabu pomocí QR dekompozice Vandermondovy matice. V případě ostatních metrik byl v Matlabu využit řešič `fminsearch` implementující Nelderovu-Meadovu metodu (zástupce standardních optimalizačních metod) a řešič `HC12` opět implementovaný v Matlabu [10] (zástupce soft-computing optimalizačních metod). Nutnost volby zvolených řešičů vyplývala z podstaty řešené úlohy, která obecně představuje nelineární, vícemodální a nediferencovatelný problém.

Na Obr. 4 jsou grafy aproximací pro účelovou funkci $Q1$ z Tabulky 3 s hodnotami parametru $p = 0.8, 1.0, 2.0$ (aproximace pro hodnoty $p = 0.8, 1.0$ nemusí být optimální). Na Obr. 5 jsou grafy aproximací pro účelové funkce $Q1$ až $Q5$ z Tabulky 3 s hodnotou parametru $p = 0.9$ a navíc pro účelovou funkci $Q1$ s hodnotou parametru $p = 2$.



Obr. 4: Aproximace datového souboru A (vlevo) a datového souboru B (vpravo) pomocí účelové funkce $Q1$.



Obr. 5: Aproximace datového souboru A pomocí účelových funkcí $Q1$ až $Q5$.

5. Závěr

Cílem tohoto příspěvku bylo ukázat jednoduchý návrh metrik označených jako nestandardní (exotické) a ukázat jejich využití. Uvedené metriky byly navrženy pomocí generující funkce $\varphi(u)$, která byla navíc v jistém smyslu parametrizována zobrazením mocninou p ve tvaru

$$u \rightarrow u^p. \quad (10)$$

Tak jsme získali sadu netradičních metrik, které mohou být použity v účelové funkci (3) pro aproximace funkcí. Seznam těchto účelových funkcí je v Tabulce 3. Z tabulky je běžně známa a používá se první metrika, avšak takřka výlučně pro parametr $p \in [1, \infty)$.

V oddílu 3 jsou prezentovány příklady chování charakteristik polohy statistického souboru pro různé hodnoty parametru p a dané účelové funkce. Z Obr. 2, 3 a 4 je zřejmé, úloha určení charakteristik polohy statistického souboru je pro parametr $p \in (0, 1)$ silně nelineární. V oddílu 4 jsou popsány příklady chování aproximačního modelu vzhledem ke zvolenému kritériu optimality (účelové funkci) Q dle Tabulky 3. Na příkladech datových souborů A a B byla demonstrována robustnost řešení vůči odchýleným hodnotám. Je zřejmé, že požadavek robustnosti a přesnosti aproximace všech prvků dané datové množiny jsou věci kompromisu.

Uvedené metriky budou v budoucnu testovány při implementaci gramatické evoluce v úlohách symbolické regrese. Rovněž se předpokládá jejich využití v úlohách aproximace funkcí a regresní analýze. Vzhledem k transformaci (10) bude možné navrhnout další netradiční metriky. Zajímavou úvahou by bylo využít uvedené metriky, resp. příslušné účelové funkce Q , při testech optimalizačních algoritmů, tj. jako možnou alternativu známých testovacích funkcí typu Rastrigin, DeJong apod. Obtížnost řešení je dobrou výzvou jak pro klasické nelineární optimalizační algoritmy, tak i pro algoritmy z oblasti soft-computingu (evoluční algoritmy, HC12, diferenciální evoluce, SOMA aj.).

Literatura:

- [1] Gromov, M. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser Press, 2001.
- [2] Collatz, L. *Functional analysis and numerical mathematics*. Academic Press, 1966.
- [3] Wolf, J., A. *Exotic Metrics on Immersed Surface*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [4] Weosser, R., Osmera, P., Matousek, R. Transplant Evolution with Modified Schema of Differential Evolution: Optimization Structure of Controllers. In *Proceedings of 16th In-*

- ternational Conference on Soft-Computing MENDEL 2010*. Brno: FME BUT, 2010, pp.113-120.
- [5] Ryan, C., O'Neill, M., Collins, J. J. Grammatical Evolution: Solving Trigonometri Identities. In *Proceedings of 4th International Conference on Soft-Computing MENDEL 1998*. Brno: FME BUT, 1998, pp.111-119.
 - [6] Koza, J. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. The MIT Press, 1992.
 - [7] O'Neill, M., Ryan, C. *Grammatical Evolution*. Berlin: Springer, 2003.
 - [8] Oplatková, Z., Šenkeřík, R., Bělašková, S., Zelinka, I. Synthesis of Control Rule for Synthesized Chaotic System by means of Evolutionary Techniques. In *Proceedings of 16th International Conference on Soft-Computing MENDEL 2010*. . Brno: FME BUT, 2010, pp. 91-98.
 - [9] Matousek, R., Bednar, J. Grammatical Evoution: Epsilon Tube in Symbolic Regression Task. In *Proceedings of 15th International Conference on Soft-Computing MENDEL 2009*. Brno: FME BUT, 2009, pp. 9-15.
 - [10] Matousek, R. HC12: The Principles of CUDA Implementation. In *Proceedings of 16th International Conference on Soft-Computing MENDEL 2010*. Brno: FME BUT, 2010, pp. 303-308.

Poděkování: Příspěvek je součástí řešení projektů: MŠMT ČR čís. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“, GAČR reg. č. 103/08/1658 „Pokročilá optimalizace návrhu složených betonových konstrukcí“, GAČR reg. č. P403/11/2085 „Konstrukce metod pro vícefaktorové měření komplexní podnikové výkonnosti ve vybraném odvětví“, GAČR reg. č. 102/09/1668 „Návrh řízení s využitím evolučního přístupu“, VUT IGA č. FSI-s-11-31 „Metody umělé inteligence“, Akademie Sting „Podpora řízení malých a středních firem s využitím matematických metod“.

SOFTWARE FOR APPLICATIONS OF NON-HOMOGENOUS MARKOV CHAINS IN QUALITY

SOFTWARE PRO APLIKACE NEHOMOGENNÍCH MARKOVSKÝCH ŘETĚZCŮ V JAKOSTI

Zdeněk Karpíšek, Pavel Štarha

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno
karpisek@fme.vutbr.cz, starha@fme.vutbr.cz

Abstract: *In the article is described the PC software for calculation of stochastic characteristics of quality production and assembly of mounting units. Calculation is found on non-homogeneous Markov chains describing quality production of component parts of assembly groups from known accuracy probabilities of particular independent production operations. Software can be used for determination of the resultant probability distribution of the number of accuracy assembly groups in practice.*

Keywords: *non-homogenous Markov chain, accuracy probability, assembly group, component, production operation*

Abstrakt: *V článku je popsán PC software pro výpočet pravděpodobnostních charakteristik jakosti výroby a montáže montážních celků. Výpočet je založen na nehomogenních markovských řetězcích popisujících jakost výroby součástí montážních celků ze známých pravděpodobností shodnosti jednotlivých nezávislých výrobních operací. Software může být použit pro určení výsledného rozdělení pravděpodobnosti počtu shodných montážních celků v praxi.*

Klíčová slova: *nehomogenní markovský řetězec, pravděpodobnost shody, montážní celek, součást, výrobní operace*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/89

1. Výrobní proces dávky montážních celků

Předpokládáme, že jde o výrobu dávky konečného počtu m montážních celků stejného druhu [1], kdy se každý montážní celek skládá z konečného počtu s různých typů součástí označených $d_1, d_2, \dots, d_s$. Každá ze součástí daného typu může být v montážním celku vícekrát. Konkrétně součást typu d_r , $r = 1, \dots, s$, je v montážním celku obsažena c_r -krát – viz obr. 1.

d_1	d_2	$\dots$	d_r	$\dots$	d_s
c_1	c_2		c_r		c_s

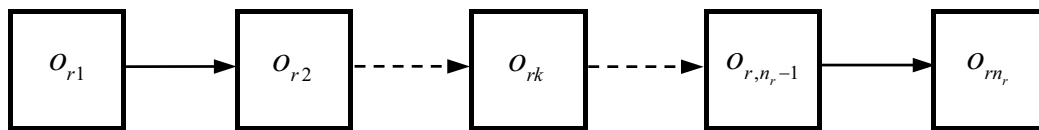
Obr. 1: Schéma montážního celku

Dále předpokládáme, že montážní celek označíme jako shodný, právě když všechny jeho součásti všech typů budou shodné a jejich montáž do celku bude shodná, tedy správně provedena.

2. Výroba součástí montážního celku

Předpokládáme, že součást typu d_r vstupuje do výrobního procesu jako polotovár a je postupně podrobována konečně mnoha jednotlivým výrobním operacím. Počet operací, kterými

má tato součást projít, je pro různé součásti různý. Konkrétně celkový počet operací pro součást typu d_r montážního celku je n_r , $r = 1, 2, \dots, s$. Necht' o_{rk} značí k -tou operaci na součásti typu d_r , $k = 1, 2, \dots, n_r$ – viz obr. 2.



Obr. 2: Schéma výrobního procesu pro součást typu d_r

Náš model výroby montážních celků je založen na předpokladech:

1. Součást typu d_r bude shodná, jestliže bude shodná po každé z jejích n_r operací o_{rk} , $k = 1, 2, \dots, n_r$. Pravděpodobnost toho, že součást typu d_r bude shodná po k -té operaci o_{rk} , označíme p_{rk} . Naopak pravděpodobnost toho, že po dané operaci bude součást neshodná, je $q_{rk} = 1 - p_{rk}$. Taková součást bude po dané operaci z dalšího výrobního procesu vyřazena.

2. Výsledek k -té operace je nezávislý na všech ostatních operacích, takže se jedná o posloupnost vzájemně nezávislých jevů, kdy pravděpodobnosti úspěchu v různých operacích jsou obecně různé.

3. Chceme vyrobit m shodných montážních celků stejného typu, takže do výrobního procesu součásti typu d_r vstupuje do první operace $c_r m$ polotovarů (dílů) téhož typu, které prochází postupně n_r operacemi jako dávka. Protože po každé operaci jsou vyřazovány z dávky neshodné díly součásti typu d_r , vstupuje do k -té operace $z_r = 0, 1, \dots, c_r m$ shodných dílů a na konci tohoto procesu získáme 0 až $c_r m$ shodných dílů součásti daného typu.

Z těchto předpokladů plyne, že počet shodných dílů součásti typu d_r po provedení k -té operace, do níž vstoupilo z_r shodných dílů součásti téhož typu, je náhodná veličina X s binomickým rozdělením pravděpodobnosti $\text{Bi}(z_r, p_{rk})$ s pravděpodobnostní funkcí

$$\binom{z_r}{x} p_{rk}^x (1 - p_{rk})^{z_r - x}, \quad x = 0, 1, \dots, z_r.$$

Všechny možné stavy vyjadřující počty shodných dílů součásti typu d_r , které mohou po provedení operace o_{rk} nastat, můžeme vyjádřit pomocí nehomogenního markovského řetězce [2] s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}_{rk}$ pro k -tou operaci na součásti typu d_r . Tato matice má prvky

$$p_{rk}(i, j) = \begin{cases} \binom{i}{j} p_{rk}^j (1 - p_{rk})^{i-j} & \text{pro } i \geq j, \\ 0 & \text{pro } i < j, \end{cases} \quad (1)$$

kde i je číslo řádku, $i = 0, 1, \dots, c_r m$, a j je číslo sloupce, $j = 0, 1, \dots, c_r m$. Číslo řádku i odpovídá počtu dílů součásti typu d_r podrobených k -té operaci a číslo sloupce j odpovídá počtu shodných součástí po provedení této operace. $\mathbf{P}_{rk}$ je dolní trojúhelníková matice, protože před operací se nemůže v dávce nacházet méně shodných kusů než po provedení této operace.

Výsledky postupně prováděných nezávislých operací pro dávku dílů součásti typu d_r tak tvoří vzhledem k počtu správně provedených operací nehomogenní markovský řetězec

s konečně mnoha stavy $0, 1, \dots, c_r m$. Vzhledem k tomu, že tento řetězec je popsán danými trojúhelníkovými maticemi pravděpodobností přechodu, jde o degradační stochastický proces. Tento řetězec je absorbující, neboť stav 0 tohoto řetězce je stavem absorbujícím. Navíc má tento řetězec konečnou délku n_r , protože počet výrobních operací pro každou součást je konečný.

Výsledek celého výrobního procesu součásti typu d_r montážního celku pro případ, že součásti postupují od operace k operaci jako dávka o z_r kusech ($z_r = 0, 1, \dots, c_r m$), vyjadřuje matice konečného rozdělení stavů $\mathbf{P}_r(n_r)$, kterou získáme vynásobením matic pravděpodobností přechodu pro jednotlivé operace $\mathbf{P}_{rk}$ a matice počátečního rozdělení pravděpodobností stavů (rozdělení pravděpodobností stavů před první operací) $\mathbf{P}_r(0)$, tedy

$$\mathbf{P}_r(n_r) = \mathbf{P}_r(0) \prod_{k=1}^{n_r} \mathbf{P}_{rk}. \quad (2)$$

Matice (vektor) počátečního rozdělení pravděpodobností stavů vyjadřuje pravděpodobnostní funkci počtu shodných součástí (polotovarů), které vstupují do první operace. Tato matice je jednořádková s $c_r m + 1$ sloupci a má tvar

$$\mathbf{P}_r(0) = [p_{r0}(0), p_{r0}(1), \dots, p_{r0}(j), \dots, p_{r0}(c_r m - 1), p_{r0}(c_r m)], \quad (3)$$

kde $p_{r0}(j)$ je pravděpodobnost, že do první operace vstoupí j kusů shodných součástí typu d_r a $j = 0, 1, \dots, c_r m$. Výsledným popisem jakosti celého výrobního procesu pro součást typu d_r je matice (vektor) konečného rozdělení pravděpodobností stavů, která vyjadřuje pravděpodobnostní funkci počtu shodných dílů součásti typu d_r na konci výrobního procesu. Tato jednořádková matice (vektor) s $c_r m + 1$ sloupci má tvar

$$\mathbf{P}_r(n_r) = [p_{m_r}(0), p_{m_r}(1), \dots, p_{m_r}(j), \dots, p_{m_r}(c_r m - 1), p_{m_r}(c_r m)], \quad (4)$$

Přitom $p_{m_r}(j)$ je pravděpodobnost, že po projití dávky n_r operacemi vyrobíme j shodných dílů součásti typu d_r za předpokladu, že před první operací bylo v dávce $z_r = 0, 1, \dots, c_r m$ shodných polotovarů.

Vzhledem k tomu, že každý shodný montážní celek obsahuje právě c_r shodných dílů součásti typu d_r , je pro výrobu $y_r = 0, 1, \dots, m - 1$ shodných montážních celků zapotřebí $y_r c_r$ až $(y_r + 1) c_r - 1$ shodných dílů součásti typu d_r . Pravděpodobnost tohoto jevu je vzhledem k disjunktnosti stavů

$$p_r^*(y_r) = \sum_{j=y_r c_r}^{(y_r+1)c_r-1} p_{m_r}(j). \quad (5)$$

Pro výrobu $y_r = m$ shodných montážních celků je zapotřebí celkem $m c_r$ shodných dílů součástí typu d_r a pravděpodobnost tohoto jevu je $p_{m_r}(c_r m)$. Matice (vektor) konečného rozdělení pravděpodobností stavů pro součást typu d_r po provedení n_r operací z hlediska možného počtu shodných montážních celků pak je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r^* &= [p_r^*(0), p_r^*(1), \dots, p_r^*(y_r), \dots, p_r^*(m-1), p_r^*(m)] = \\ &= \left[\sum_{j=0}^{c_r-1} p_{m_r}(j), \sum_{j=c_r}^{2c_r-1} p_{m_r}(j), \dots, \sum_{j=y_r c_r}^{(y_r+1)c_r-1} p_{m_r}(j), \dots, \sum_{j=(m-1)c_r}^{m c_r-1} p_{m_r}(j), p_{m_r}(c_r m) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

za předpokladu, že před první operací o_{r1} bylo v dávce $z_r = 0, 1, \dots, c_r m$ shodných polotovarů. Jinak řečeno jde o pravděpodobnosti, že budeme mít k dispozici pro montáž právě

$y_r = 0, 1, \dots, m$ skupin shodných dílů součástí typu d_r , $r = 1, 2, \dots, s$, a nejvýše $c_r - 1$ jich bude přebývat, např. do zásoby.

3. Sestavení montážních celků

Pomocí matic $\mathbf{P}_r^*$ konečných rozdělení pravděpodobnosti stavů po vyrobení skupin součástí typu d_r montážního celku, $r = 1, 2, \dots, s$, určíme výsledné (konečné) rozdělení pravděpodobnosti počtu shodných montážních celků. Shodných montážních celků může být sestaveno 0 až m , přičemž každý shodný montážní celek obsahuje s skupin stejného typu shodných součástí. Předpokládáme, že montážní operace jsou vzájemně nezávislé. Pokud chceme popsat montážní proces, kde nemusí být provedena montáž skupiny stejných součástí do montážního celku shodně a známe pravděpodobnost shodnosti provedení montáže této skupiny, transformujeme matice $\mathbf{P}_r^*$ opět pomocí matic pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q}_r$, které jsou vytvořeny analogicky jako matice $\mathbf{P}_{rk}$ (dolní trojúhelníkové matice s binomickými rozděleními). Jde o transformaci

$$\mathbf{P}_r^* \mathbf{Q}_r \rightarrow \mathbf{P}_r^*. \quad (7)$$

Pokud se provádí montáž skupiny dílů součást typu d_r do montážního celku bez neshodnosti, je $\mathbf{Q}_r$ jednotková matice.

Minimální počet všech skupin shodných součástí ze všech dávek vyrobených součástí typu $d_1 \dots d_s$ je náhodná veličina, kterou označíme T_s . Dále nechť Y_r značí náhodnou veličinu popisující počet skupin shodných dílů součástí typu d_r , $r = 1, 2, \dots, s$. Její pravděpodobnostní funkce je dána maticí $\mathbf{P}_r^*$ ze vztahu (6), resp. (7) vzhledem ke shodnému provedení montážních operací, a náhodné veličiny Y_r jsou zřejmě vzájemně nezávislé. Pak je

$$T_s = \min (Y_1, \dots, Y_s)$$

a vzhledem k asociativitě binární operace minima ze dvou čísel platí, že

$$T_s = \min (\dots \min (\min (Y_1, Y_2), Y_3), \dots, Y_s).$$

Postupný výpočet minima pomocí předcházejícího vztahu lze vyjádřit rekurentním vztahem

$$T_r = \min (T_{r-1}, Y_r), \quad T_1 = Y_1,$$

kde $r = 2, \dots, s$. Ze vzájemné nezávislosti náhodných veličin $Y_1, \dots, Y_s$ plyne nezávislost dvojic náhodných veličin T_{r-1}, Y_r pro $r = 2, \dots, s$. Náhodný vektor (T_{r-1}, Y_r) má proto simultánní rozdělení pravděpodobnosti

$$p_{r-1,r}(t_{r-1}, y_r) = \pi_{r-1}(t_{r-1}) p_r^*(y_r), \quad (8)$$

kde $\pi_{r-1}(t_{r-1})$ je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_{r-1} . Číslo t_{r-1} představuje počet shodných montážních celků po montáži skupin součástí typu $d_1, \dots, d_{r-1}$, přičemž $t_{r-1}, y_r = 0, 1, \dots, m$.

Náhodná veličina T_r má rozdělení pravděpodobnosti

$$\pi_r(t_r) = \sum_{t=t_r+1}^m p_{r-1,r}(t, t_r) + \sum_{t=t_r}^m p_{r-1,r}(t_r, t) = \sum_{t=t_r+1}^m [p_{r-1,r}(t, t_r) + p_{r-1,r}(t_r, t)] + p_{r-1,r}(t_r, t_r), \quad (9)$$

$t_r = 0, 1, \dots, m$. Po postupném výpočtu obdržíme pro $r = s$ výsledné rozdělení pravděpodobnosti minima shodných montážních celků T_s

$$\boldsymbol{\pi}_s(t_s) = [\pi_s(0), \pi_s(1), \dots, \pi_s(t_s), \dots, \pi_s(s)].$$

Odtud pak získáme střední počet vyrobených shodných montážních celků

$$E(T_s) = \sum_{t_s=0}^s t_s \pi_s(t_s),$$

rozptyl počtu vyrobených shodných montážních celků

$$D(T_s) = \sum_{t_s=0}^s t_s^2 \pi_s(t_s) - [E(T_s)]^2,$$

případně směrodatnou odchylku $\sigma(T_s) = \sqrt{D(T_s)}$, medián $\tilde{t}_s$, modus $\hat{t}_s$ atd.

4. Statistický software WJakost

Metody výpočtu matic pravděpodobností přechodu nehomogenního markovského řetězce a konečných rozdělení pravděpodobnosti popsané v předcházejících oddílech byly implementovány do autorizovaného EXE softwaru WJakost pro PC. Tento program je modernizací námi dříve vyvinutého softwaru, který umožňoval realizovat markovský model pouze pro dávku montážních celků, které se skládaly z více součástí různých typů, ale každá součást byla zastoupena pouze jedenkrát, a všechny operace montáže celků byly vždy shodné.

Pro výpočet pomocí softwaru WJakost je nutno do spuštěného programu ručně zadat tyto vstupy v oknu nebo je importovat z textového souboru (menu Program a Výrobek):

- Název montážního celku (text)
- Číslo montážního celku (číslo)
- Počet součástí (číslo)
- Počet kusů (číslo)
- Číslo součásti (číslo)
- Počet dílů (číslo)
- Počet operací na díl (číslo)
- Pravděpodobnosti shody pro jednotlivé operace na dílu (vektor)
- Pravděpodobnosti shody pro jednotlivé operace na součásti (vektor)
- Pravděpodobnosti počtu shodných dílů na vstupu (vektor)

Pro výpočet zvolíme v menu Data:

- Výpočet pravděpodobnosti počtu shodných montážních součástí na vstupu (vektor)
- Výpočet pravděpodobnosti počtu shodných montážních celků

Po výpočtu získáme v nabídce Data:

- Graf rozdělení pravděpodobnosti pro celý montážní celek (obsahuje také střední hodnotu a modus)
- Matice rozdělení pravděpodobnosti pro celý montážní celek
- Matice počátečního rozdělení pravděpodobnosti stavů (pro jednotlivé součásti)
- Matice pravděpodobnosti přechodu (pro jednotlivé součásti)
- Matice konečného rozdělení pravděpodobnosti stavů (pro jednotlivé součásti)

Vypočtené matice můžeme uložit v textovém formátu *.TXT a graf rozdělení pravděpodobnosti pro montážní celky uložit ve formátu Windows bitmap *.BMP. Konkrétní aplikaci softwaru WJakost ilustruje následující příklad.

Příklad: Vyrábíme dávku deseti židlí stejného typu, přičemž každá židle se skládá ze čtyř stejných noh, dvou stejných područek, sedadla a opěradla. Označme nohy jako součást typu d_1 tvořená čtyřmi díly, područky jako součást typu d_2 tvořená dvěma díly, sedadlo jako součást typu d_3 (jeden díl) a opěradlo jako součást typu d_4 (jeden díl). Aby vznikla shodná finální součást, musí projít součást typu d_1 čtyřmi operacemi a jednotlivé díly dvěma operacemi, součást typu d_2 dvěma operacemi a jednotlivé díly třemi operacemi, součást typu d_3 třemi operacemi a daný díl čtyřmi operacemi a součást typu d_4 jednou operací a daný díl dvěma operacemi. Předpokládáme, že do první operace výrobního procesu vstoupí 40 shod-

ných polotovarů součásti typu d_1 , 20 shodných polotovarů součásti typu d_2 , 10 shodných polotovarů součásti typu d_3 a 10 shodných polotovarů součásti typu d_4 . V tab. 1, 2, 3 a 4 je prezentováno zadání pravděpodobností pro součásti typu d_1 , d_2 , d_3 a d_4 . Na obr. 3 je ukázka uživatelského rozhraní programu WJakost pro zadání vstupních hodnot součásti d_1 (nohy) montážního celku (židli). Stejný vzhled mají uživatelská rozhraní pro součásti d_2 , d_3 a d_4 .

1. součást nohy

Počet dílů 4
Pst. počtu shodných dílů na vstupu

počet	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
pst.	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
počet	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
pst.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Počet operací na díl 2
Pst.shody pro jednotlivé operace na dílu

operace	1	2
pst.	0,98	0,97

Počet operací na součást 4
Pst.shody pro jednotlivé operace na součásti

operace	1	2	3	4
pst.	0,99	0,99	0,99	0,99

Tab. 1: Vstupní pravděpodobnosti pro součást typu d_1

2. součást područky

Počet dílů 2
Pst. počtu shodných dílů na vstupu

počet	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
pst.	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Počet operací na díl 3
Pst.shody pro jednotlivé operace na dílu

operace	1	2	3
pst.	0,98	0,99	0,96

Počet operací na součást 2
Pst.shody pro jednotlivé operace na součásti

operace	1	2
pst.	0,98	0,98

Tab. 2: Vstupní pravděpodobnosti pro součást typu d_2

3. součást sedák

Počet dílů 1
Pst. počtu shodných dílů na vstupu

počet	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
pst.	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Počet operací na díl 4
Pst.shody pro jednotlivé operace na dílu

operace	1	2	3	4
pst.	0,99	0,97	0,98	0,99

Počet operací na součást 3
Pst.shody pro jednotlivé operace na součásti

operace	1	2	3
pst.	0,99	0,98	0,97

Tab. 3: Vstupní pravděpodobnosti pro součást typu d_3

4. součást opěradlo

Počet dílů 1

Pst. počtu shodných dílů na vstupu

počet	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
pst.	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Počet operací na díl 2

Pst.shody pro jednotlivé operace na dílu

operace	1	2
pst.	0.97	0.98

Počet operací na souč 1

Pst.shody pro jednotlivé operace na součásti

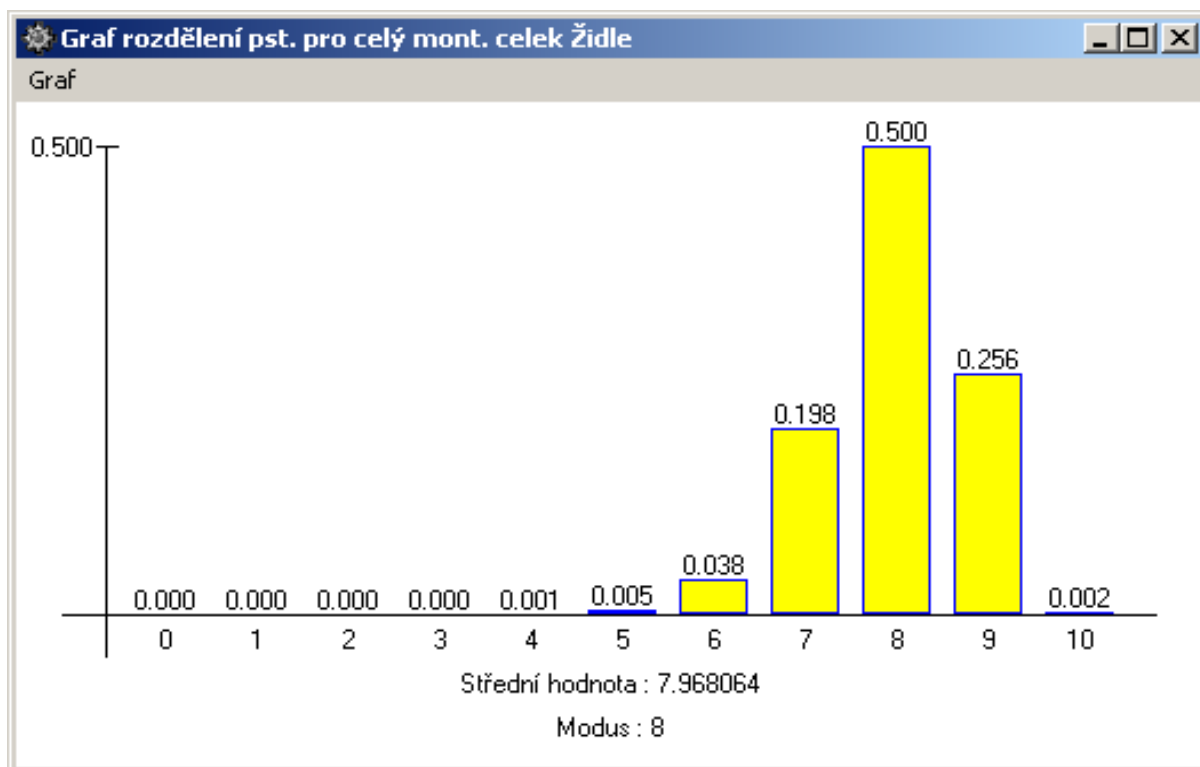
operace	1
pst.	0.99

Tab. 4: Vstupní pravděpodobnosti pro součást typu d_4

The screenshot shows the 'Jakost' software interface. The main window has tabs for 'Program', 'Výrobek', and 'Data'. The 'Data' tab is active, showing the 'Název montážního celku' (Assembly cell name) as 'Židle' and 'Číslo' (Number) as '2571'. Below this, there are input fields for 'Počet součástí' (Number of parts) set to 4, 'Počet kusů' (Number of pieces) set to 10, 'Součást číslo' (Part number) set to 1, and 'Počet dílů' (Number of parts) set to 4. There are also fields for 'Počet operací na díl' (Number of operations per part) set to 2, and 'Počet operací na součást' (Number of operations per part) set to 4. The interface displays two probability matrices. The first matrix, 'Pravděpodobnost počtu shodných dílů na vstupu' (Probability of the number of matching parts on input), is a 12x2 grid with values ranging from 0.0000000 to 1.0000000. The second matrix, 'Pravděpodobnost počtu shodných součástí na vstupu' (Probability of the number of matching parts on input), is a 10x2 grid with values ranging from 0.0000000 to 0.1317991. The interface also shows 'Pst. shody pro jednotlivé operace na dílu' (Probability of matching for individual operations on the part) and 'Pst. shody pro jednotlivé operace na součásti' (Probability of matching for individual operations on the part) with values ranging from 0.9700000 to 0.9900000.

Obr. 3: Uživatelské rozhraní pro d_1

Po realizaci výpočtu dostaneme všechny požadované matice pravděpodobností přechodu a matice (vektory) výsledných (konečných) rozdělení pravděpodobnosti vyvoláním v programu, které můžeme uložit ve výstupním textovém souboru. Vzhledem k celkovému rozsahu výstupního textu v tomto souboru jej zde neuvádíme. K dispozici je také graf výsledného rozdělení pravděpodobnosti počtu shodných montážních celků, tj. shodných vyrobených židlí, který můžeme rovněž uložit – viz obr. 4.



Obr. 4: Graf výsledného rozdělení pravděpodobnosti

5. Závěr

Pomocí uvedeného modelu a softwaru můžeme provést analýzu jakosti výrobního procesu tak, že na základě pravděpodobností shody (úspěšnosti) jednotlivých výrobních operací určíme pravděpodobnosti úspěchu výroby v jednotlivých krocích, na konci procesu výroby a po procesu montáže. Tento model může posloužit:

- k podchycení vlivu nejméně úspěšných operací výrobních procesů a iniciování jejich zdokonalování,
- k plánování počátečního počtu shodných polotovarů tak, aby na konci výrobního procesu byl s dostatečnou pravděpodobností zajištěn potřebný počet shodných součástí a montážních celků,

Jednodušší dřívější varianty popsaného modelu a softwaru byla původně vyvinuty pro oblast třískového obrábění pro dávkovou výrobu [3], ale byly aplikovány i ve slévárenství, kde se jedná o popis jakosti technologického procesu výroby dávky forem [4], a v oblasti tepelného zpracování, kde jde o popis jakosti technologického procesu pro dávku tepelně zpracovaných výrobků [5]. Ve všech uvedených případech byla modelována jakost posloupností výrobních operací pomocí expertních odhadů pravděpodobnosti shodnosti výsledků, neboť nebylo možno získat u tehdy oslovených firem věrohodná data statistického charakteru. Současný model lze aplikovat bez ohledu na sériovost výroby a to i v případě, že pravděpodobnosti shody operací jsou statisticky odhadnuty anebo určeny expertně na základě zkušeností. Vždy se však předpokládá vzájemná nezávislost jednotlivých operací a stacionarita procesu výroby v čase, tj. konstantní odhady pravděpodobností shodnosti všech výrobních a montážních operací. Popsaný autorizovaný software WJakost vznikl jako součást řešení projektu MŠMT České republiky čí. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“ a je zájemcům k dispozici.

Literatura:

- [1] Karpíšek, Z., Tomaňová, R. Nehomogenní Markovovy řetězce v jakosti. In: *Sborník konference Analýza dat pro jakost v měření a technologii*. Lázně Bohdaneč 10.–12. 4. 2001, 52-61, ISBN 80-238-7359-8.
- [2] Mandl, P. *Pravděpodobnostní dynamické modely*. Praha: Academia, 1985.
- [3] Tomaňová, R., Karpíšek, Z. Markovovy řetězce v jakosti výrobních procesů. In: *Sborník konference Analýza dat '97*. Pardubice 1997, 30-41.
- [4] Karpíšek, Z., Münsterová, E., Tomaňová, R. Využití Markovových řetězců v řízení jakosti výroby odlitku. In: *Slévárny a jejich konkurenceschopnost*. VTS ZČ, Plzeň 1998, 185-200.
- [5] Karpíšek, Z., Münsterová, E., Tomaňová, R. Markovovy řetězce pro hodnocení jakosti v tepelném zpracování výrobků. In: *Sborník konference 17. dny tepelného zpracování s mezinárodní účastí*. Brno 1998, 121-127, ISBN 80-238-1983-1.

Poděkování: Příspěvek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“, grantového projektu GAČR reg. č. 103/08/1658 „Pokročilá optimalizace návrhu složených betonových konstrukcí“ a výzkumného úkolu „Podpora řízení malých a středních firem s využitím matematických metod“ soukromé vysoké školy Akademie Sting v Brně.

ON APPROACHES FOR NON-DESTRUCTIVE DIAGNOSTICS USING STATISTICAL AND FUZZY PROGNOSTICS

K PŘÍSTUPŮM NEDESTRUKTIVNÍ DIAGNOSTIKY S VYUŽITÍM STATISTICKÉ A FUZZY PROGNOSTIKY

Miroslav Koucky, David Vališ***

*Katedra aplikované matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17 Liberec
miroslav.koucky@tul.cz

**Katedra bojových a speciálních vozidel, Fakulta vojenských technologií, Univerzita obrany v Brně
Kounicova 65, 662 10 Brno
david.valis@unob.cz

Abstract: Nowadays the system requirements are set up and evaluated in various manners. We have plenty of excellent options available talking about an item technical state. The paper deals with the mathematical processing, monitoring and analysis of the oil field data got as a result from the laser spectrography in frame of the tribodiagnostic oil tests. The mathematical methods based on time series, regression analysis and fuzzy calculations proposals are used in the paper for oil data analysis.
Keywords: PHM, diagnostics, reliability, oil, technical state predictions

Abstrakt: Požadavky na dnešní systémy jsou stanoveny a posuzovány různými způsoby. Ve vztahu k technickému systému a jeho stavu se jedná o mnoho variant. Příspěvek se zabývá matematickým zpracováním, monitorováním a analýzou dat o oleji. Tato data jsou získávána jako výsledek laserové spektrografie v rámci tribo.diaagnostických testů. V příspěvku jsou využity přístupy modelování časových řad, regresní analýzy a fuzzy výpočtů jako návrhy pro vyhodnocení stavu systému a jeho predikci na základě dat o oleji.

Keywords: PHM, diagnostika, bezporuchovost, olej, předpověď technického stavu

DOI: 10.5300/IB/2011-2/98

1 INTRODUCTION

Growing dependability and operation safety requirements of modern equipment together with increasing complexity and continuous reduction of economic costs of operation and maintenance might be satisfied among others by a consistent use of modern diagnostic systems. At present such systems can be equipped with signal processors related to board computers and with intelligent sensors which are the source of primary information on a technical state in real time. The main task of object technical state diagnostics is not only to find out incurred failures but also to prevent from occurring the failures with the help of sensible detection and changes localization in the object structure and in its behaviour changes.

A tribotechnical system, friction in it, wear and lubrication is the main subject of this paper. Regarding the tribotechnical system, the basic information on tribological process, operating and loss variables are provided. Tribology is the science and technology of interacting surfaces in relative motion. The function of a tribotechnical system (TTS) is to use the system structure to convert input variables (e.g., input torque, input speed, input type of motion, and sequence of motions) into technically utilizable output variables (e.g., output torque, output speed, output motion) (Fig. 1).

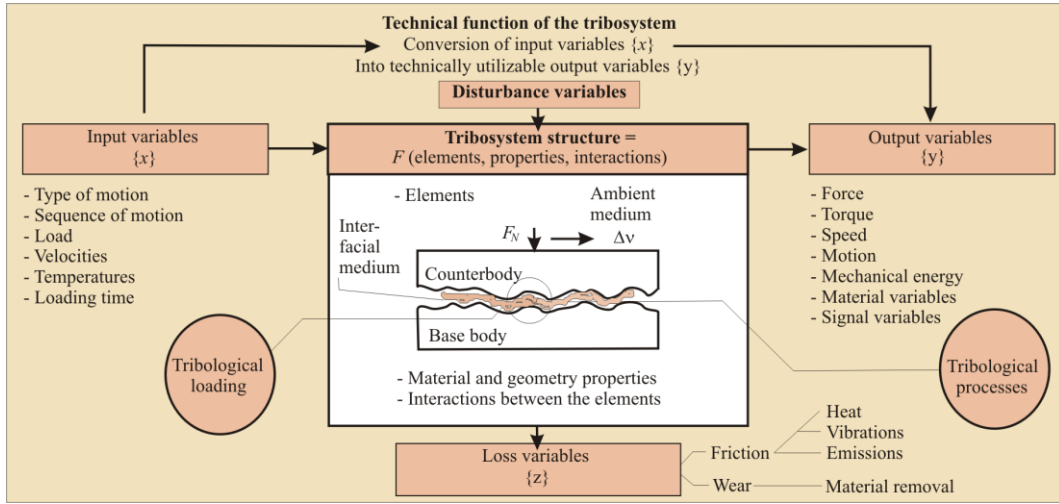


Fig. 1 Expanded representation of a tribotechnical system (TTS) according to [2]

Tribological loads in a TTS are generated by the input and disturbance variables' action on the system structure. They chiefly include contact, kinematic, and thermal processes [1]. According to [1], the tribological load represents “the loading of the surface of a solid caused by contact and relative motion of a solid, liquid or gaseous counterbody.” It is introduced via the real contact areas. Plastic deformation and wear can cause the real contact areas to change during TTS operation. When mechanical energy is converted by friction, energy dissipates, which makes itself noticeable by changing the thermal situation. Since the thermal behaviour also continuously adapts to the new conditions as a result of wear, changes to the contact geometry, and resulting changes in the friction, dynamic rather than static influencing variables determine the tribological loading in a real contact. The contact geometry, the processes occurring in the contact, and the thermal behavior of a TTS are influenced by, among other things, the load, the motion conditions, the element properties, and the friction state. While the apparent contact area alone is decisive in fluid lubrication, according to [2], in mixed lubrication, i. e., when the dimensionless film parameter

$$\Lambda = \frac{h_{\min}}{(R_{q1}^2 + R_{q2}^2)^{1/2}} \quad (1)$$

with the minimum lubrication film thickness $h_{\min}$ and the root-mean-square (rms) surface roughnesses R_{q1} and R_{q2} of the base body and counterbody is in the range $\Lambda < 3$, in boundary lubrication with $\Lambda < 1$ and for dry friction both the apparent contact area and the real contact areas must be allowed for (Fig. 1). When there are contacts between the friction bodies, interactions occur in the real contact areas and in the near-surface zones. Atomic/molecular interactions occur on the one hand and mechanical interactions on the other. Whereas the former cause adhesion on solid–solid boundary layers or are extremely important technically in the form of physisorption and chemisorptions on solid–fluid boundary layers, the latter lead to elastic and plastic contact deformations and to the development of the real contact areas.

The type of interaction that primarily occurs depends greatly on the friction state. Thus, when a lubricant is present the atomic/molecular interaction can be disregarded more often than the mechanical. Friction and wear in a given TTS ultimately depend on the interactions between the elements. The friction state, the effective mechanisms of friction and wear, and the contact state can be used to describe the interactions. The tribological loads occurring in the real contact areas produce *tribological processes*. These subsume the dynamic physical and chemical mechanisms of friction and wear and boundary-layer processes that can be attributed to friction and wear.

2 OBJECTS ON DIAGNOSTICS AND DIAGNOSTICS METHODS

Assumed objects of diagnostics, i.e. the tank engines T-72M4CZ, TATRA 810 and PANDUR II have not been ready yet in terms of construction to use the ON-LINE system, though in practice similar possibilities for other applications already exist. It results from the information stated above that we are still supposed to use OFF-LINE engine diagnostics system when sampling lubrication fluid at certain intervals, and using known and optimised special tribodiagnostic methods [4], [5], [6] and [7].

Recognition of a technical state is a basic assumption for making a diagnosis used for determining either operability or non-operability, or for detection, recognition, distinction, and localization of the system parts faults. Although the data on the object condition obtained from a lubrication fluid is available, little importance is attached to it when changing the oil. If the condition of a lubrication fluid affected not only evaluation of the object condition but also modification and optimisation of exchange dates, it would be notably positive in terms of economic optimisation for example.

When evaluating data, the information is transformed many times and provides only estimated reality which might be different from reality itself. That is why the pattern recognition is an important and very complex area of technical diagnostics. Generally the recognition is divided into two groups depending on which methods are used - syntactic or signature.

Parsing/Syntactic Method – is based on recognizing a qualitative way. A word or a symbol string represents the pattern reflecting an object, an event or a process.

Signature Method – is based on recognizing objects, events, or processes with the help of an arranged set of numbers which describe the object characteristics.

Technical state patterns are given by n -dimensional vectors of numerical values of diagnostic quantities recorded in different parts of a diagnosed object at the same time. In matrix form the technical state pattern might be defined by a column vector:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (2)$$

where numbers $x_1, x_2, \dots, x_n$ are diagnostic characteristics magnitudes, or calculated characteristics determining vector coordinates in n -dimensional space.

Single process recognition classes correspond with single diagnoses of technical states of a diagnosed object. The diagnoses set D

$$D = \{D_1, D_2, \dots, D_R\} \quad (3)$$

is explicitly classified as belonging to a diagnoses indicators set D .

Then the decision rule $D_i = s(x)$ matches each specific signature vector with a corresponding diagnose – state indicator. In practice the diagnose indicator is transformed into a formulation or a corresponding diagnose – state code.

In practice, when applying a signature recognition method, it is necessary to:

select an optimal number of diagnostic characteristics so that the necessary resolution capability of a classifier could be obtained using minimum number of quantities and measured data;

set an algorithm, i.e. the rules used when classifying into single diagnoses.

In diagnostics in many cases there is no exact line between an up state and fault, i.e. there is no mutually explicit representation among points spaces and points classes spaces and corresponding technical states – diagnoses. The failure classes intersect which means that the same magnitudes of measured characteristics might correspond with different diagnoses. If the vagueness in classes distribution is not given by a stochastic character of measured

characteristics but by the fact that the exact line among states classes does not exist, it will be good to use fuzzy set theory and adequate multi-criteria fuzzy logic.

Note:

The obtaining of functional – process diagnostic parameters which will be explicitly matched with an appropriate technical state in real time is the basic problem of modern tools, e.g. formal logic, expert systems, neural networks, fuzzy logic, and many other methods available nowadays. It is about the parameters which form the line among good, acceptable, limit, and disrepair state, or between an up state and fault in binary logic. It results from the example of an engine diagnostics that the usage of multi-criteria fuzzy logic can be appropriate in decision process when analyzing diagnostic information, e.g. applying the analysis of lubrication oil which contains relatively complex, more dimensional information on states, events, and a course of wearing. Moreover, the oil can be found in complex mechanical closed systems such as an engine, a gear box, a hydraulic system, etc. Regarding complex usage of lubrication oil it will be necessary to monitor and assess other parameters while analyzing machine wear. One of the most important information sources might be the results of ferographical analysis (a type, a size, material composition, distribution, morphology, speed of generation, etc.) and particles wear in real time, or lubrication oil degradation got by the methods FTIR, etc. However, it has not been possible to get this information in real time yet.

3 OIL FIELD DATA ASSESSMENT

Having enough field data obtained from a statistically important set of diagnosed objects is a basic assumption for solving this problem successfully (e.g. the engines themselves, etc.). We have assumed so far that the signatures belonging to a certain diagnosis – state are known, or that it is possible to suggest and set up a classifier which classifies a pattern into a right diagnosis. In practical applications the signatures are of the nature of deterministic variables with a stochastic part. As a result of this a signature vector changes and single diagnoses are not disjunctive in a signature space. When using deterministic classification methods it is not possible to decide explicitly into which diagnosis a signature vector should be classified. In such cases statistical methods are used.

Technical state diagnostics and engine monitoring includes system approach which deals with sampling, analysis and information utilisation which is important in relation to a mechanical or thermodynamic engine state. Generally it is about monitoring and assessing wearing particles and pollution in life fluids (e.g. hydraulic and engine oils), or metal wearing particles monitoring, non-metal polluting particles monitoring, products of burning process by high or low temperatures, soft pollutants of organic origin which form oil resin, so called cold sediments, oil and fuels oxidation products, hard-solid pollutants of inorganic origin, dust particles of silicon origin, etc. The monitoring covers a life fluid sample collection and its off-line analysis using easy, standard or special – instrumental methods. The increased forming of metal magnetic wearing particles is usually monitored too, using magnetic detectors with recording and signalization. Using the on-line diagnostics based on a laser particles analyser appears to be a very progressive method. This method enables us to find wearing particles according to a corresponding wearing mechanism (fatigue), adhesion, abrasion, cavitations, corrosion, vibration, combination of the situations mentioned above together with expressing the state, prognosis, trends calculations, etc., supported by intelligent software in the future in real time.

For the sake of the analysis there were used engine oil samples where, depending on cumulative operation time, it was possible to monitor concentration of wearing specific particles. It was about soot particles as a burning process product as well as abrasive metal

particles as fatigue process products, cutting abrasive processes, and sliding abrasive processes. In the Tables below there is a list of these particles.

Tab. 1 Input data of soot particles

Sample	Soot (%)	Sample	Soot (%)	Sample	Soot (%)	Sample	Soot (%)
1	0.031771816	16	0.185519338	31	0.131379321	46	0.298258215
2	0.103316583	17	0.235333502	32	0.164228171	47	0.314934731
3	0.125431612	18	0.250645906	33	0.198963374	48	0.125000909
4	0.1473445	19	0.263931781	34	0.214886084	49	0.109051809
5	0.168435231	20	0.282059491	35	0.249506742	50	0.116552792
6	0.13423948	21	0.32115677	36	0.274932355	51	0.129438415
7	0.137344524	22	0.322607964	37	0.301216871	52	0.035240542
8	0.138561517	23	0.357020229	38	0.203418538	53	0.040360887
9	0.182563171	24	0.399251908	39	0.097838856	54	0.054815382
10	0.240091324	25	0.367105871	40	0.15223287	55	0.087472059
11	0.234781966	26	0.36917761	41	0.187827662	56	0.128711835
12	0.256827921	27	0.377272516	42	0.220623925	57	0.141270027
13	0.107033946	28	0.399431527	43	0.23116672		
14	0.166212305	29	0.035686743	44	0.242863998		
15	0.193901226	30	0.119831741	45	0.264045507		

We start from the presumption, which is not always consistent with reality, that local minima correspond to oil change. We intended to straighten courses between oil changes by the help of regression. It might be expected that tangents will be constant or they will show a small growth which can be interpreted by return as increasing wearing. As an experiment it could be possible to set tangents or intervals and the corresponding oil change intervals. The real state would be diagnosed by field data on the basis of which (using statistical hypothesis testing) the intervals between oil changes would be modified (increasing tangent – shortening intervals).

The obtained field data show smoothly increasing tangent – see figures 2 – 6. Regression to the first change by the line $y = 0.002x + 0.0635$, determination coefficient $R = 0.93$, regression to the second change.

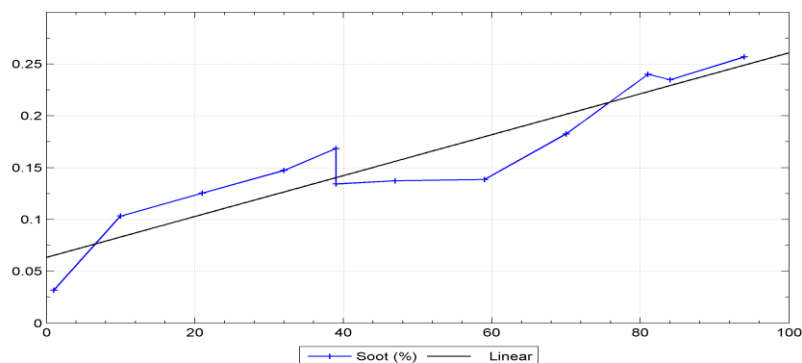


Fig. 2 Soot concentration to the first change

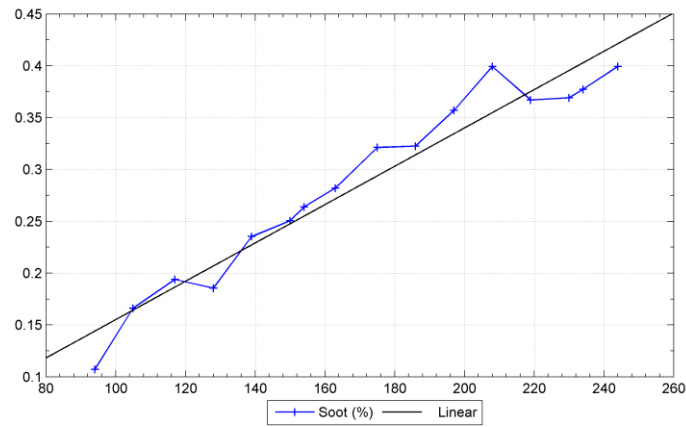


Fig. 3 Soot concentration to the second change

Regression by the line $y = 0.018x + 0.0296$, determination coefficient $R = 0.97$.

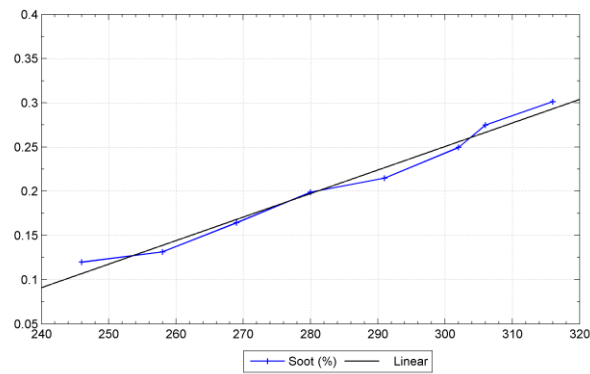


Fig. 4 Soot concentration to the third change

Regression by the line $y = 0.0027x + 0.5474$, determination coefficient $R = 0.99$.

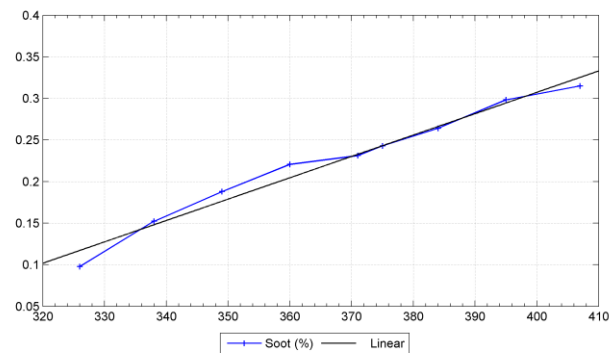


Fig. 5 Soot concentration to the fourth change

Regression by the line $y = 0.0026x + 0.72$, determination coefficient $R = 0.99$.

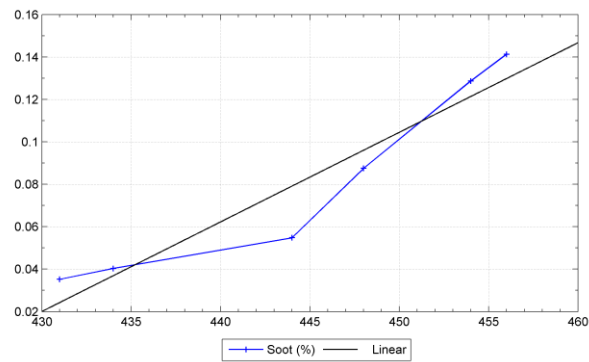


Fig. 6 Soot concentration to the fifth change

Regression by the line $y = 0.0042x - 1.79$, determination coefficient $R = 0.95$.

b) Data – cutting, sliding, fatigue

Tab. 2 Input data of cutting, sliding, fatigue particles

Sample	Cutting	Sliding	Fatigue	Sample	Cutting	Sliding	Fatigue
1	32.3381511	46.19006729	79.69317579	30	28.51932859	49.71670866	56.26627159
2	54.43107224	48.15056419	76.42622399	31	24.65869081	45.84933078	107.1173915
3	47.7745769	55.48026347	92.84393597	32	122.2669096	51.72775424	33.3818934
4	39.31019068	47.45829821	98.55917168	33	17.08991575	29.84530449	33.77119803
5	18.86055315	49.26862264	75.44025481	34	16.55065846	19.24586105	13.0867945
6	101.8758668	166.3172793	145.8493638	35	5.773758411	12.7022686	18.86094451
7	77.18351507	136.9976914	120.0213284	36	9.638239861	22.74575508	17.73239851
8	19.23974991	24.62658668	33.09119701	37	7.700790524	15.40158081	40.81693268
9	20.3872683	25.77249193	28.08072448	38	5.771924973	13.46782494	16.54559851
10	14.22187865	9.49721241	22.54989433	39	7.695899963	24.24149847	34.24646163
11	16.94164109	34.65355778	26.95227838	40	9.622930765	17.32127523	16.93596685
12	18.48091865	26.56723869	24.64204156	41	3.850395441	38.12156081	9.625988245
13	45.42258263	89.30431986	125.48771484	42	23.86369467	33.48662567	27.71286666
14	53.08758593	66.16782999	90.39810944	43	15.40647697	13.48066711	14.63811278
15	38.88133812	48.88801241	48.50426865	44	15.01138079	26.17358899	20.78513956
16	32.70757484	56.56398487	62.71806693	45	24.65330708	32.73876286	30.81295347
17	9.248981953	31.60101461	17.34331131	46	38.52843809	31.59361362	38.14325213
18	7.315261722	34.65355682	25.79618037	47	67.08244026	26.98707104	48.96461153
19	38.93652487	45.87753093	38.16693771	48	211.2935009	483.2885046	323.3624358
20	29.67515659	90.95250392	54.72660637	49	122.9303293	216.4200897	273.7473412
21	25.81434846	43.92251658	29.66719174	50	47.77693057	84.38728714	143.7644463
22	24.65829825	37.7580657	18.87903285	51	26.56841278	46.20474243	136.6924605
23	6.927727699	16.16534972	13.47210288	52	23.10237217	26.95276642	38.88703585
24	5.775592804	21.17717361	114.2053576	53	19.23974991	28.85962486	47.32773209
25	13.48066711	39.67050409	35.8188839	54	24.65134203	41.21526575	41.60434842
26	5.386788368	15.38691235	14.23700106	55	40.39064407	5.77009201	43.0862869
27	3.847949982	17.31577492	16.54559851	56	156.7627567	90.79354894	127.6534103
28	19.24586177	9.23762238	16.55065835	57	236.9066696	175.971869	184.4765167
29	107.8546431	179.933398	116.3448297				

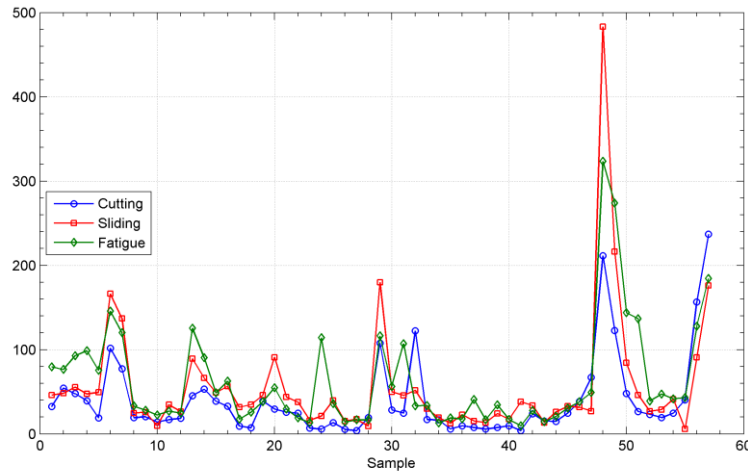


Fig. 7 Total course of cutting, sliding and fatigue particles

4 PROPOSAL FOR SYSTEM HEALTH CONDITION CALCULATION BASED ON THE RESULTS FROM TRIBODIAGNOSTICS

In case of taking single oil samples it is about a time line which might be possibly not stationary, and before making next calculation it needs to become stationary (non-constant mean value and dispersion); standard transformations do not provide satisfactory results.

Cumulative series of the quantities mentioned above show a linear course (determination coefficient higher than 0,97), so by analogy the linearization could be used for soot particles as an indicator for interval length modification between oil changes.

However, the analysis results detected from the oil provide a potential space for the modification of oil exchangeable date considering the number of particles present in the oil before the actual change. The situation is interesting especially with regard to the velocity of their occurrence. A recognized number of particles before the actual change would not necessarily mean a critical number which could threat reliable engine function or cause an accident. However, the exchange date is determined by an oil producer, and the time period in which the exchange is performed might be significantly affected by other characteristics. The presence and the number of particles which occurred in a lubricating system by mechanical processes should be viewed in the future as one of the most important factors in the process of lubrication fluid state assessment.

However, regarding the dependence courses of single particles occurrence between individual performed changes it is possible to observe slow increase in the particles number with a cumulative number of operational units. When using [3] we can apply the formula expressing velocity of wearing particles occurrence m .

$$m = m_o + at \quad (4)$$

Where $a = \frac{d_m}{d_t}$ is a coefficient of increase trend – second derivation of regression curve

m_o is a velocity of wearing products occurrence (oil degradation) – first derivation of the regression curve while crossing the applicable state limit [mg.Mh^{-1}]. The limits and criteria used for determining an up state are usually based on a statistical analysis, and some possible forms of it are put in [3].

Since the number of oil particles is fuzzy itself we have to create a rule of unacceptable increase of that number. This fact is presented by the acceleration factor of oil particles creation. Variation of that number alongside with the possible failure consequences comes to modifications of total risk number.

Fuzzy logic seems to be one of the good tools for determining the importance of the acceleration factor magnitude. Following approaches represented in figure 8 are to be adapted according to the degradation processes and limit states got by the observation. The outcome and suitable variation of the fuzzy number represents our strategy in maintenance or mission planning. These facts overcome only such possibilities since we have strict cuts of all expenses spent not only on the armed forces. Economical and costs optimization plays significant role in the life cycle costing and many other decisions made during complex system in service operation.

Practically it means that the higher number of particles in oil represented by increasing acceleration factor the more significant decrease of the system performance may occur and in fact it may represent higher risk of system failure. Such failure might have more outcomes and consequences some of which are not welcome in system operation especially in the area of military systems like battle vehicles for instance.

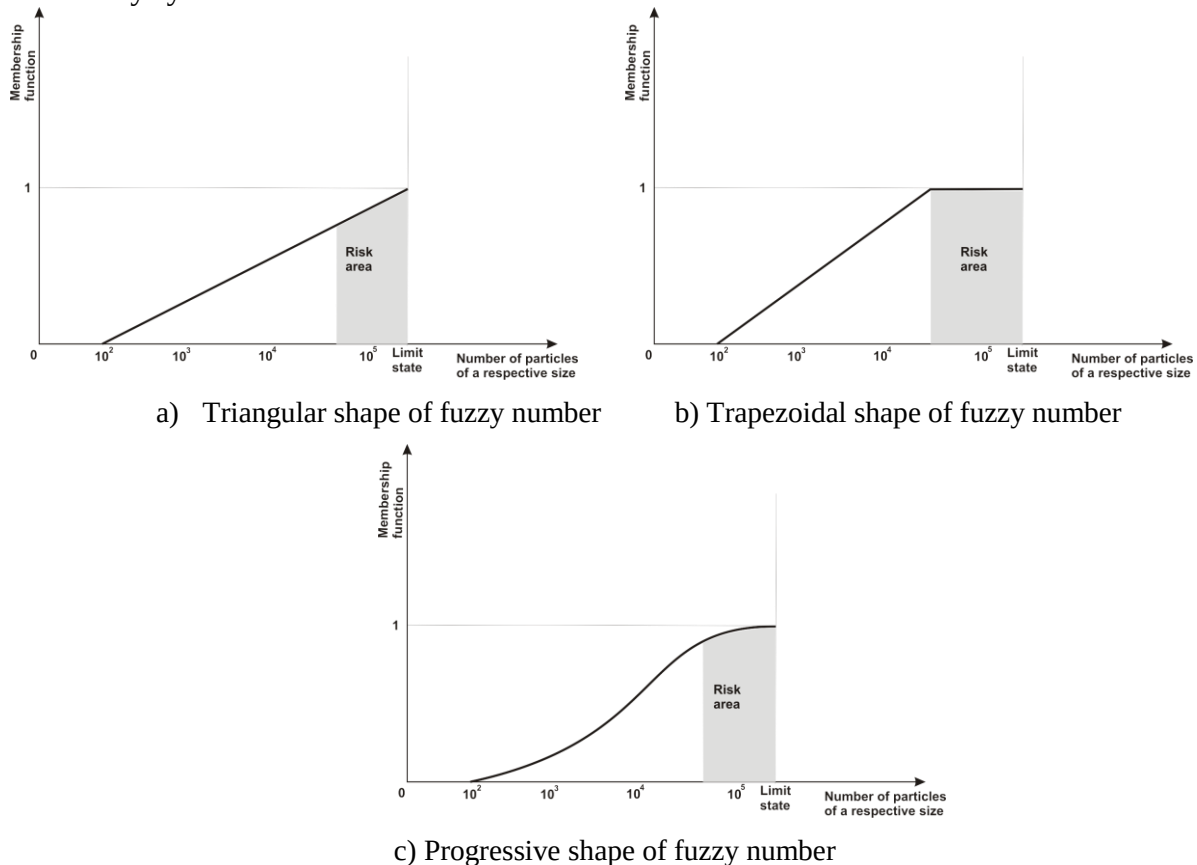


Fig. 8 Possible expressions of acceleration factor increase based on magnitude of particles number

5 CONCLUSION

The aim of the paper is to shed light on the area of tribodiagnostics including the methods which are applicable and suitable for oil analysis. Results of the analysis can be used in a much better way and the impact they made on operation characteristics of a technical object might be perceived much strongly. The data regarding lubrication fluid which is available due to performed analyses is a good source of information when considering the cost savings in

case the oil is changed systematically. It would be also good to see the results of the analysis in a broader context as an interesting reflection of an actual state of a technical object from where the oil was taken. When taking into account the results of the tribological analysis the cost savings might be manifested as extension of time of oil changes and relating maintenance costs and downtime resulting from object unavailability by extraneous causes. Since there is a wide spectrum of suitable methods while analysing an immediate state and prognosis (PHM – Prognostics and Health Monitoring), and because the area falls very deeply into interdisciplinary studies, the specification of relevant dependencies of the analysis results on a real technical state is not at all an easy task to do.

REFERENCES

- [1] Gesellschaft für Tribologie e.V.: GfT Arbeitsblatt 7: Tribologie - Verschleiß, Reibung, Definitionen, Begriffe, Prüfung (GfT, Moers 2002). In German.
- [2] CZICHOS H. and HABIG K.-H. *Tribologie-Handbuch; Reibung und Verschleiß*, 2nd edition. Weisbaden: Vieweg, 2003. In German.
- [3] LIPPAY, J. Tribological diagnostics of heavy of road lorries Tatra 815 engines which operate with OA-M6 ADS II oil. Inauguration Thesis, Brno: Military Academy 1991. In Czech.
- [4] STODOLA, J. Combustion Engines Wear and Degradation Processes Modeling. EAEC 2005 European Automotive Congress. Beograd, 2005.
- [5] STODOLA, J. Model of Lubricating Oil Filling-up, Modification, and Degradation in the Combustion Engines. Tribology 2004, Eslingen: SRN 2004.
- [6] STODOLA, J. *Machines Wear and Degradation Processes Modeling*. International Conference Transport Means 2004. ISBN 9955-09-735-3 Kaunas, Litva 2004 (pp 27 – 30)
- [7] STODOLA, J. *Wear Particles Identification and Modelling Degradation Processes of the Combustion Engines Possibilities*. Symposium „The Control and Reduction of Wear in Military Platforms“. AVT-109. Williamsburg, Virginia, USA, 2004 (15 p), Paper Reference MP-AVT-109-11, www.rta.nato.int/Reports.as.

Acknowledgements: Preparation of this paper was significantly supported by the Ministry of Education, Czech Republic project number 1M06047 „The Centre for Production Quality and Dependability“ and partially supported by the Czech Science Foundation project number 101/08/P020 „Contribution to Risk Analysis of Technical Sets and Equipment”.

SPC IMPLEMENTATION TO VERIFY THE STABILITY OF MANUFACTURING PROCESSES IN AN ENGINEERING PLANT

IMPLEMENTACE SPC PŘI OVĚŘOVÁNÍ STABILITY VÝROBNÍCH PROCESŮ V STROJÍRENSKÉM PODNIKU

Jan Král

ISQ PRAHA s.r.o., Pechlátova 19, 150 00 Praha 5,
tel./fax: 251 553 339
kral.jan@isq.cz

Abstract: *We want to mitigate the possibility of occurrence of nonconforming records. Such records are most often created in case of manual data transcription. This highly laborious, yet very frequent data acquisition method also poses an obstacle to the more general use of MS Excel for a subsequent analysis and presentation of the experimental data.*

A statistically managed process with normal quality characteristic distribution is a condition precedent that we should verify at the SPC deployment stage. Therefore, we also present the use of selected templates to test the hypothesis of normality of the quality characteristic under review.

Keywords: *data processing, hypothesis testing, import, data, macro, SQL, MS Excel*

Abstrakt: *Naší snahou je omezit možnost vzniku neshodných záznamů. Tyto nejčastěji vznikají při manuálním přepisu dat. Tato velice pracná, ale v technické praxi velice rozšířená metoda získání dat je také překážkou při širším využití MS Excel pro následnou analýzu a prezentaci experimentálních dat. Statisticky zvládnutý proces s normálním rozložením znaku jakosti je výchozí podmínkou, kterou bychom měli ověřit v etapě zavádění SPC. Proto zde také prezentujeme využití vybraných šablon pro testování hypotézy o normalitě zkoumaného znaku jakosti.*

Klíčová slova: *zpracování údajů, testy hypotéz, import, data, makro, SQL, MS Excel*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/108

1. Úvod

Program MS Excel je rozšířen a běžně dostupný bez dalších nákladů na převážné většině pracovišť zabývajících se řízením jakosti a spolehlivosti, zpracovávajících experimentální data z laboratoří a pod., ale povědomost o možnostech jeho využití je stále neuspokojivá. Na softwarovém trhu existuje sice řada speciálních, výkonnějších softwarů, ale poměrně nákladných, což často negativně ovlivňuje jejich dostupnost. S podporou programu MS Excel je možno provádět základní zpracování dat a ověřit si případnou potřebu výkonnějších, sofistikovanějších softwarů.

Na základě našich zkušeností vyplývajících ze zpětné vazby ve vzdělávacích kurzech a reakcích na publikované postupy a návody v publikacích o využití Microsoft Excel v technické praxi jsme se rozhodli doplnit tyto publikace o návod detailně popisující způsoby importu dat do programu MS Excel a demonstrovat jeho využití při testování normality.

Následující příspěvek předpokládá základní uživatelské znalosti o MS Excel 2003

Pokud pro analýzu dat použijeme předem zpracovanou šablonu, zefektivní se následné zpracování. Vlastní interakce s uživatelem je omezena na zadání dat a tisk výsledků zpracování. Nejvyšším stupněm zefektivnění je provázání nezávislého zdroje dat s vlastním

uživatelským rozhraním. Tento přístup snižuje požadavky na kvalifikaci obsluhy, neboť výsledek je prezentován graficky (srozumitelným grafem, či piktogramem) a zkracuje průběžnou dobu zpracování analýzy. Asociovaný datový zdroj aktualizuje údaje v šabloně při jejím otevření, či se stanovenou periodicitou.

Použité termíny a typy zdrojů dat

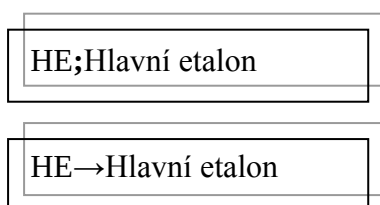
Postupným zaznamenáváním údajů v časové řadě vzniká datová základna, kterou je možno dále zpracovat. Vlastním zpracováním dat získáme informaci o chování sledovaného procesu prostřednictvím výběrových ukazatelů polohy, variability a výběrových ukazatelů. Na základě těchto informací vytváříme model reálného procesu, pomocí něhož realizujeme jeho řízení.

- Údaj – hodnota libovolné reálné veličiny
- Data – formalizované údaje
- Informace – interpretovaná data
- Znalosti – ucelený komplex informací o nějaké objektivní realitě

Typy zdrojů dat

Zdrojem dat rozumíme sadu záznamů naměřených údajů. Obvykle je záznam reprezentován jedním řádkem v textovém, nebo databázovém souboru. Pokud je zároveň měřeno více údajů, jsou v této sadě záznamů uspořádány do sloupců. Definice sloupců je závislá u textového souboru na jeho typu (příponě). MS Office standardizuje následující typy textových souborů:

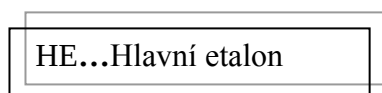
- s oddělovači (soubory s příponou .csv, nebo .txt) – údaje ve sloupcích jsou odděleny středníkem, respektive jiným vhodným symbolem, např. tabelátorem,



HE;Hlavní etalon

HE→Hlavní etalon

- pevné délky – jednotlivé sloupce jsou definovány pozicí od – do na řádku. Například sloupec č. 1 je první až pátý znak. Pokud je do sloupce zapsáno méně znaků, je sloupec zarovnán mezerami.



HE...Hlavní etalon

Pokud je zdrojem dat databáze, získáváme navíc oproti textovým souborům komfortní uživatelské prostředí pro správu dat. Správou je myšleno řízení přístupu a nástroje pro archivaci a sdílení dat. Datový server je také místo, kde se vyřizují databázové dotazy a transformace dat. Tím klesají požadavky na HW vybavení klientského počítače a také se významně snižuje zatížení počítačové sítě. K vlastní SQL databázi se klientský počítač připojuje prostřednictvím ovladače, ve kterém specifikujeme:

- databázový server,
- databázový soubor,
- autentizační informace,
- + další nepovinné položky. Nejsou-li zadány, lze je DB dotazem dynamicky měnit.

V praxi nejčastěji používané ovladače jsou pro:

- Databázi MS SQL Server
- Databázi MS Access
- Obecné rozhraní ODBC

Databáze MS Access je pro běžného uživatele atraktivní tím, že je včetně uživatelského prostředí součástí instalace MS Office, s kterým je plně integrovatelná. Pokud tato databáze na potřeby náročného uživatele již nestačí, obsahuje nástroje pro převedení databáze do prostředí MS SQL serveru.

Toto prostředí profesionálního SQL serveru si může také každý uživatel vyzkoušet, neboť v současné době je k dispozici zdarma server Microsoft SQL Server 2008 Express edition. Oproti profesionálnímu řešení SQL Server 2008 Enterprise je Express edice omezena na využití maximálně jednoho procesoru, jednoho gigabajtu operační paměti a maximální velikost jednoho databázového souboru čtyři gigabajty.

Dalším z uživatelsky zajímavých zdrojů dat je statická webová tabulka. Tento zdroj umožňuje distribuovat aktuální data prostřednictvím internetu, či intranetu. Data na straně poskytovatele jsou v pravidelných intervalech aktualizována. Jako příklad bychom mohli uvést skaldové zásoby, aktuální měnové kurzy a jiné veřejně publikované informace.

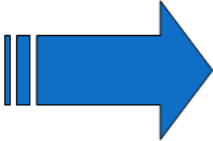
Vyšší úroveň je dynamická webová tabulka, která umožní vždy aktuální pohled na data, nebo aby se mohly vzájemně ovlivňovat webová část tabulka a jiné webové části, které podporují rozhraní připojení. Jestliže jsou připojeny dvě webové části, může uživatel provést akci v jedné webové části, čímž ovlivní obsah druhé webové části. Například klepnutím na řádek v připojené webové části Objednávky můžete filtrovat zobrazení příslušných údajů o prodeji ve webové části Prodej produktů.

Příklady importu textových souborů

Soubor s definovaným oddělovačem “;”

Tento soubor je importován obvykle do prostředí MS Excel automaticky bez větších obtíží. Tento typ souboru má obvykle příponu “csv” (Comma Separated Value).

Jednotlivé kroky při importu tohoto typu souboru budeme demonstrovat na souboru CHAR.CSV. Na následujícím obrázku vidíme vlevo zdrojový soubor a vpravo pohled na importovaná data do listu MS Excel. Soubor typu csv je přímo asociovaný s aplikací MS Excel a je v ní otevřen po otevření souboru.

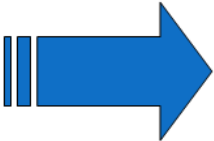


	A	B
1	HE	hlavní etalon
2	IM	informativní
3	KM	kontrolní měřidlo
4	MS	měřidlo sklad
5	NK	nezajišť.kalibrace
6	NM	nezvěstné měřidlo
7	OM	měřidlo v opravě
8	PE	pracovní etalon
9	PM	pracovní měřidlo
10	PR	prodej
11	RM	referenční materiál
12	SM	stanovené měřidlo
13	SP	spec.měřidla
14	UM	uložené měřidlo
15	WW	ztracené měřidl
16	ZM	zrušené měřidlo

Obr. 1: Převod *.csv

Soubor s definovaným oddělovačem - tabelátor

Jednotlivé kroky při importu tohoto typu souboru budeme demonstrovat na souboru CHAR.TXT. Na následujícím obrázku vidíme vlevo zdrojový soubor a vpravo pohled na průvodce importem textu do listu MS Excel. Nejprve zvolíme počáteční řádek pro import a kódování zdrojového souboru.



	A	B
1	HE	hlavní etalon
2	IM	informativní
3	KM	kontrolní měřidlo
4	MS	měřidlo sklad
5	NK	nezajišť.kalibrace

Průvodce importem textu (1/3)

Průvodce převodem textu zjistil, že data jsou oddělena.
Vyberte typ, který datům odpovídá nejlépe, a potom klepněte na tlačítko Další.

Typ zdrojových dat

Vyberte typ souboru, který datům nejlépe odpovídá:

☒ Oddělovač - Pole jsou oddělena speciálními znaky (čárka, tabulátor).
☐ Pevná šířka - Pole jsou zarovnávána do sloupců a jsou oddělena mezerami.

Začátek importu na řádku: 1 Typ souboru: 1250 : Středoevropské jazyky (Windo

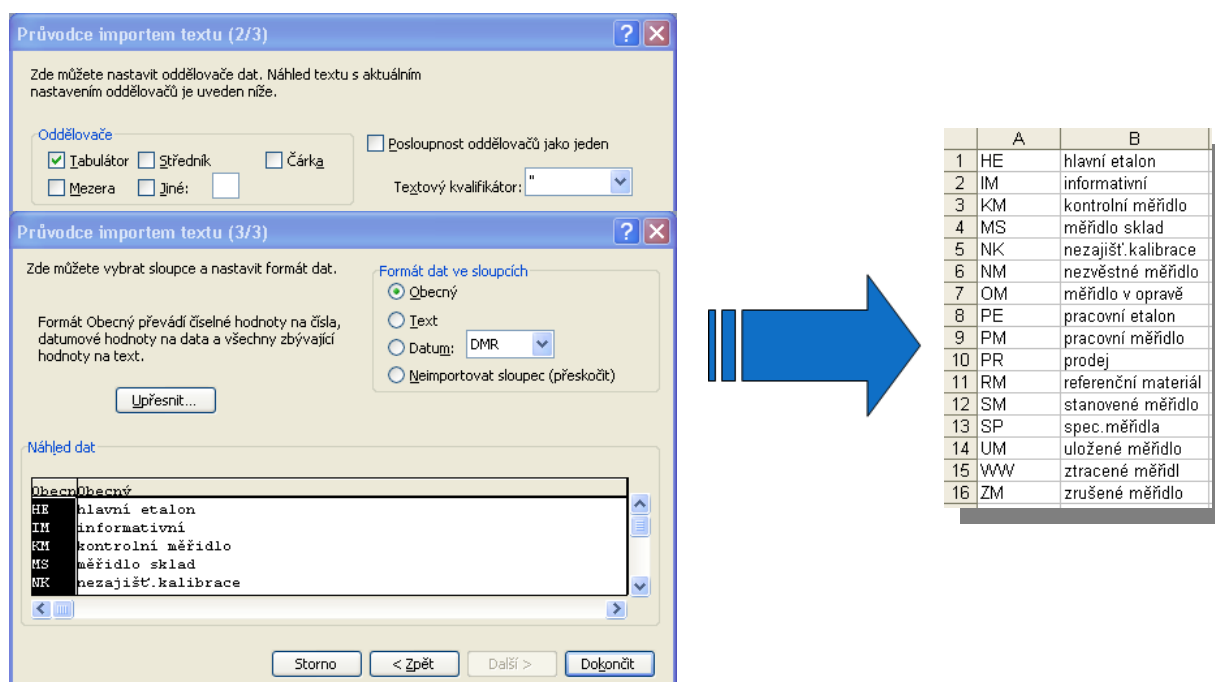
Náhled souboru D:\CHAR.txt.

1 HEhlavní etalon
2 IMinformativní
3 KMkontrolní měřidlo
4 MSměřidlo sklad
5 NKnezajišť.kalibrace

Storno < Zpět Další > Dokončit

Obr. 2: Převod *.txt/ 1

Dále zvolíme oddělovač sloupců. Pokud není uveden v seznamu, použijeme položku jiné a specifikujeme jej. V kroku 3 je možno nastavit jednotlivým sloupcům správný formát, pokud nebyl automaticky rozpoznán. Po potvrzení tlačítka dokončit máme opět data importována.

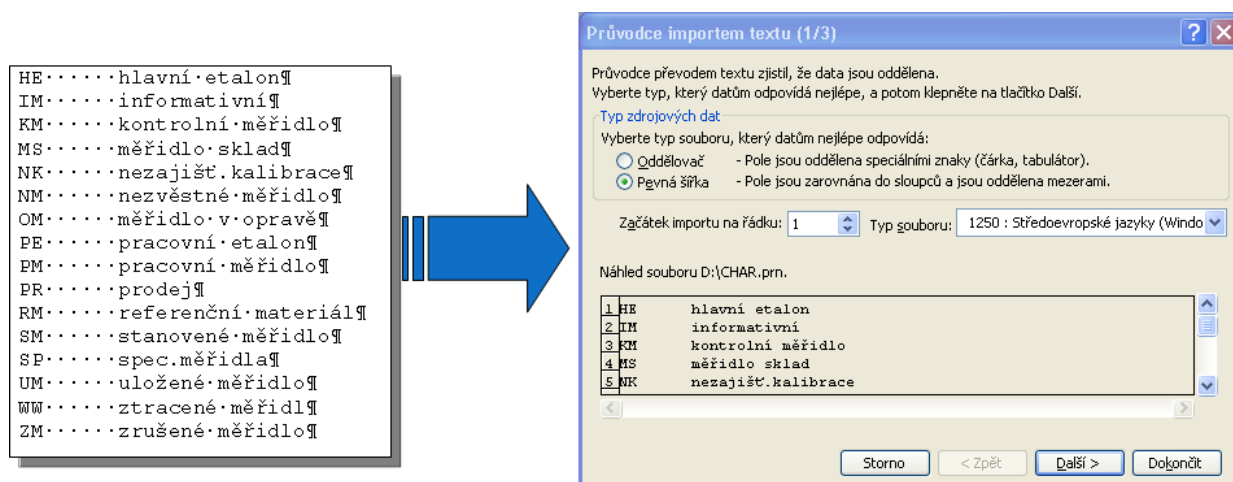


Obr. 3: Převod *.txt/ 2, 3

Soubor s pevnou délkou sloupce

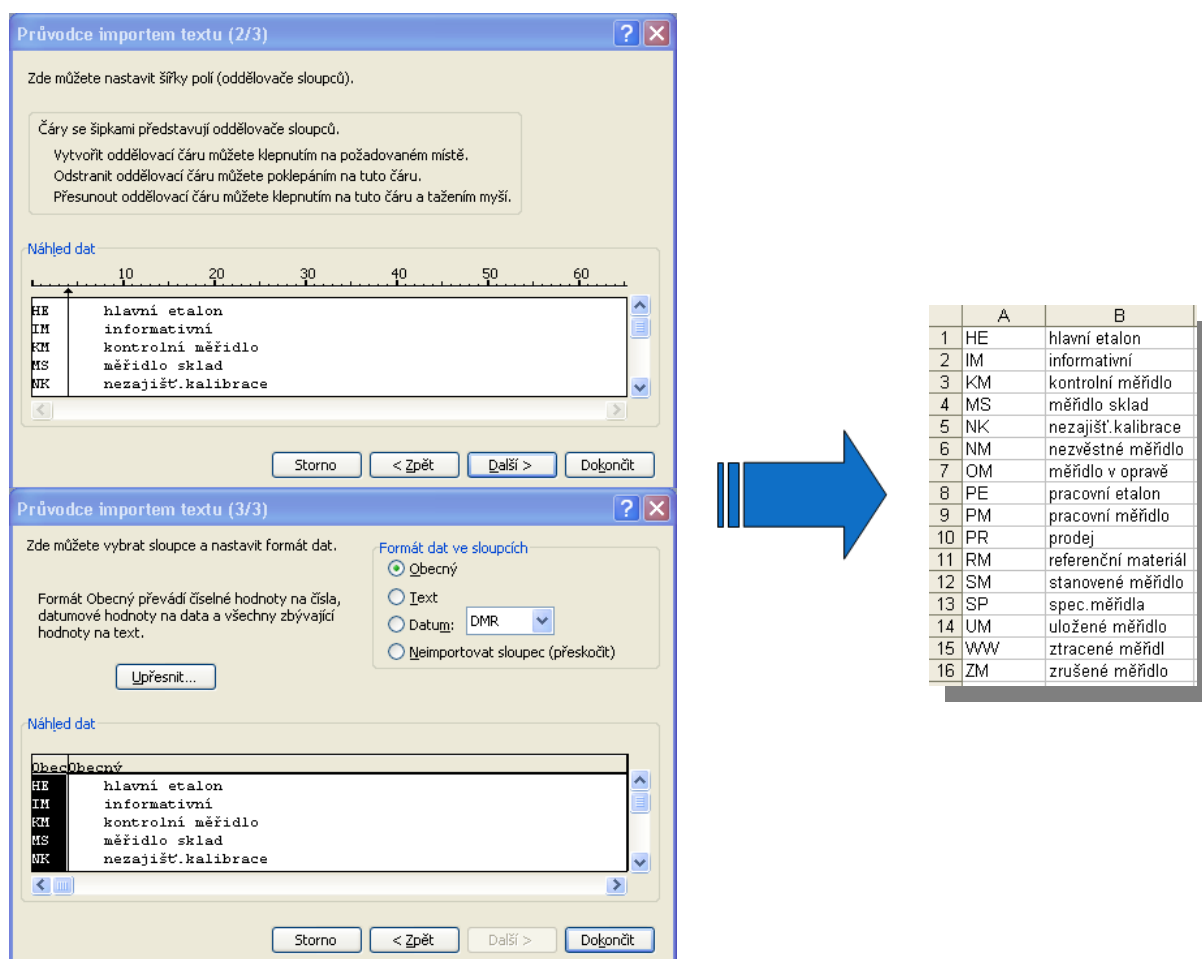
V tomto případě jsou sloupce definovány svou pozicí od – do na řádku v zdrojovém souboru.

Jednotlivé kroky při importu tohoto typu souboru budeme demonstrovat na souboru CHAR.PRN. Na následujícím obrázku vidíme shodně jako v předchozím příkladě vlevo zdrojový soubor a vpravo pohled na průvodce importem textu do listu MS Excel. Nejprve zvolíme počáteční řádek pro import a kódování zdrojového souboru.



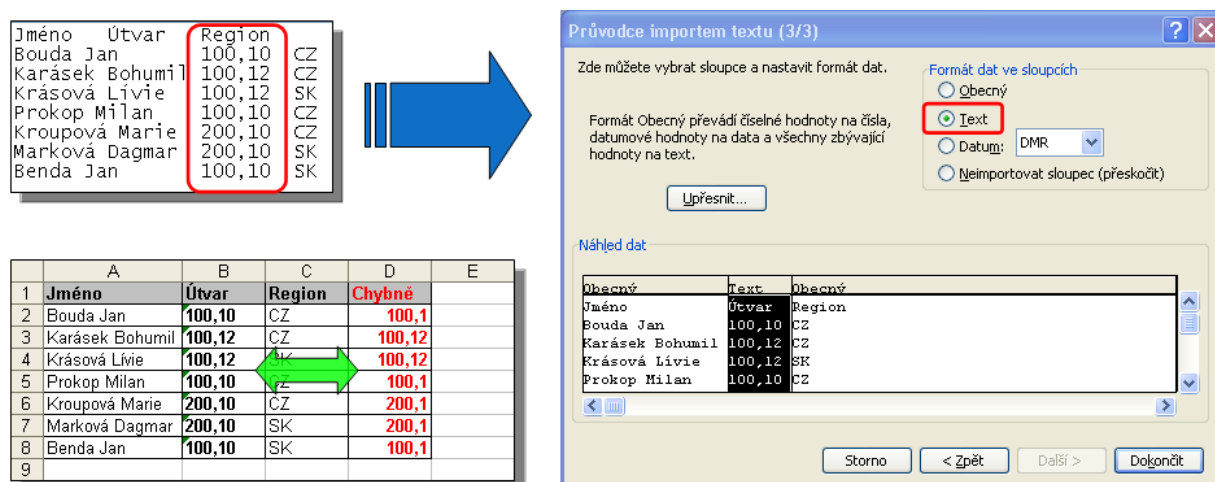
Obr. 4: Převod *.prn/ 1

Dále nastavíme šířky sloupců. Pokud není sloupec rozpoznán, vložíme oddělovač sloupce kliknutím myši. V kroku 3 je možno nastavit jednotlivým sloupcům správný formát, pokud nebyl automaticky rozpoznán. Po potvrzení tlačítka dokončit máme opět data importována.



Obr. 5: Převod *.prn/ 2, 3

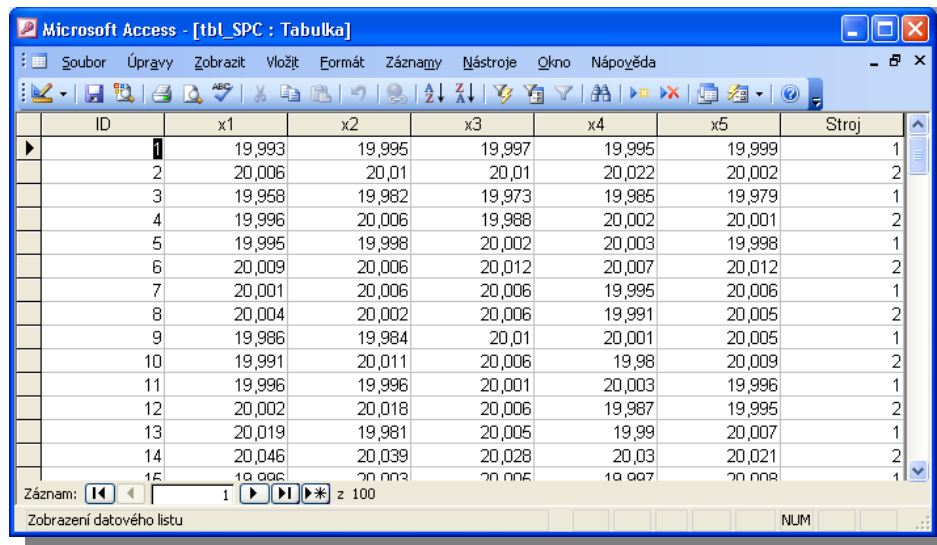
Na následujícím obrázku demonstrujeme případ, kdy není správně rozpoznán formát sloupce. Text je zde interpretován jako číslo. Pozn. MS Excel zarovnává text vlevo a čísla vpravo.



Obr. 6: Převod *.prn – chyba v definování formátu sloupce

Příklad importu z databáze MS Access

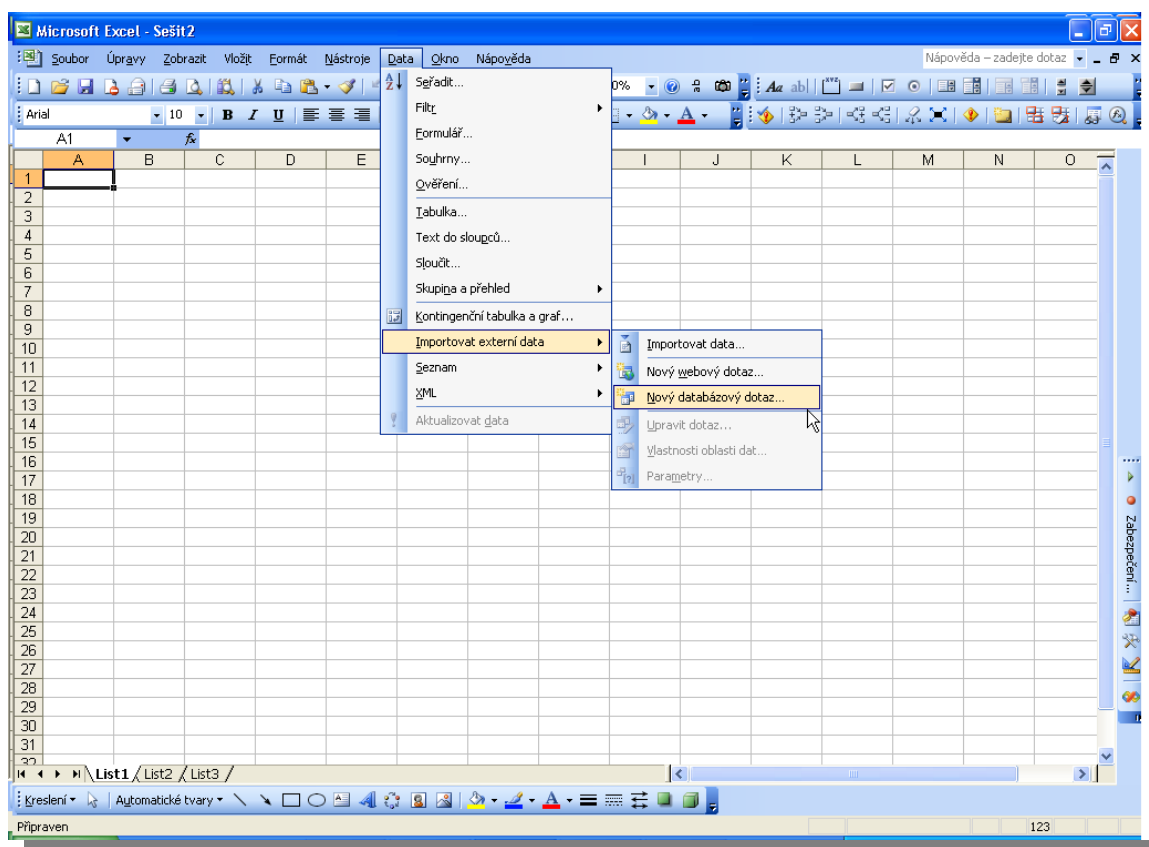
V tomto příkladu probereme krok za krokem získání dat z SQL databáze MS Access. Pro zjednodušení uvažujeme případ, kdy celá databáze je tvořena jedinou tabulkou „tbl_SPC“, která obsahuje sloupce a hodnoty viz následující obrázek.



ID	x1	x2	x3	x4	x5	Stroj
1	19,993	19,995	19,997	19,995	19,999	1
2	20,006	20,01	20,01	20,022	20,002	2
3	19,958	19,982	19,973	19,985	19,979	1
4	19,996	20,006	19,988	20,002	20,001	2
5	19,995	19,998	20,002	20,003	19,998	1
6	20,009	20,006	20,012	20,007	20,012	2
7	20,001	20,006	20,006	19,995	20,006	1
8	20,004	20,002	20,006	19,991	20,005	2
9	19,986	19,984	20,01	20,001	20,005	1
10	19,991	20,011	20,006	19,98	20,009	2
11	19,996	19,996	20,001	20,003	19,996	1
12	20,002	20,018	20,006	19,987	19,995	2
13	20,019	19,981	20,005	19,99	20,007	1
14	20,046	20,039	20,028	20,03	20,021	2
15	19,996	20,003	20,005	19,997	20,008	1

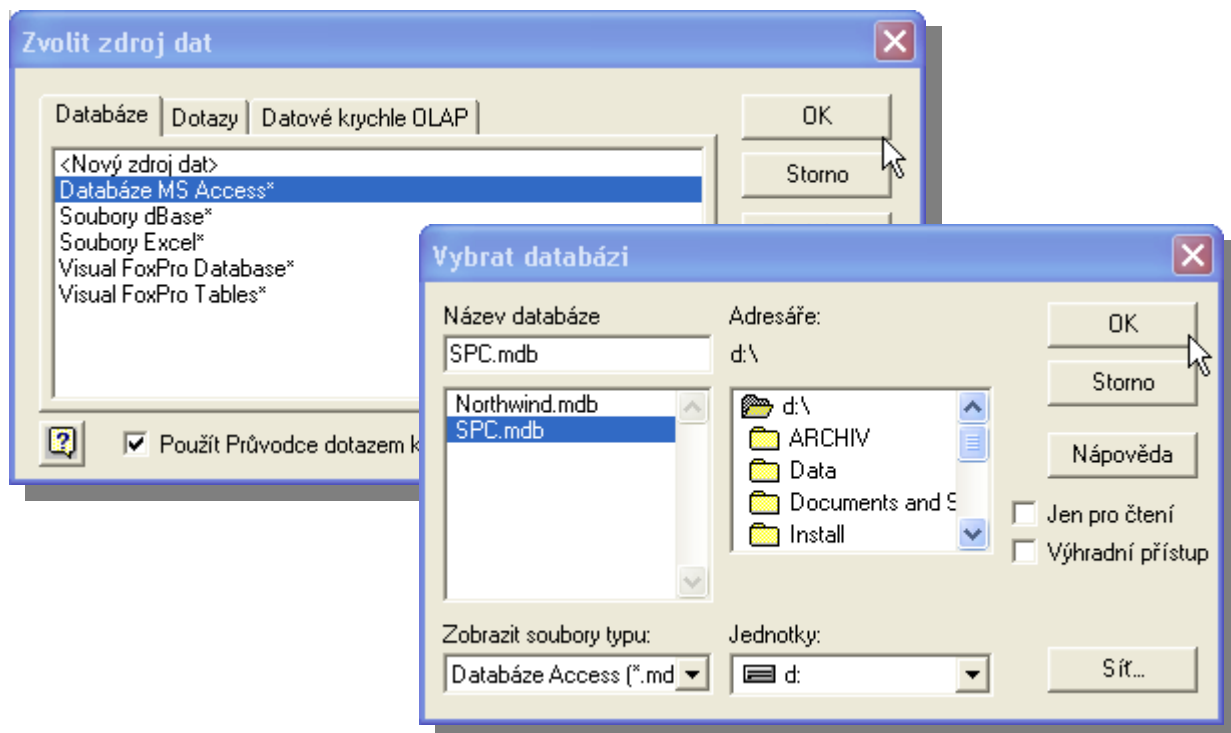
Obr. 7: Náhled na uložená data

Vlastní propojení s uloženými daty vytvoříme v následujících krocích. Z menu MS Excel zvolíme položku Data => Importovat externí data => Nový databázový dotaz, viz následující obrázek.



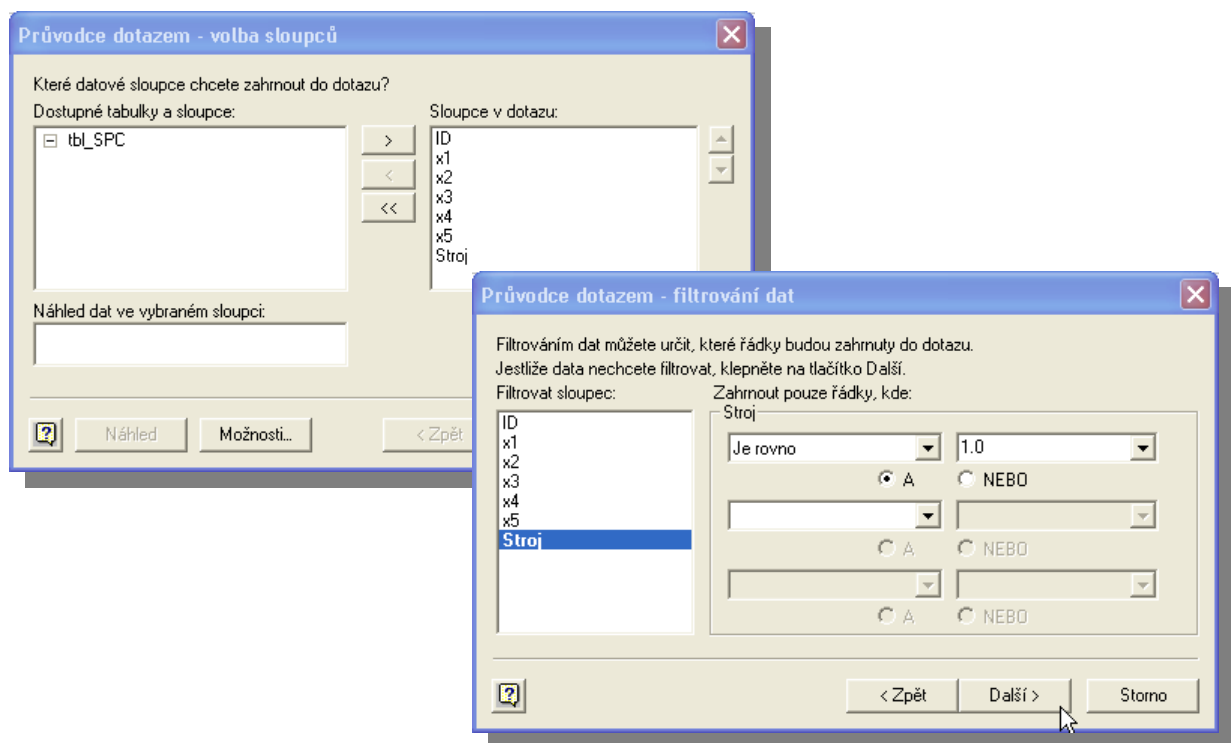
Obr. 8: Propojení s DB

Pomocí průvodce dotazem zvolíme zdroj dat „Databáze MS Access“ a zvolíme příslušný databázový soubor „SPC.mdb“.



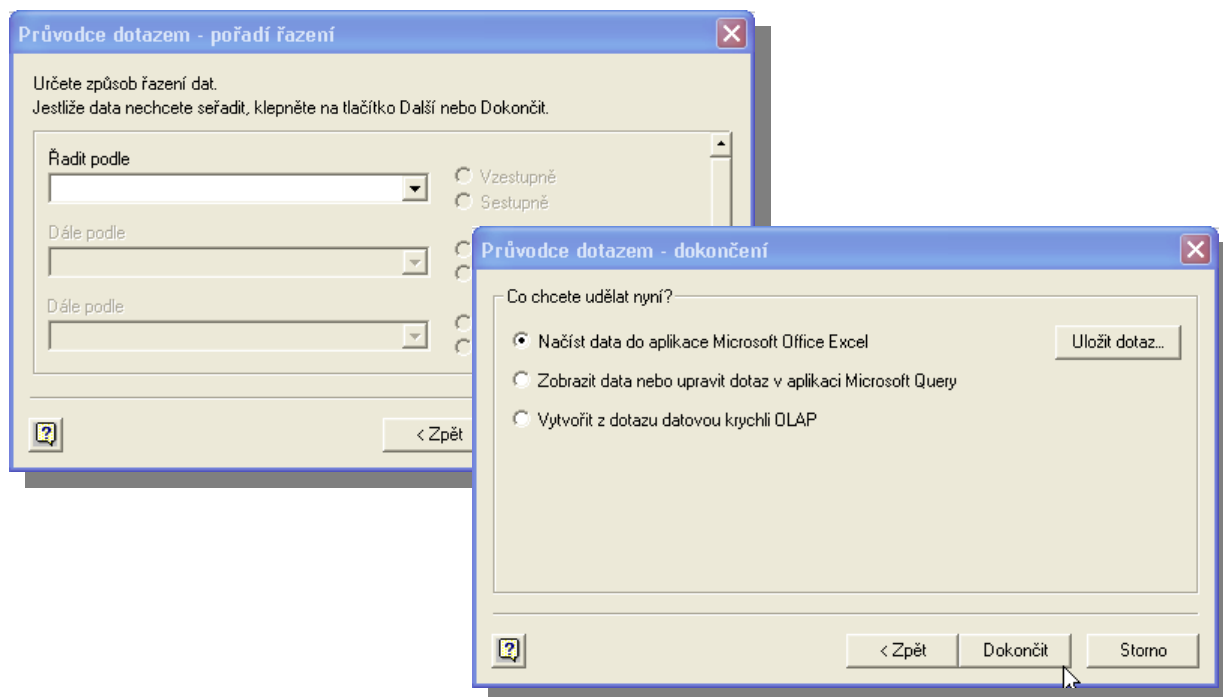
Obr. 9: Volba zdroje dat

V dalším kroku provedeme výběr požadovaných sloupců pro import a nastavíme nepovinné filtrování dat.



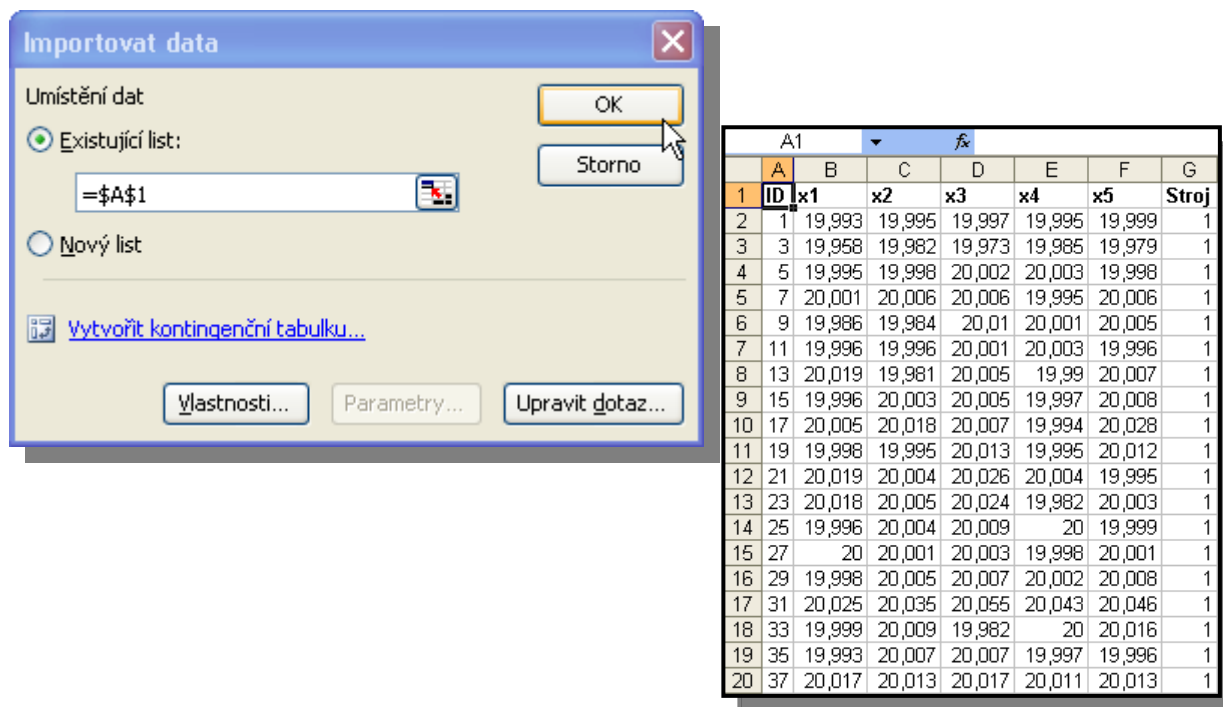
Obr. 10: Volba sloupců

V „posledním“ kroku je možné zvolit nepovinné řazení dle konkrétního sloupce a dokončit průvodce dotazem. (Řazení dat ve sloupcích může být užitečné při prezentaci ekonomických dat).



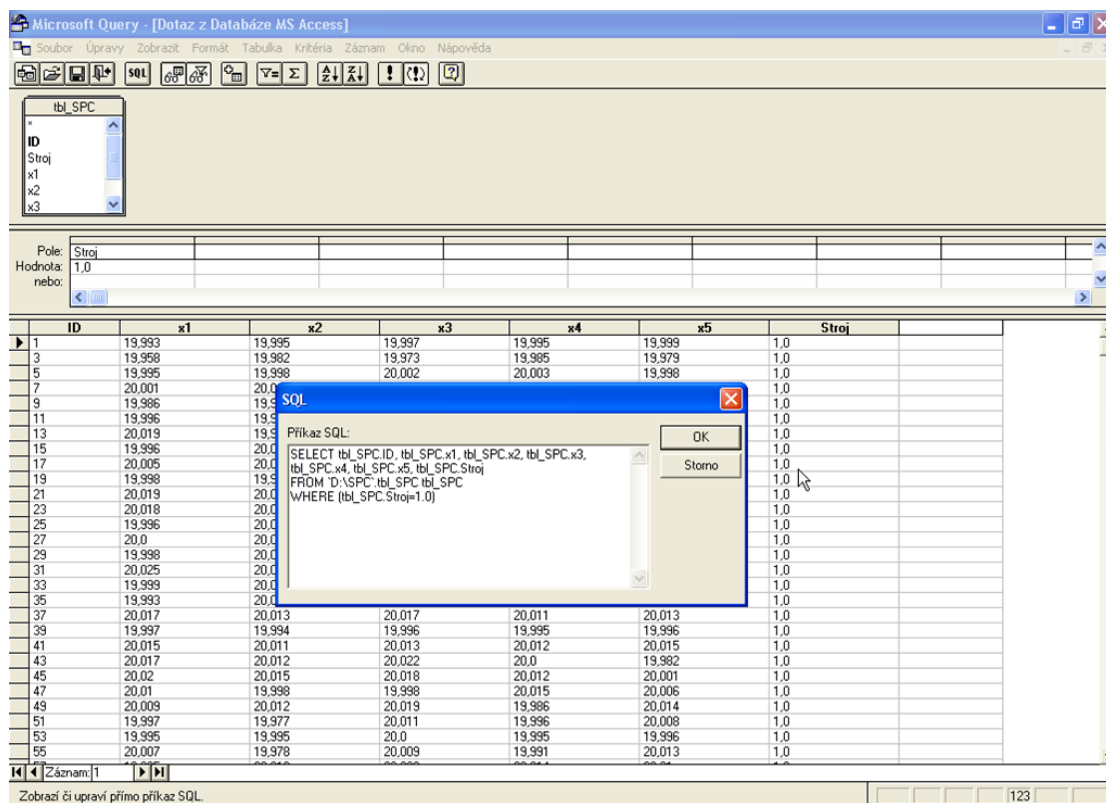
Obr. 11: Dokončení dotazu

Nyní již zbývá zvolit oblast vložení dat a případně nastavit v vlastnostech zda se má s daty vložit i záhlaví sloupců, metodu aktualizace dat, ... Od zvolené buňky se vkládají hodnoty směrem dolů a doprava.



Obr. 12: Výběr cílové oblasti pro import dat

Toto byl zjednodušený příklad bez využití vizuálního nástroje pro návrh databázového dotazu MS Query. Tento nástroj použijeme, pokud bychom cítili potřebu vytvořit složitější dotaz z více tabulek. Využití tohoto nástroje nevyžaduje znalost jazyka SQL. Základní obrazovka je rozdělena na část využitých tabulek, použité filtry a náhled dat. Tlačítkem SQL můžeme zobrazit výsledný SQL dotaz a případně jej upravit.



Obr.13: Prostředí MS Query

Z následujícího schématu je patrná struktura vytvořeného SQL dotazu.

Co?

Odkud?

Podmínka

```
SELECT tbl_SPC.ID,
tbl_SPC.x1,
tbl_SPC.x2,
tbl_SPC.x3,
tbl_SPC.x4,
tbl_SPC.x5,
tbl_SPC.Stroj
FROM `D:\SPC`.tbl_SPC tbl_SPC
WHERE (tbl_SPC.Stroj=1.0)
```

Obr. 14: Rozbor SQL Příkazu

2 Testování hypotéz o normalitě

Kolmogorovův – Smirnovův test dobré shody

Kolmogorovův – Smirnovův test je definován pro ověření hypotézy:

H_0 : data pocházejí ze základního souboru se specifikovaným rozdělením znaku jakosti;

H_1 : data pocházejí ze základního souboru s jiným než specifikovaným rozdělením znaku jakosti.

Testová statistika tohoto testu je definována následovně [3]:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left(F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \right), \quad (1)$$

kde $x_{(i)}$ jsou uspořádané napozorované hodnoty, n je rozsah výběru, F je distribuční funkce spojitého specifikovaného rozdělení sledovaného znaku jakosti.

Hypotéza H_0 se zamítá na hladině významnosti α , je-li vypočítaná hodnota testové statistiky D_n větší, než její α -kritická hodnota $D_n(\alpha)$. Tyto kritické hodnoty jsou pro $n < 100$ tabelovány. Pro rozsahy výběrů $n > 100$ jsou uvedeny přibližné výrazy. V literatuře [4] jsou uvedeny tyto přibližné výrazy ve tvaru

$$D_n(\alpha) = \sqrt{(1/2n) * \ln(2/\alpha)}, \quad (2)$$

kde $\ln$ je přirozený logaritmus. V šabloně „Kolmogorovův – Smirnovův test. xls“ je použita tato aproximace (2).

V literatuře se někdy pracuje s testovou statistikou ve tvaru:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left| F(x_{(i)}) - \frac{i}{n} \right|, \quad (3)$$

kterou lze přepsat jako

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left(F(x_{(i)}) - \frac{i}{n}, \frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \right).$$

Tento tvar testové statistiky používá např. MINITAB. Obě testové statistiky si jsou prakticky rovny pro rozsahy výběrů $n \geq 50$.

Uvedeného testu se nejčastěji používá k ověření, že napozorovaná data (hodnoty sledovaného znaku jakosti) pocházejí ze základního souboru s normálním rozdělením. Nejsou-li parametry normálního rozdělení známy (tj model není úplně specifikovaný), nahradí se odhady. V tomto případě se musí použít modifikovaný Kolmogorovův-Smirnovův test [2] a upravené kritické hodnoty dle Lillieforse.

V souboru „Kolmogorovův – Smirnovův test.xls“ je proveden výpočet testové statistiky D_n podle výrazu (1) a její porovnání s výše uvedenými kritickými hodnotami uvedenými v tabulce 1, resp. v tabulce 2. Viz příklad dále.

Příklad - použití šablony

Kolmogorovův - Smirnovův test normality															
			$\mu =$	10			$x \text{ bar} =$	10,26566					Hladina významnosti $\alpha =$	0,05	
			$\sigma =$	1			$s =$	1,03934					Testová statistika $D_n (1)$	0,125186	
							$n =$	50					Kritická hodnota	0,122358	
	i	x(i)	F(x(i))	(i-1)/n	i/n	F(x(i))-(i-1)/n	i/n - F(x(i))	ABS(F(x(i))-i/n)					Normalitu	zamítnout	
9	1	8,382	0,03497	0	0,02	0,034965	-0,014965	0,014965							
10	2	8,526	0,04708	0,02	0,04	0,027084	-0,007084	0,007084							
11	3	8,762	0,07398	0,04	0,06	0,033984	-0,013984	0,013984							
12	4	8,868	0,08935	0,06	0,08	0,029352	-0,009352	0,009352							
13	5	9,170	0,1459	0,08	0,10	0,065899	-0,045899	0,045899							
14	6	9,175	0,147	0,1	0,12	0,047003	-0,027003	0,027003							
15	7	9,246	0,16328	0,12	0,14	0,043281	-0,023281	0,023281							
16	8	9,275	0,17025	0,14	0,16	0,030254	-0,010254	0,010254							
17	9	9,299	0,17617	0,16	0,18	0,016167	-0,003833	0,003833							
18	10	9,488	0,22716	0,18	0,20	0,047163	-0,027163	0,027163							
19	11	9,497	0,22978	0,2	0,22	0,029782	-0,009782	0,009782							
20	12	9,519	0,23626	0,22	0,24	0,016256	-0,003744	0,003744							
21	13	9,619	0,26691	0,24	0,26	0,026911	-0,006911	0,006911							
22	14	9,652	0,27745	0,26	0,28	0,017451	-0,002549	0,002549							
23	15	9,699	0,2928	0,28	0,30	0,012804	-0,007196	0,007196							
24	16	9,738	0,30584	0,3	0,32	0,005836	-0,014164	0,014164							
25	17	9,810	0,33054	0,32	0,34	0,010544	-0,009456	0,009456							
26	18	9,821	0,33439	0,34	0,36	-0,005612	0,025612	0,025612							
27	19	9,885	0,35709	0,36	0,38	-0,002911	0,022911	0,022911							
28	20	9,925	0,37154	0,38	0,40	-0,008455	0,028455	0,028455							
29	21	9,928	0,37264	0,4	0,42	-0,027364	0,047364	0,047364							
30	22	9,970	0,38803	0,42	0,44	-0,031974	0,051974	0,051974							
31	23	9,976	0,39024	0,44	0,46	-0,049761	0,069761	0,069761							
32	24	10,009	0,40248	0,46	0,48	-0,057525	0,077525	0,077525							
33	25	10,036	0,41256	0,48	0,50	-0,067441	0,087441	0,087441							
34	26	10,041	0,41443	0,5	0,52	-0,085567	0,105567	0,105567							
35	27	10,055	0,41969	0,52	0,54	-0,100310	0,120310	0,120310							
36	28	10,161	0,45989	0,54	0,56	-0,080105	0,100105	0,100105							
37	29	10,173	0,46448	0,56	0,58	-0,095520	0,115520	0,115520							
38	30	10,200	0,47481	0,58	0,60	-0,105186	0,125186	0,125186							

Obr. 15: Kolmogorovův – Smirnovův test dobré shody

- Do sloupce D se zadají/naimportují napozorovaná data. Po stisknutí tlačítka "Výpočet" se data uspořádají podle velikosti $x_{(i)}$ od nejmenší hodnoty a do buněk M4, M5 a M6 jsou automaticky vypočítány výběrové charakteristiky dat (výběrový průměr $\bar{x}$, výběrová směrodatná odchylka s a rozsah výběru n).
- Pokud vkládaných dat do sloupce D, která se např. kopírují z nějakého souboru, je méně, než ve sloupci již bylo zapsáno, je třeba minulá data vymazat.
- Pokud se pracuje s modelem normálního rozdělení, který **je** plně specifikován (jsou dány - známy) parametry μ a σ , zapíše se do buněk H4 a H5 a zvolí se „Ano“.
- Pokud se pracuje s modelem normálního rozdělení, který **není** plně specifikován (parametry μ a σ se odhadují z dat pomocí výběrového průměru $\bar{x}$ a výběrové směrodatné odchylky s) zvolí se „Ne“.
- Zvolí se hladina významnosti, jedna z nabídnutých (0,10; 0,05; 0,01).
- Stiskne se tlačítko „Výpočet“.
- V buňce S5 je vypočítaná hodnota testové statistiky Kolmogorovova-Smirnovova testu $D_n = 0,0,125186$ podle výrazu (1).
- Ta se porovnává s kritickou hodnotou $D_n(\alpha) = 0,122358$ zapsanou v buňce S6, do které se automaticky překopíruje jedna z odpovídajících kritických hodnot z buněk S13, S15, resp. S17.

- Pokud testová statistika D_n v buňce S5 je větší než kritická hodnota $D_n(\alpha)$ v buňce S6, zamítáme testovanou hypotézu, že náhodný výběr (sloupec D) pochází z uvažovaného, normálního rozdělení. V opačném případě, je-li testová statistika D_n v buňce S5 menší, nebo rovna kritické hodnotě $D_n(\alpha)$ v buňce S6, nemáme důvod, testovanou hypotézu zamítnout. Výsledek testu je slovně vyjádřen v buňce S7.
- Pokud se pracuje s modelem normálního rozdělení, který je plně specifikován („Ano“), tj. jsou známy hodnoty parametrů μ a σ , zapsané v buňkách H4 a H5 a $n < 100$ přiřadí se tabelovaná kritická hodnota $D_n(\alpha)$, která se zapíše do buňky S13. V případě že $n > 100$ se vypočítá její přibližná hodnota $D_n(\alpha)$ podle výrazu (2) a vloží automaticky do buňky S15. Do buňky S6 se automaticky přepíše odpovídající kritická hodnota z buňky S13, resp. S15.
- Pokud se pracuje s modelem normálního rozdělení, který není plně specifikován („Ne“), tj. hodnoty parametrů μ a σ se odhadují pomocí výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky, vychází se z tabelovaných kritických hodnot počítaných z rovnic mocninných trendů proložených těmito hodnotami:

$$\begin{array}{lll} \alpha = & 0,1 & Y = 0,7083 \cdot X^{-0,4702} \\ \alpha = & 0,05 & Y = 0,7712 \cdot X^{-0,4706} \\ \alpha = & 0,01 & Y = 0,8822 \cdot X^{-0,4668} \end{array}$$

Andersonův – Darlingův test dobré shody

Andersonův – Darlingův test je definován pro ověření hypotézy:

H_0 : data pocházejí ze základního souboru se specifikovaným rozdělením znaku jakosti;

H_1 : data pocházejí ze základního souboru s jiným než specifikovaným rozdělením znaku jakosti.

Testová statistika tohoto testu je definována následovně:

$$AD = -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_{(i)}) + \ln(1-F(x_{(n+1-i)})) \} \right] - n, \quad (4)$$

kde $x(i)$ jsou podle velikosti vzestupně uspořádané napozorované hodnoty, n je rozsah výběru, F je distribuční funkce specifikovaného rozdělení sledovaného znaku jakosti.

Hypotéza H_0 se zamítá na hladině významnosti α , je-li vypočítaná hodnota testové statistiky AD větší, než její $(1-\alpha)$ kvantil. V případě, že specifikovaným rozdělením je v praxi nejčastěji normální rozdělení, potom pro velký rozsah výběru je přibližná hodnota 0,95 – kvantilu [4] rovna

$$AD_{0,95} = 1,0348 (1 - 1,013/n - 0,93 / n^2), \quad (5)$$

V případě normálního rozdělení počítá MINITAB testovou statistiku na základě výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky místo na základě známých parametrů μ a σ . Počítá rovněž přibližnou p-hodnotu, která je citlivější pro rozhodnutí o přijetí, či zamítnutí testované hypotézy.

Pomocí zjištěné hodnoty testové statistiky AD se vypočítá hodnota

$$A = AD \cdot \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2} \right). \quad (6)$$

V závislosti na velikosti A se odhaduje příslušná p-hodnota [5]:

$$\begin{aligned} \text{pokud } 13 > A \geq 0,6, & \quad \text{je } p = \exp(1,2937 - 5,709A + 0,0186A^2); \\ 0,6 > A \geq 0,34, & \quad \text{je } p = \exp(0,9177 - 4,279A + 1,38A^2); \\ 0,34 > A \geq 0,2, & \quad \text{je } p = 1 - \exp(-8,318 + 42,796A - 59,938A^2); \\ 0,2 > A, & \quad \text{je } p = 1 - \exp(-13,436 + 101,14A - 223,73A^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Příklad - použití šablony

V souboru „Andersonův-Darlingův test.xls“ je na příkladě proveden výpočet testové statistiky AD a její porovnání s přibližnou kritickou hodnotou, počítanou podle [4]. Rovněž je proveden výpočet p-hodnoty podle [5].

Andersonův - Darlingův test normality									
			$\mu =$	10,000		$\bar{x}$	10,26566		p-hodnota =
			$\sigma =$	1,000		s	1,03934		testová statistika AD
			alfa =	-		n	50		0,05 kritická hodnota
	i	x(i)	F(x(i))	ln F(x(i))	x(n)	F(x(n))	ln(1-F(x(n+1)))	ad	Normalitu
9	1	8,38	0,052831	-2,94065	13,12	0,999099	-7,011794	-9,95244574	A =
10	2	8,53	0,070241	-2,65583	12,88	0,998037	-6,233132	-26,6668732	
11	3	8,76	0,107858	-2,22694	12,01	0,977890	-3,811727	-30,1933308	Výpočet p - hodnoty:
12	4	8,87	0,128817	-2,04936	11,96	0,974826	-3,681954	-40,1192045	Pokud $13 > A \geq 0,6$
13	5	9,17	0,203269	-1,59322	11,77	0,961553	-3,258476	-43,6652943	Pokud $0,6 > A \geq 0,34$
14	6	9,18	0,204686	-1,58628	11,69	0,954102	-3,081336	-51,3437661	Pokud $0,34 > A \geq 0,20$
15	7	9,25	0,225425	-1,48977	11,64	0,949497	-2,985731	-58,1815037	Pokud $0,20 > A$
16	8	9,28	0,234226	-1,45147	11,53	0,936495	-2,756638	-63,1215968	
17	9	9,30	0,241652	-1,42026	11,32	0,906248	-2,367104	-64,3851676	
18	10	9,49	0,304326	-1,18966	11,01	0,844231	-1,859381	-57,9317292	
19	11	9,50	0,307482	-1,17934	11,00	0,840860	-1,837973	-63,3635365	
20	12	9,52	0,315258	-1,15436	10,99	0,839157	-1,827328	-68,5788927	
21	13	9,62	0,351602	-1,04526	10,89	0,813804	-1,680953	-68,1552347	Výpočet
22	14	9,65	0,36392	-1,01082	10,87	0,808396	-1,652324	-71,9049019	
23	15	9,70	0,381707	-0,9631	10,62	0,733029	-1,320615	-66,2277878	
24	16	9,74	0,396661	-0,92467	10,57	0,716678	-1,261170	-67,7611629	
25	17	9,81	0,424655	-0,85648	10,50	0,690758	-1,173631	-66,9936398	
26	18	9,82	0,428969	-0,84637	10,40	0,655790	-1,066503	-66,9505947	
27	19	9,89	0,454223	-0,78917	10,34	0,634577	-1,006699	-66,4470893	
28	20	9,93	0,470107	-0,75479	10,26	0,603339	-0,924674	-65,4992584	

Obr. 16: Andersonův – Darlingův test dobré shody –specifikované rozdělení

- Do sloupce D se vloží/ naimportují napozorovaná data a do buněk G4 a G5 se zapíše daná střední hodnota μ a daná směrodatná odchylka σ . V tomto případě se předpokládá plně specifikovaný model normálního rozdělení, to znamená, že je třeba zvolit „**Ano**“.
- Po stisknutí tlačítka "Výpočet" se data uspořádají podle velikosti $x_{(i)}$ od nejmenší hodnoty (sloupec D), uspořádají se podle velikosti $x_{(n)}$ od největší hodnoty (sloupec I) a do buněk L4, L5 a L6 jsou automaticky vypočítány výběrové charakteristiky dat (výběrový průměr $\bar{x}$, resp. $\bar{\bar{x}}$, výběrová směrodatná odchylka s a rozsah výběru n).
- V buňce O5 je vypočítaná hodnota testové statistiky Andersonova-Darlingova testu, $AD = 1,6606$ vypočítaná podle výrazu (4).
- Při tomto testu se automaticky předpokládá hladina významnosti $\alpha = 0,05$ a nelze ji měnit. Pro tuto hladinu významnosti je počítána kritická hodnota ($AD_{0,05} = 1,0135$)

zapsaná do buňky O6, vypočítaná podle výrazu (5).

- Porovnání testové statistiky AD (buňka O5) a kritické hodnoty $AD_{0,05}$ (buňka O6) vede k rozhodnutí o výsledku testu.

Pokud testová statistika AD v buňce O5 je větší než kritická hodnota $AD_{0,05}$ v buňce O6, zamítáme testovanou hypotézu, že náhodný výběr (sloupec D) pochází z uvažovaného, normálního rozdělení. V opačném případě, je-li testová statistika AD v buňce O5 menší, nebo rovna kritické hodnotě $AD_{0,05}$ v buňce O6, nemáme důvod, testovanou hypotézu zamítnout. Výsledek testu je slovně vyjádřen v buňce O7.

- Podobně jako v softwaru MINITAB lze i zde provést Andersonův-Darlingův test na základě výběrového průměru ($\bar{x}$) a výběrové směrodatné odchylky (s), místo známých parametrů μ a σ , tj. případ, kdy se pracuje s modelem normálního rozdělení, který není plně specifikován, přepínač volby „Ne“. Výběrový průměr (L4) a výběrová směrodatná odchylka (L5) se automaticky vypočítají po stisknutí tlačítka "Výpočet". Hypotetická distribuční funkce normálního rozdělení $F(x)$ ve sloupci F a výpočty v dalších sloupcích, jsou počítány na základě těchto výběrových charakteristik.
- V tomto případě se k rozhodnutí o platnosti hypotézy používá p-hodnota rozdělení testové statistiky AD. Pokud vypočítaná p-hodnota (buňka O4) je menší, než zvolená hladina významnosti α (alfa), zapsaná do buňky G6, testovanou hypotézu zamítáme. V opačném případě nemáme důvod testovanou hypotézu zamítnout.
- Hladinu významnosti α je možno v tomto případě volit, pokud se tak nestane, do buňky G6 se automaticky zapíše hodnota $\alpha = 0,05$.
- Přibližná, pro praxi zcela vyhovující, p-hodnota Andersonova-Darlingova testu v buňce O4 je vypočítaná na základě veličiny A (výraz 6) vypočítané v buňce O9 a systému nerovností (vztahy 7).

Andersonův - Darlingův test normality															
				$\mu =$	10,000			$\bar{x} =$	10,26566					$p\text{-hodnota} =$	0,0450380
				$\sigma =$	1,000			$s =$	1,03934					testová statistika AD	0,7595
				$\alpha =$	0,05			$n =$	50					0,05 kritická hodnota	1,0135
	i	x(i)	F(x(i))	ln F(x(i))	x(n)	F(x(n))	ln(1-F(x(n+1)))	ad						Normalitu	zamítnout
9	1	8,38	0,034965	-3,3534	13,12	0,996995	-5,807549	-9,16094681						A =	0,771593
10	2	8,53	0,047084	-3,05582	12,88	0,994119	-5,136098	-24,5757599							
11	3	8,76	0,073984	-2,6039	12,01	0,953544	-3,069258	-28,3657921							
12	4	8,87	0,089352	-2,41517	11,96	0,948165	-2,959696	-37,6240609							
13	5	9,17	0,145899	-1,92484	11,77	0,925972	-2,603317	-40,7534396							
14	6	9,18	0,147003	-1,91731	11,69	0,914121	-2,454816	-48,0933362							
15	7	9,25	0,163281	-1,81228	11,64	0,906969	-2,374821	-54,4323721							
16	8	9,28	0,170254	-1,77046	11,53	0,887365	-2,183602	-59,3109774							
17	9	9,30	0,176167	-1,73632	11,32	0,844352	-1,860158	-61,1401341							
18	10	9,49	0,227163	-1,48209	11,01	0,763649	-1,442437	-55,5659954							
19	11	9,50	0,229782	-1,47062	11,00	0,759476	-1,424937	-60,8067722							
20	12	9,52	0,236256	-1,44284	10,99	0,757375	-1,416239	-65,7587823							
21	13	9,62	0,266911	-1,32084	10,89	0,726623	-1,296904	-65,4436004							
22	14	9,65	0,277451	-1,28211	10,87	0,720184	-1,273624	-69,0048627							
23	15	9,70	0,292804	-1,22825	10,62	0,634145	-1,005518	-64,779297							
24	16	9,74	0,305836	-1,1847	10,57	0,616273	-0,957824	-66,4183765							
25	17	9,81	0,330544	-1,10702	10,50	0,588444	-0,887811	-65,8293108							
26	18	9,82	0,334388	-1,09545	10,40	0,551803	-0,802522	-66,4291268							
27	19	9,89	0,357089	-1,02977	10,34	0,530042	-0,755111	-66,0406324							
28	20	9,93	0,371545	-0,99009	10,26	0,498595	-0,690341	-65,5366846							

Obr. 17: Andersonův – Darlingův test dobré shody –nespecifikované rozdělení

- V buňce O7 je slovně zapsán výsledek testu: buď normalitu "zamítnout", nebo, pokud nebyl zjištěn důvod zamítnutí, normalitu "nezamítnout".

Literatura:

- [1] D'Agostino R. B., Stephens M. A. : „*Goodness-of-Fit Techniques*“, Marcel Dekker (1986)
- [2] H.W. Lilliefors : "On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown", Journal of the American Statistical Association, 62, 399-402 (1967)
- [3] NIST/SEMATECH e-*Handbook of Statistical Methods*,
<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/> ;1.3.5.16 Kolmogorovův-Smirnovův test
dobré shody viz <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35g.htm>
- [4] Hebák P., Bílková D., Svobodová A. – „*Praktikum k výuce matematické statistiky II: Testování hypotéz*“, VŠE 2002
- [5] T.A. Ryan, Jr. and B.L. Joiner (1976). "Normal Probability Plots and Tests for Normality" Technical Report, Statistics Department, The Pennsylvania State University. (Available from Minitab Inc.)
- [6] J. Janko: „*Statistické tabulky*“, NČSAV Praha 1958
- [7] HEBÁK P., BÍLKOVÁ D., SVOBODOVÁ A. - *Praktikum k výuce matematické statistiky II: Testování hypotéz*, VŠE 2002
- [8] D'AGOSTINO R. B., STEPHENS M. A. - *Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker (1986)
- [9] STEPHENS, M. A. – *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, pp. 730-737; (1974)
- [10] STEPHENS, M. A. - *Asymptotic Results for Goodness-of-Fit Statistics with Unknown Parameters*, Annals of Statistics, Vol. 4, pp. 357-369; (1976)
- [11] STEPHENS, M. A. - *Goodness of Fit for the Extreme Value Distribution*, Biometrika, Vol. 64, pp. 583-588; (1977)
- [12] STEPHENS, M. A. - *Goodness of Fit with Special Reference to Tests for Exponentiality*, Technical Report No. 262, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA; (1977)
- [13] STEPHENS, M. A. - *Tests of Fit for the Logistic Distribution Based on the Empirical Distribution Function*, Biometrika, Vol. 66, pp. 591-595; (1979)

QUANTIFICATION OF PROCESSES FOR NEW SOLUTIONS IN QUALITY AND RELIABILITY DEVELOPMENT

KVANTIFIKACE PROCESŮ NOVÝCH ŘEŠENÍ PŘI VÝVOJI V OBLASTI JAKOSTI A SPOLEHLIVOSTI

*Otakar Král, Theodor Beran, Jan Král
a kolektiv*

Centrum pro kvalitu a spolehlivost CQR při ISQ PRAHA s.r.o.
Pechlátova 19, 150 00 Praha 5,
tel./fax: 251 553 339
isq@isq.cz

Abstract: *The term "quality" refers to the fulfillment of product requirements with respect to the parameters specified in a law, standard, contract, process guideline....*

A problem arises if a product, especially in conventional or public services, has to be expertly valued, quantified.

Keywords: *Relation matrix, social requirements, quantification, externality*

Abstrakt: *Pojem jakosti respektive kvality znamená splnění požadavků produktu vzhledem k stanoveným parametrům v zákoně, normě, smlouvě, technologickému postupu ...*

Problém nastává, pokud produkt, zejména služby klasické či veřejné a státní služby je nutno kvalifikovaně ohodnotit, kvantifikovat.

Klíčová slova: *Relační matice, společenské požadavky, kvantifikace, externalita*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/124

Kvantifikace procesů nových řešení při vývoji v oblasti jakosti a spolehlivosti

Služby spojené s hmotnými produkty obvykle ohodnotíme finančně či fyzickými jednotkami, problémy se dostávají ve zvýšené míře u služeb významně nespojených s hmotnými výstupy a služeb veřejné a státní správy.

Pro uvedenou problematiku, která se neobejde bez expertního odhadu, hledáme a ověřujeme metodiku hodnocení.

Tato metodika musí zahrnovat celý životní cyklus produktu (výrobku i služby) a ohodnotit vlastnosti a důsledky realizace produktu komplexně. Komplexnost v tomto případě znamená monitorování, měření a vyhodnocování působení přímého i nepřímého, vyvolaného, tedy ohodnotit rovněž externalitu.

Externalitu v tomto případě je potřeba pojímat jako předpokládané, ale i nepředpokládané působení produktu či jevu, který řešíme a následně uvádíme do rutinního využívání.

Na základě dosud provedených prací v oblasti výrobní poskytuje dále uvedená metoda ucelený pohled na působení výrobku v etapách jeho životního cyklu.

Autorský řešitelský tým se, jak výše uvedeno, zaměřuje rovněž na problematiku poskytování služeb a na oblast veřejných a státních služeb, kde je řešení ztíženo o specifické činnosti a procesy.

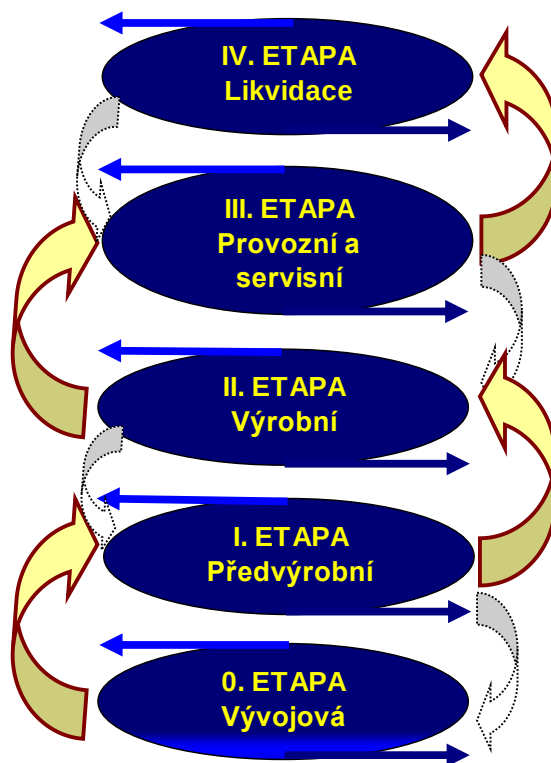
V této souvislosti řešitelský tým, v rámci spolupráce s ČSÚ na Sčítání lidu, domů a bytů v r. 2011 řeší mj. v rámci statistického řízení kvantifikaci neshod při této významné celostátní akci.

V tomto příspěvku se zaměříme na problematiku hodnocení externalit u strojírenského podniku.

Vymezení objektu

- **Výrobek** zde představuje proces realizace jednotlivých subprocessů, které nabízejí řadu externalit.
- **Výrobek běžné spotřeby** přináší utilitu plynoucí z jeho spotřeby. Výrobek jako produkt výroby, investičního celku je zdrojem pouze omezeného druhu externalit (servis, likvidace) a komplementárních statků. Tento výrobek nebude předmětem tohoto výzkumu. Zde se soustředíme výhradně na výrobek s dlouhodobým životním cyklem. Pro další postup jsme vyslovili níže uvedené teze o výrobku s dlouhodobým životním cyklem:
- Realizace **výrobku s dlouhodobým životním cyklem** je však **zdrojem** mnoha (širokého spektra) různorodých **externalit**¹ (vliv na životní prostředí kladný i záporný, snížení nezaměstnanosti, rozvoj regionů....)
- **Výrobní podnik** produkující výrobky **je sám o sobě systémem**, jehož přínosy je nutno zkoumat, kvantifikovat a regulovat. Výrobna je výrobkem s dlouhodobým životním cyklem. Její produkty- výrobky považujeme za předměty spotřební- tedy výrobky s krátkým životním cyklem.

Účelově vymezené životní fáze technologického celku - produktu



Obr. 1. - Dílčí životní etapy výrobků (produktů)

- **Vývojová a Předvýrobní etapa:** Tato etapa probíhá ve vývojových odděleních v podniku a dochází zde k návrhu výrobku (na základě zjištěných potřeb zákazníků) a návrhu způsobu jeho výroby.

¹ Cf. M. Johanson „The impact geographical proximity and technology

- **Výrobní etapa:** V této etapě dochází k realizaci („zhmotnění“) představ projektantů, konstruktérů a technologů do reálného výrobku, jehož funkce je komplexně ověřena pro množinu specifikovaných provozních podmínek a předána uživatelům (zákazníkům).
- **Provozní etapa:** V této etapě životního cyklu je výrobek rutinně používán, udržován, opravován, případně rekonstruován (vč. servisu prováděného výrobcem).
- **Likvidace:** Na konci technického života výrobku (obecně životního, resp. dlouhodobého životního cyklu) dochází k odborné likvidaci, aby morálně nebo fyzicky² vyčerpaný výrobek co nejméně ohrozil životní prostředí. Klade se důraz na maximální míru recyklace použitého materiálu.

Níže uvedená schémata jsme pro snazší uchopitelnosti deskripci účelově zvolili jako elementární parciální etapy životního cyklu výrobku, resp. dlouhodobého životního cyklu



Obr. 2. – Obsah vývojové etapy

Tato etapa vývoje návrhu má specifické postavení zejména z následujících důvodů:

1. Vývoj je zabezpečován zejména u malých a středních organizací externě, outsourcingem, resp. při práci ve mzdě zadavatelem. Proto v tomto modelu a v této fázi řešení je vývoj zahrnut do předvýrobní etapy.
2. Problematika vývoje je specifická činnost s obtížně stanovitelnými limity, vstupy i výstupy. Na rozdíl od etap označených I – IV, kde lze využít normy, ceníky a auditovanou účetní evidenci.

² **Morální nevhodnost** je způsobena vlivem vývoje technické legislativy nebo změny předmětu působnosti výrobce bez možnosti technologické diversifikace.

Fysické vyčerpání je způsobeno neopravitelným opotřebením výrobního zařízení nebo výší nákladů na jeho opravu.

3. Ve vývojové etapě je však dle ověřených poznatků vyspělých ekonomik „zakódováno“ cca 80% zjišťovaných neshod produktu ve výrobě a užití. Vzhledem ke své náročnosti je uvažováno s touto problematikou se podrobněji a komplexně zabývat v následující etapě řešení v období 2010 až 2011. Proto m.j. označení 0. ETAPA.

I. ETAPA PŘEDVÝROBNÍ



Obr. 3. - Ekonomické zhodnocení předvýrobních etap

II. ETAPA VÝROBNÍ



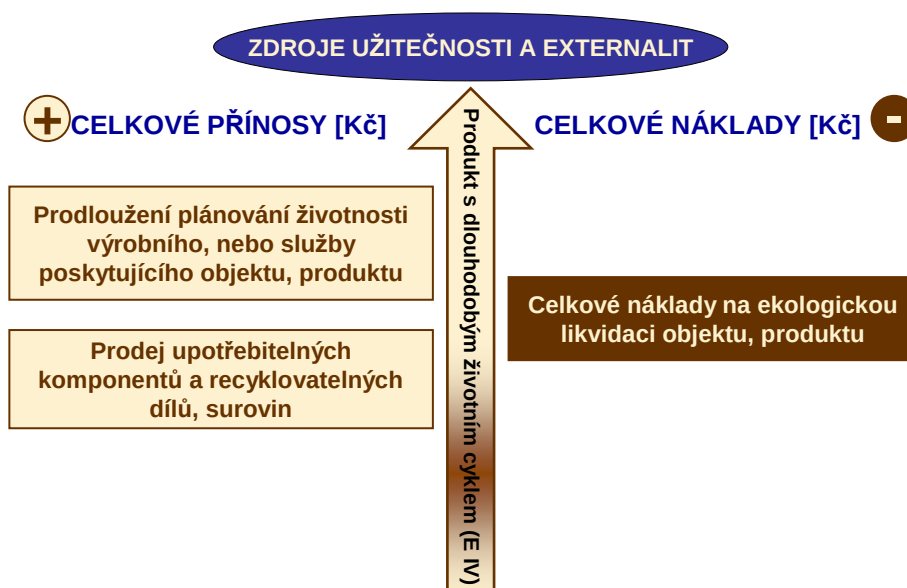
Obr. 4. - Obsah výrobní etapy

III. ETAPA PROVOZNÍ + SERVISNÍ



Obr. 5. - Obsah provozní etapy

IV. ETAPA LIKVIDACE



Obr. 6. - Obsah etapy likvidace

Úvahy o měřitelnosti důsledků externalit (obtížné měřitelnosti přínosů systému jakosti)

Po vybudování nové výroby, při produkci nových produktů či zavedení nové technologie (případně po souvisejícím základním nebo oborovém výzkumu) lze předpokládat kromě projektované ziskovosti též vznik těžko měřitelných jevů (kladných i záporných) nejen pro výrobu, ale i pro její okolí – místní, region, i pro celou společnost – míněno národní hospodářství země.

Přínos sekundárních investic vyvolaných vybudováním výroby a jejího provozu na infrastrukturu

- zvýšení sociální úrovně obyvatel (příjmy),
- rozšíření obyvatelstva regionů o specialisty pro novou výrobu,
- rozšíření bytového fondu a dodávek medií a služeb pro bydlení,
- rozšíření velko a maloobchodní sítě,
- rozšíření sportovních a kulturních objektů ovlivňujících sportovní a kulturní vyžití místních obyvatel,
- vliv na kulturu životního stylu,
- zvýšení příležitostí pro vzdělávání a možností spolkového, kulturního a duchovního života,
- rozšíření komunálních služeb,
- rozšíření komunikací a přepravních kapacit (až na úroveň železniční, silniční či vodní dopravy) pro produkty a zaměstnance, MHD,
- rozšíření zdravotní péče,
- zvýšení vzdělanosti populace (vzdělání je považováno za nejlepší investici, ale objektivně vypočítat její cenu a návratnost je problematické),
- rozvoj vzdělanosti, podpoří-li výroba svými nároky rozvoj místních škol s učebními obory nebo vyššího vzdělávání,
- rozvoj spokojenosti zaměstnanců, zejména jejich seberealizací a důsledků vysoké pracovní kultury (pečuje-li o ně výroba),
- snížení nebo využití odpadů,
- vliv na průmyslové image regionu,
- vliv na image „zdravé a půvabné město“ jako důsledek rozvoje zdravotní a sociální péče, upravené město - opravy chodníků, cest, kanalizace, bytů a dalších staveb,
- vliv na image „bezpečné město“ jako důsledek péče o prevenci a bezpečnost z hlediska kriminality, dopravní bezpečnosti.

Těžko měřitelné přínosy z dobré funkčnosti systémů jakosti nebo jakosti produkce

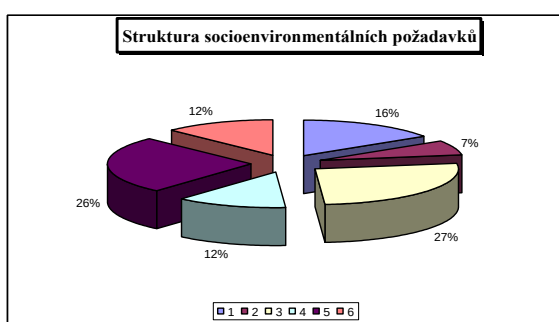
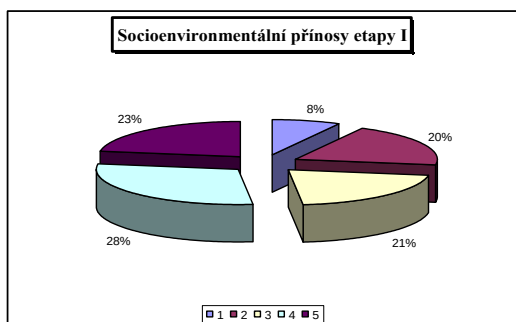
- lze odvodit úpravou výše jmenovaných externalit a doplnit je zejména o:
- zvýšení konkurenceschopnosti,
- rozvoj prodeje kvalitnějších výrobků, jako důsledek větší spokojenosti zaměstnanců (v organizaci poskytující sociální podpory zaměstnancům) na rozdíl od rozšíření odbytu a/nebo rozšířením podílu na trhu,
- zlepšení image výrobce kvalitnější produkcí, zlepšením Příručky jakosti, Politiky a Cílů integrovaného manažerského systému,
- zavedení a stálé zlepšování vnější prezentace organizace – internetových stránek, sponzorování, reklam, přínosů pro region...,
- zlepšení komunikace a pracovní kultury v organizaci – s produkcí související výběr z výše uvedených důsledků externalit, které se týkají vnitřních podmínek organizace,
- snížení výrobních nákladů vlivem lepší organizace a lepšího provádění údržby výrobního zařízení – těžko měřitelného snížení vad a přerušování produkce (na rozdíl

od měřitelnosti snížení nákladů po zavedení nových materiálů, technologií, změn organizace, kontrolních operací ve výrobě),

- zvýšení jakosti a snížení nákladů vlivem školení a dalších forem vzdělávání zaměstnanců,
- zlepšení řízení organizace (rozhodování, plánování, organizování,),
- zvýšení ekologičnosti výrobků,
- důsledky zlepšené BOZP a PO,
- zvýšení ochrany informací,
- zvýšení úrovně procesů v systému managementu jakosti, zejména řízení metrologie, neshodné produkce, řízení a přezkoumávání dokumentace a dokumentů, řízení interních auditů, opatření k nápravě a preventivních opatření....podobně zlepšováním požadavků norem ČSN EN ISO 14001 a 27001 a předpisu OHSAS 18001.

Princip základu modelu MSD

MSD Celospolečenské požadavky a přínosy dané fáze LLC												
Hlavní SE požadavky		Parametry kvality přínosů						korigující faktory				
		[1]	[2]	[3]	[4]	[5]		SUMA	C1	C2	C3	...
1. technická bezpečnost		9x5	9x4	3x3	3x3	3x3		108				
2. minimalizace vlivů na ŽP		3x3	3x3	2x2	3x3	4x4		47				
3. spokojenost majitelů		není	9x5	9x5	9x5	9x5		180				
4. spokojenost zaměstnanců		není	není	5x4	9x5	5x4		85				
5. spokojenost dodavatelů		není	9x5	9x5	9x5	9x5		180				
6. rozvoj regionu		není	není	5x4	9x5	5x4		85				
.....												
Součet součinů			54	135	143	198	155	685				
Relativní váha znaku			0,079	0,197	0,209	0,289	0,226					
Relativní váha znaku v %			7,883	19,708	20,876	28,905	22,628					
												100,00



	Normativní charakteristiky Přínosů	Váha	Celospolečenské Hodnocení				
			1	2	3	4	5
Požadavky trvale udržitelného Rozvoje							
Cílové hodnoty							

Obr. 7. Konečný tvar modelu MSD vytvořeného při transformaci požadavků trvale udržitelného rozvoje do specifikací výrobku metodou MSD

POPIS PŘÍPRAVY A ZPRACOVÁNÍ RELAČNÍ MATICE METRIK

Definice nezávislých a závislých veličin problému, konstrukce matice

1. **Expertní tým definuje nezávislé společenské požadavky**, které mají vliv na potřebné a očekávané vlastnosti produktu, v této konkrétní úloze vliv na faktory kvality regulačního ventilu kyslíku. V tomto případě jsou společenské požadavky definované zejména obecnými požadavky na strojírenský výrobek, upřesněné zákazníky a legislativou pro regulační ventil kyslíku, tedy společenskými požadavky na bezpečnost a provozní spolehlivost regulovaného produktu (tedy produktu ohrožujícího životy, zdraví a majetek).
2. **Expertní tým definuje očekávané vlastnosti produktu závislé na společenských požadavcích**, v této konkrétní úloze to jsou technické vlastnosti výrobku - faktory kvality regulačního kyslíkového ventilu. Faktory kvality jsou expertním týmem definovány na základě profesních znalostí o rozhodování, plánování, organizování, kontrolách a testech ve strojírenské výrobě.
3. **Definované společenské požadavky a faktory kvality zapíší experti do matice**, kde v řádcích jsou zapsány faktory kvality a ve sloupcích společenské požadavky.

Bodové hodnocení vztahů a matematické zpracování číselných hodnocení

Hodnocení vztahů (priorit, důležitosti, přímých vazeb) mezi společenskými požadavky a faktory kvality provádí experti takto:

1. Každý expert vyplní buňky v průsečících řádků a sloupců svým bodovým hodnocením, které vznikne součinem síly (velikosti) a váhy (důležitosti) vztahu mezi společenským požadavkem a faktorem kvality:

$$B = S \times V$$

Pro sílu vztahu experti používají číselnou stupnici 1 až 9 (1 je pro slabý vztah, 5 je pro průměrně silný vztah a 9 vyjadřuje silný vztah).

Pro váhu experti používají číselnou stupnici 1 až 5 (1 je pro málo důležitý vztah, 3 je pro důležitý vztah a 5 vyjadřuje velmi důležitý vztah).

Každý expert zapisuje svá hodnocení „síla x váha“ do příslušných buněk pomocné matice.

2. Hodnoty součinů čísel z „MATICI POMOCNÉ“ se přenesou do hlavní matice.
3. Bodová hodnocení zapsaná v řádcích matice (*v buňkách řádků 13 až 28 a sloupců D až K*) jsou sečtena a součty jsou zapsány v buňkách sloupce L "SUMA HODNOT V ŘÁDKU" (*buňkách L13 až L28*) viz obr. 8.

Bodová hodnocení zapsaná ve sloupcích matice (*buňkách sloupců D až K a řádků 13 až 28*) jsou sečtena a součty jsou zapsány v buňkách řádku 29 "SUMA HODNOT VE SLOUPCÍCH" (*buňkách D29 až K29*).

4. **"Koeficient zkušeností s faktory kvality produkce"** ve sloupci M (buňky M13 až M28) vyjadřuje nedostatky ve kvalitě, které se projevily zpětnými vazbami (z testů, validací, reklamací, havárií...při dlouhodobém užívání produktu).

"Koeficient zkušeností se společenskými požadavky" v řádku 30 (buňkách D30 až K30) vyjadřuje nedocenění nebo opomenutí společenských požadavků v předcházejících projektech.

Pro oba koeficienty zkušeností experti používají stupnici 1 až 5. Při plánování nového produktu mají oba koeficienty hodnotu 1, protože nemáme ještě k dispozici žádné zpětné vazby.

5. **Bodová hodnocení vztahu mezi každým jedním faktorem kvality produkce a všemi společenskými požadavky** se vypočítají součinem SUMY HODNOT V ŘÁDKU každého jednoho faktoru kvality produkce (v buňkách L13 až L28) a koeficientu zkušeností s tímto faktorem kvality produkce (ve vedlejší buňce - M13 až M28) a zapisují se do následující buňky (sloupce N).

Bodové hodnocení vztahu mezi každým jedním společenským požadavkem a všemi faktory kvality produkce se vypočítají součinem SUMY HODNOT VE SLOUPCI každého jednoho společenského požadavku (v buňkách D29 až K29) a koeficientu zkušeností s tímto společenským požadavkem (v další buňce níže - buňkách D30 až K30).

6. **Priorita ($P_{\text{faktor kvality}}$) vztahu mezi jedním z faktorů kvality produkce a všemi faktory kvality produkce** vyjadřuje velikost důležitosti konkrétního faktoru kvality v množině důležitostí všech faktorů kvality produktu. Vypočítáme ji ze vztahu:

$$P_{\text{fk}} = \frac{\text{bodové hodnocení vztahu mezi vybraným faktorem kvality a všemi společenskými požadavky}}{\text{suma bodových hodnocení vztahů mezi všemi faktory kvality a všemi společenskými požadavky}} \times 100$$

a zapíšeme do buněk ve sloupci O (O13 až O28).

7. **Priorita ($P_{\text{spol.požadavek}}$) vztahu mezi jedním ze společenských požadavků a všemi společenskými požadavky** vyjadřuje pozici v hierarchii důležitosti konkrétního společenského požadavku v množině všech společenských požadavků. Vypočítáme ji ze vztahu:

$$P_{\text{sp}} = \frac{\text{bodové hodnocení vztahu mezi vybraným společenským požadavkem a všemi faktory kvality}}{\text{suma bodových hodnocení vztahů mezi všemi společenskými požadavky a všemi faktory kvality}} \times 100$$

a zapíšeme do buněk v řádku 32.

		D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	Matice vztahů mezi kvalitou a společenskými požadavky												
12	MATICE exp. 1	SPOLEČENSKÉ POŽADAVKY									HODNOCENÍ A PRIORITY		
		Technická bezpečnost: u všech pracujících nejméně 1 stupeň, zbraň a měřák	Spolehlivá regulovatelnost: jednoduché nastavení přetvářek hodnot požadovaných parametrů v regulovaném médiu a s přesností 10%	Zabezpečení proti nežádoucím nebo neodolným manipulacím s užitky	Vnější ochrana ventilů proti vlivům na technickou a provozní bezpečnost: mechanické nebo elektrické vlivy, omezení proudění na ventily	Přesné a jednoduché předpisy pro provoz, údržbu, kontroly, sestavení, opravy a zpracování zábran o nich	Přesné a jednoduché předpisy pro školení obsluhy (učebnice), průběh, údržbu, kontroly, sestavení, opravy a zpracování zábran o školení (průběh a opakování)	Metoda nastavení a zajištění: označení uvnitř, napájení, tabulka o nastavení jeho požadavků na okoli	Enginematický vliv, uvnitř pro použití v medicíně: proudění z uvnitřních materiálů, barvení a usazení uvnitř pro nemoci (prošetření)	SUMA HODNOT V ŘÁDKU	Koeficient zkušenosti s faktory kvality produkce	Bodové hodnocení vztahu mezi faktorem kvality a všemi společenskými požadavky	Priorita - velikost důležitosti konkrétního faktoru kvality v množině důležitosti všech ostatních faktorů kvality produkce
13	Plánování výzkumných a vývojových prací pro neustálé zvyšování technické bezpečnosti a plnění požadavků zákazníků	45	45	45	45	40	40	45	45	350	1	350	5,12
28	Řízení nákladů a odbytových cen ventilů	45	45	40	40	20	20	5	5	220	1	220	3,22
29	SUMA HODNOT VE SLOUPCI	646	579	510	446	516	436	593	481	4207		6839	100
30	Koeficient zkušenosti se společenskými požadavky	3	1	1	1	3	1	1	1				
31	Sumy bodových hodnocení vztahů mezi společenským požadavkem a všemi faktory kvality	1938	579	510	446	1548	436	593	481	6531			
32	Velikost důležitosti konkrétního společenského požadavku v množině důležitosti všech ostatních společenských požadavků	29,7	8,9	7,8	6,8	23,7	6,7	9,1	7,4	100			

Obr. 8. Schématická ilustrace výpočtů

VÝSTUP Z RELAČNÍ MATICE METRIK (matice vztahů mezi kvalitou a společenskými požadavky).

Výstupem z Relační matice metrik jsou hodnoty důležitosti jednotlivých společenských požadavků a faktorů kvality produktu. Tyto hodnoty důležitosti jsme pojmenovali též **prioritami**. Priority jsme získali v matici matematickými postupy z primárních hodnocení síly a váhy vztahů mezi společenskými požadavky a faktory kvality produkce, které subjektivně stanovil každý člen expertního týmu ve své matici (pro tuto prezentaci předkládáme pouze matici prvního experta - „Matice exp. 1“, ostatní jsou identické).

Integrovaná matice obsahuje výstupy z matic všech expertů a sestaví se tak, že v ní uvedené hodnoty priorit (v *posledním řádku a posledním sloupci*) jsou aritmetické průměry priorit z matic všech expertů.

Matice faktorů kvality produkce a Matice společenských požadavků jsou upravené tak, aby dávaly pohled na velikosti priorit samostatných nezávislých a závislých veličin řešené problematiky.

VÝPOČETNÍ VZTAHY V MODELU

Míra plánovaného zlepšení vyjádřená koeficientem plánovaného zlepšení, který se počítá jako poměr plánovaného hodnocení plnění požadavků (hodnocení, které firma chce dosáhnout) ke stávajícímu hodnocení:

$$D_i = \frac{SP_i}{T_i}$$

kde:

- SP_i – *směrné hodnocení požadavku, jehož má produkt dosáhnout (tedy ex ante)*
- T_i – *stávající hodnocení daného požadavku, resp. jeho současný stav.*

Koeficient tržního vlivu, který vyjadřuje váhy jednotlivých požadavků (G_i) podle vztahu:

$$G_i = I_i \cdot G_i \cdot M_i$$

kde:

- I_i – *stupeň důležitosti požadavku*
- G_i – *koeficient plánovaného zlepšení plnění požadavku*
- M_i – *koeficient tržního vlivu.*

Hodnoty absolutních vah požadavků se pak přepočtou na relativní váhy vyjádřené v procentech, které charakterizují **význam jednotlivých požadavků**:

$$(RG)_i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \cdot 100$$

- *kde:*
- n – *celkový počet požadavků.*

Součin číselného koeficientu vyjadřujícího **míru závislosti a relativní váhy požadavku**

$$K_{ij} = f_{ij} \cdot (RG)_i$$

- *kde:*
- f_{ij} – *koeficient závislosti mezi požadavkem i a ex ante charakteristikou j.*

Důležitost jednotlivých normativních charakteristik z hlediska plnění všech požadavků.

$$M_j = \sum_{i=1}^n K_{ij}$$

Procentuální vyjádření relativní váhy charakteristiky:

$$G_j = \frac{M_j}{\sum_{j=1}^m M_j} \cdot 100$$

kde:

- G_i – relativní váha směrného kritéria
- m - počet charakteristik (směrných ex ante požadavků).

Zadání současného managementu

Současný management organizací všech typů lze charakterizovat jako **hledání řešení problémů s více než jednou příčinou**, jejich vznik lze charakterizovat zejména:

- neustálými změnami vnějšího prostředí organizace (změn trhu, technického vývoje, společenských změn, sociálních změn, hospodářsko-politických změn, apod.),
- potřebou neustálého růstu konkurenční schopnosti produkce cestou růstu kvality produkce, na prvním místě zvyšováním technické bezpečnosti a provozní spolehlivosti, zejména neustálým zlepšováním výzkumu, vývoje, technického navrhování, výrobních metod, strojů a nástrojů, údržby výrobních zařízení, kontrol a testů, péče o distribuci a servis apod.,
- potřebou neustálého růstu konkurenční schopnosti produkce cestou snižování výrobních a režijních nákladů zlepšováním řídicích systémů organizace, procesů v organizaci, zejména v řízení výroby a v péči o výrobní zařízení,
- rostoucí potřebou nástrojů pro zvyšování kvality vnitřního prostředí organizace (zlepšování strategie, politiky kvality, systémů řízení v organizaci, řízení lidských zdrojů, řízení znalostí a dovedností, řízení image).

Nové požadavky na management

Jednoduché matematické metody, jednoduché metody ekonomického řízení a standardní nástroje řízení kvality již nestačí pro řešení současné problematiky managementu organizací. Současné vstupy pro řešení problémů již nejsou jednoduše (matematicky) vyjádřitelné potřebné cílové hodnoty dosažitelné jednoduchou regulací izolovaného produkčního procesu. Příčiny současných problémů jsou společenské požadavky na produkt a soubory vlastností produktů a vzájemných vztahů mezi nimi.

Společenské požadavky jsou zájmy občanské společnosti (zejména její zájmy na ekologických vlastnostech produktů, na bezpečnosti lidské práce a zájmy o udržitelný rozvoj lidské společnosti).

Vlastnosti produktů jsou určeny požadavky zákazníků k uspokojení jejich potřeb a očekávání, zejména faktorů kvality (technická bezpečnost, provozní spolehlivost, technické parametry, cena, udržitelnost, opravitelnost atp.).

Společenské požadavky na produkt

Vlastnosti produktů jsou závislé na společenských požadavcích (společenské požadavky jsou zásadní pro umístění produktů na trhu, pro odbyt, ziskovost, konkurenční schopnost...).

Společenské požadavky jsou nezávislé na produktu.

Tyto nezávislé a závislé veličiny v problematice aktuálního managementu (nejen strojírenského podniku) je nutné popsat a analyzovat, tj. definovat množinu společenských požadavků, definovat množinu vlastností produktu, poté popsat vzájemné vazby faktorů obou množin (vazby každého jednoho faktoru se všemi ostatními) a nakonec ohodnotit jejich důležitost (priority) pro společenské požadavky a pro vlastnosti produktu.

Pozn.: Takový výstup z popsaných analýz připomíná Paretovu analýzu, která provádí prostou analýzu třídění (např. podle typu vad), vytváří histogram rozdělení četností a spojnicový diagram kumulativních četností.

Management potřebuje z provedených analýz získat vlastnosti produktů (nebo procesů) seřazené dle velikosti jejich důležitosti mezi ostatními vlastnostmi produktů k naplnění společenských požadavků.

Účel relační matice metrik

Hledaným nástrojem k přehlednému a vypovídajícímu vyjádření důležitosti faktorů vlastností produktů a společenských požadavků mezi sebou nebo uvnitř svých množin je Relační matice metrik, kterou jsme vytvořili na základě inspirace z matice MSD (Matrix of Sustainable Development – Matrice podpory vývoje).

Využití Relační matice metrik je velmi široké, zejména je vhodné pro:

- návrhy změn či zavedení nových produktů,
- hodnocení bilancí zdrojové náročnosti,
- zlepšování produktů,
- zlepšování systémů a produktů,
- plánování vývoje,
- navrhování složitých opatření k nápravě,
- zpracování Plánů kvality produktů,
- přezkoumávání návrhů,
- identifikace rizik,
- apod.

Týmová práce expertů

Zásadním předpokladem kvalitního výstupu z Relační matice metrik je správná týmová práce expertů z odborných útvarů organizace, zejména marketérů, konstruktérů, technologů, výrobních techniků, manažerů kvality, ekonomů, technických kontrolorů a zkušebních techniků, provozních účetních a kalkulantů, případně dalších zapojených do dalších fází života produktu. Pro konkrétní aplikace lze strukturu expertních týmů modifikovat účelově.

Pro další popis a pro demonstrace operací s Relační maticí metrik je přiložena „Relační matice metrik vztahů mezi vlastnostmi produktu (faktory kvality) a společenskými požadavky na ventily GCE“. Účelem této matice je být podpůrným nástrojem pro přípravu a výrobu zlepšeného kyslíkového ventilu s využitím zpětných vazeb z dlouhodobého provozu předcházejícího modelu kyslíkového ventilu.

Literatura:

- [1] BERAN,Th., VLÁSEK, K., FLEGL,R., *Expertní metoda v hodnocení procesů ISM strojírenského výrobku v jeho celoživotních etapách jako integrální část kvantifikace procesů v reprodukčním cyklu*. In: Soudobé trendy v jakosti řízení, XXIX, ISQ Praha, 2009, ISBN 978-80-7265-145 - 0, str.128-166.
- [2] BERAN, Th., KRÁL, O., VLÁSEK, K.,. *Kvantifikace procesů v systémech kvality*. In: Soudobé trendy v jakosti řízení - XXX. : sborník semináře : Zlenice, 13. -14.11.2009. Praha : BIVŠ a ISQ PRAHA, s.r.o., 2009. s. 5-26. 978-80-7265-186-3.
- [3] MACÍK, K. , BERAN, Th. *Managerská ekonomika*. In: Soudobé trendy v jakosti řízení - XXX. : sborník semináře : Zlenice, 13. -14.11.2009. Praha : BIVŠ a ISQ PRAHA, s.r.o., 2009. s. 27-50. 978-
- [4] KRÁL, O.: *Systému řízení jakosti - přednáška“, ed.2, Český normalizační institut, Praha 2002. ČSN EN ISO 9001.*
- [5] KRÁL, O. a kol.: *Informace a využití výpočetní techniky v managementu jakosti.*“, 1. vydání Praha : Národní informační středisko pro podporu jakosti, 2004. 94 s. ISBN80-7261-110-0.
- [6] KRÁL,O., DOLANSKÝ,V., VLÁSEK,K., *Procesy zlepšování v systémech řízení podniků, přístupy, metody a nástroje* In. Soudobé trendy v jakosti řízení, XXIX, ISQ Praha, 2009, ISBN 978-80-7265-145 - 0, str.51-88
- [7] Beran, Th. - Flegl,R. *Ekonomické aspekty spolehlivosti procesů*. In: Sborník Soudobé trendy v jakosti řízení, ISQ, Praha, 2005.
- [8] BERAN,TH. *Mikroekonomické předpoklady ve výzkumu strojírenských výrobků s dlouhodobým životním cyklem* In: sborník mezinárodní vědecké konference GEMAN 06 - "GEneral MANagement", Acta EVIDA № 51, ISBN 80-86596-81-8, EVIDA, Plzeň, 2006
- [9] KRÁL O., NENADÁL J., DOHNAL G. *Plán kvality SLDB2011*, ISQ Praha, 2010.

PESIMISTIC ESTIMATIONS OF CATEGORICAL VARIABLE PROBABILITY DISTRIBUTION

PESIMISTICKÉ ODHADY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOСТИ KATEGORIÁLNÍ VELIČINY

Veronika Lacinová*, Zdeněk Karpíšek*, Zdeněk Sadovský**

*Centrum pro jakost a spolehlivost výroby, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno
v.neradova@email.cz, karpisek@fme.vutbr.cz

**Akademie Sting, Katedra aplikovaných disciplin, Stromovka 1, 637 00 Brno
sadovsky@sting.cz

Abstract: *In the contribution the method of estimation of categorical variable probability distribution from observed values is presented, making use the gradient of quasi - norm and so-called straight line estimation. Theoretical results are illustrated on concrete example.*

Keywords: *f-divergence, quasi - norm, discrete probability distribution, gradient estimation, straight line estimation.*

Abstrakt: *V příspěvku je předložena metoda odhadu diskrétního rozdělení pravděpodobnosti kategoriální veličiny z jejích pozorovaných hodnot, využívající gradient kvazinormy tohoto rozdělení a tzv. přímkový odhad. Teoretické výsledky jsou ilustrovány na konkrétním příkladu.*

Klíčová slova: *f-divergence, kvazinorma, diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, gradientní odhad, přímkový odhad.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/138

1. Úvod

Základní praktickou úlohou při stochastickém modelování kategoriální veličiny X , která nabývá konečně mnoha různých hodnot x_j^* , $j = 1, \dots, m$, kde $m \geq 2$, je odhad jejího rozdělení pravděpodobnosti z pozorovaných hodnot x_i , $i = 1, \dots, n$, kde $n > m$. Předpokládáme, že pozorováním X získáme statistický soubor $(x_1, \dots, x_n)$ hodnot x_j^* a po jeho roztřídění dostaneme roztříděný statistický soubor $\left(\left(x_1^*, \frac{f_1}{n} \right), \dots, \left(x_m^*, \frac{f_m}{n} \right) \right)$, kde $\frac{f_j}{n} \neq 0$ je relativní četnost pozorované hodnoty x_j^* , $j = 1, \dots, m$. Předpoklad nenulových relativních četností snadno zajistíme vynecháním jim odpovídajících hodnot x_j^* . Jestliže označíme odhadované rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, kde $p_j = P(X = x_j^*)$ je pravděpodobnost toho, že kategoriální veličina X nabude hodnotu x_j^* , jde o odhad parametrů $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ multinomického rozdělení pravděpodobnosti $M(n, p_1, \dots, p_m)$ při známém n . Jestliže byl statistický soubor $(x_1, \dots, x_n)$ získán výběrem s vrácením a vzájemně nezávislými pozorováními X , používá se obvykle pro odhad vektor $\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$, který je nestranným odhadem vektoru parametrů $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$. V dalším textu předložíme jiný, v jistém smyslu pesimistický odhad, který je založený na gradientu kvazinormy rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}$ a tzv. přímkový odhad, geometricky řečeno o odhad ležící na úsečce jdoucí z empirického rozdělení pozorovaných čet-

ností $\frac{\mathbf{f}}{n} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n}\right)$ a končící v rozdělení $p_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$. Popsané odhady jsou pro různé kvazinormy dostatečně vhodné pro aplikace a navíc lze zajistit vhodným postupem také jejich asymptotickou nestrannost.

2. Gradientní a přímkový odhad

Dále vycházíme z následujících pojmů [1], [2]. Důkazy uvedených tvrzení jsou v [3].

Definice 2.1. Necht' funkce $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$, kde $\mathbb{R}^*$ je množina reálných čísel rozšířená o nevlastní prvky $-\infty$ a ∞ , je konvexní na $(0; \infty)$, striktně konvexní v bodě $u = 1$ a $f(1) = 0$. Jestliže $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ a $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $m \geq 2$, jsou diskrétní rozdělení pravděpodobnosti z pravděpodobnostního prostoru (Ω, Σ, P) , kde Ω je konečný základní prostor, Σ je sigma algebra na Ω a P je pravděpodobnost, pak ***f*-divergenci** těchto rozdělení rozumíme funkcional

$$D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^m q_j f\left(\frac{p_j}{q_j}\right),$$

kde klademe $0f\left(\frac{0}{0}\right) = 0$ a $0f\left(\frac{p}{0}\right) = pf(*)$ pro $\forall p \in (0, 1]$ a $f(*) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \in \mathbb{R}^*$.

Pojem *f*-divergence $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ má význam vzdálenosti daných rozdělení [1]. Platí, že

- a) $\mathbf{p} = \mathbf{q} \Leftrightarrow D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$,
- b) $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nabývá maximum v $\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ jsou ortogonální, tj. existují takové disjunktní množiny $E, F \subset \Omega$, že $\sum_{j \in E} p_j = 1$ a $\sum_{j \in F} q_j = 1$.

Definice 2.2. Necht' $S = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m : \forall p_j \geq 0, \sum_{j=1}^m p_j = 1 \right\}$ je množina všech diskrétních rozdělení pravděpodobnosti na Ω . ***Kvazinormou*** rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} \in S$ rozumíme *f*-divergenci $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$, kde $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$ a o funkci f říkáme, že ***generuje*** kvazinormu $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ na S .

Rovnoměrné rozdělení $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$ bylo zvoleno proto, že minimalizuje [2] integrál všech *f*-divergencí $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ na S a má maximální entropii. Platí, že

- a) $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$,
- b) $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(mp_j)$,
- c) $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ je nezáporná konvexní symetrická funkce na S .

Věta 2.1. Necht' funkce $f(u)$ je konvexní na $(0, \infty)$, striktně konvexní v $u = 1$ a $f(1) = 0$, pak platí

$$0 \leq D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \leq D_f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m} (f(m) + (m-1)f(0)),$$

kde $\mathbf{p}_1 = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

Poznámka 2.1. Kvazinormu $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ můžeme chápat jako míru neurčitosti rozdělení $\mathbf{p}$, přičemž největší neurčitosti odpovídá hodnota $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = 0$ a nejmenší neurčitosti hodnota $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m}(f(m) + (m-1)f(0))$ rozdělení $\mathbf{p}$.

V tabulce 2.1 je uveden přehled užívaných kvazinorem a jejich generujících funkcí.

Tabulka 2.1

Generující funkce	Kvazinorma
$f(u) = \left(u^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2$	Hellingerova $H(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \sum_{j=1}^m \left(\sqrt{p_j} - \sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2$
$f(u) = u \ln u$	Shannonova $S(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \sum_{j=1}^m \left(p_j \ln p_j - \frac{1}{m} \ln\left(\frac{1}{m}\right)\right)$
$f(u) = \frac{(u-1)^2}{u}$	Pearsonova $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} - 1$
$f(u) = \frac{2}{l-2(\sqrt{u})^{l-2}} + u - \frac{l}{l-2},$ $l \in \mathbb{R}^+ - \{2\}$	G-kvazinorma $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{2}{m(l-2)} \sum_{j=1}^m (mp_j)^{\frac{2-l}{2}} - \frac{2}{l-2},$ $l \in \mathbb{R}^+ - \{2\}$
$f(u) = (u-1)^2$	Kvadratická $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (mp_j - 1)^2$

Naše idea odhadu rozdělení $\mathbf{p}$ z pozorovaných hodnot veličiny X je založena na principu najít takové rozdělení v S , které je nejblíže $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$ a k němuž se dostaneme od empirického rozdělení $\left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n}\right)$ v jistém smyslu co nejrychleji. Tomu odpovídá vhodná minimalizace zvolené kvazinormy $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ a hledání rozdělení $\mathbf{p}$ na křivce největšího spádu v S , tj. křivce, jejíž tečný vektor je kolineární s gradientem této kvazinormy. Je zřejmé, že však jde o úlohu s vazební podmínkou $\mathbf{p} \in S$. To spolu s konvexností generující funkce f nás opravňuje k následující definici.

Definice 2.3. Necht' $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ je kvazinorma na S . **Gradientním odhadem** rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} \in S$ z empirického rozdělení $\left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n}\right)$ rozumíme takové rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}(t) \in S$, že

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = -\text{grad} D_f(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}_0), \quad \forall t \in [0; \infty),$$

$$\mathbf{p}(0) = \frac{\mathbf{f}}{n} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right).$$

Věta 2.2. Jestliže funkce $f(u)$, která generuje kvazinormu $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ na S , má vlastnosti uvedené v definici 2.1 a má spojitou derivaci $f'(u)$ pro $\forall u \in (0; \infty)$, pak existuje jediný gradientní odhad $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{m-1}(t), p_m(t))$ rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} \in S$ z empirického rozdělení $\left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$ a jeho složky $p_1(t), p_2(t), \dots, p_{m-1}(t)$ jsou pro $\forall t \in [0; \infty)$ partikulárním řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SODR1)

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= -f'(mp_1(t)) + f' \left(m \left[1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(t) \right] \right), \\ p_2'(t) &= -f'(mp_2(t)) + f' \left(m \left[1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(t) \right] \right), \\ &\dots \\ p_{m-1}'(t) &= -f'(mp_{m-1}(t)) + f' \left(m \left[1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(t) \right] \right) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$p_1(0) = \frac{f_1}{n}, \quad p_2(0) = \frac{f_2}{n}, \dots, \quad p_{m-1}(0) = \frac{f_{m-1}}{n}$$

a složka

$$p_m(t) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(t) \quad \text{pro } \forall t \in [0; \infty).$$

Jiný odhad rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}$ z pozorovaných hodnot náhodné kategoriální veličiny X můžeme v prostoru S najít tak, že se nebudeme pohybovat po křivce největšího spádu jako u gradientního odhadu, ale po úsečce vycházející z empirického rozdělení pozorovaných četností $\frac{\mathbf{f}}{n} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$ a končící v rozdělení $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$. Potom odhad $\mathbf{p}(t)$ má složky

$$p_j(t) = \frac{f_j}{n} + \left(\frac{1}{m} - \frac{f_j}{n} \right) t,$$

kde $t \in [0; 1]$, $j = 1, \dots, m$. Složky $p_j(t)$ odhadu $\mathbf{p}(t)$ rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}$ jsou zřejmě konvexní kombinace odpovídajících složek $\frac{\mathbf{f}}{n}$ a $\mathbf{p}_0$. Tento tzv. **přímkový odhad** je totožný se známým diskrétním jádrovým odhadem s mocninnými jádry [4]

$$\hat{p}_n(x) = \frac{f_j}{n} \frac{1}{1+cm} + \frac{c}{1+cm} \quad \text{pro } c \in [0, \infty).$$

Jestliže vyjádříme složku $p_j(t)$ ve tvaru $p_j(t) = \frac{f_j}{n}(1-t) + \frac{1}{m}t$, pak vidíme, že platí

$$\frac{1}{1+cm} = 1-t \Rightarrow t = 1 - \frac{1}{1+cm} = \frac{cm}{1+cm} \quad \text{a} \quad \frac{c}{1+cm} = \frac{t}{m} \Rightarrow t = \frac{cm}{1+cm}.$$

Poznámka 2.2. Gradientní odhad, resp. přímkový odhad, $\mathbf{p}(t)$ závisí na hodnotě $t \in [0; \infty)$, resp. $t \in [0; 1]$. Jeho potřebnou hodnotu t_0 můžeme najít pomocí testu dobré shody. Při použití Pearsonova testu je t_0 kořenem nelineární rovnice

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{f_j^2}{p_j(t)} - n = \chi_{1-\alpha}^2.$$

Použijeme-li Pitmanův – Hellingerův test, je t_0 kořenem nelineární rovnice

$$8n \left(1 - \sum_{j=1}^m \sqrt{p_j(t) \frac{f_j}{n}} \right) = \chi_{1-\alpha}^2.$$

V obou případech je $\chi_{1-\alpha}^2 (1-\alpha)$ -kvantil chí kvadrát rozdělení s $m-1$ stupni volnosti a α je hladina významnosti pro test dobré shody. Obě testová kritéria jsou asymptotická a pro praktické použití požadujeme, aby $np_j(t_0) > 5$ pro $\forall j = 1, \dots, m$.

Poznámka 2.3. Gradientní odhad $\mathbf{p}(t)$ je spojitá vektorová funkce pro $\forall t \in [0; \infty)$ a jejím grafem je křivka největšího spádu kvazinormy $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ v S . Kvazinorma $D_f(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}_0)$ je nerostoucí pro $t \in [0; \infty)$ a

$$D_f(\mathbf{p}(0), \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f \left(m \frac{f_j}{n} \right) \geq D_f(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}_0) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} D_f(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}_0) = 0,$$

takže se gradientní odhad $\mathbf{p}(t)$ pro rostoucí $t \in [0; \infty)$ vzdaluje po křivce největšího spádu v S od empirického rozdělení $\frac{\mathbf{f}}{n} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$ směrem k rozdělení $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$.

Poznámka 2.4. Všechny odhady $\mathbf{p}(t)$ pro $\forall t \in [0; t_0]$ splňují zvolené testové kritérium z poznámky 2.2 na hladině významnosti alespoň α . Odhad $\mathbf{p}(t_0)$ je „nejhorší“ z těchto odhadů, takže jej můžeme označit jako tzv. *pesimistický gradientní, resp. přímkový, odhad*.

3. Gradientní odhad pomocí kvadratické kvazinormy

SODR1 ve větě 2.1 je obecně nelineární. K nalezení jejího řešení je proto nutno až na výjimku aplikovat některou numerickou metodu a současně hledat takovou hodnotu parametru t , který vyhovuje zvolené nelineární rovnici z poznámky 2.2. Pro řešení nelineární SODR1 byl vytvořen program Pesfit 1.0 v softwaru MATLAB. V něm se SODR1 řeší pomocí Rungeho-Kuttovy metody a k nalezení hodnoty t , kdy ještě nezamítáme hypotézu o vhodnosti rozdělení $\mathbf{p}(t)$, byla užita metoda bisekce. Výjimkou, kdy získáme explicitně řešení dané SODR1, je kvazinorma použitá v následující větě, která vede na lineární SODR1.

Věta 3.1. Necht' $f(u) = (u-1)^2$, takže $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (mp_j - 1)^2$ je kvadratická kvazinorma. Potom složky gradientního odhadu $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t))$ z empirického rozdělení $\left(\frac{f_1}{n}, \frac{f_2}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$ jsou pro $\forall t \in [0; \infty)$ partikulárním řešením nehomogenní lineární soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (LSODR1) s konstantními koeficienty a konstantními pravými stranami

$$\begin{aligned}
p_1'(t) &= -4mp_1(t) - 2mp_2(t) - \dots - 2mp_{m-1}(t) + 2m, \\
p_2'(t) &= -2mp_1(t) - 4mp_2(t) - \dots - 2mp_{m-1}(t) + 2m, \\
&\dots \\
p_{m-1}'(t) &= -2mp_1(t) - 2mp_2(t) - \dots - 4mp_{m-1}(t) + 2m
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$p_1(0) = \frac{f_1}{n}, \quad p_2(0) = \frac{f_2}{n}, \dots, \quad p_{m-1}(0) = \frac{f_{m-1}}{n}$$

a dále je

$$p_m(t) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j(t) \quad \text{pro } \forall t \in [0; \infty).$$

Gradientní odhad $\mathbf{p}(t)$ má složky

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= c_1 e^{-2m^2 t} + c_2 e^{-2mt} + \frac{1}{m}, \\
p_2(t) &= c_1 e^{-2m^2 t} + c_3 e^{-2mt} + \frac{1}{m}, \\
&\dots \\
p_{m-2}(t) &= c_1 e^{-2m^2 t} + c_{m-1} e^{-2mt} + \frac{1}{m}, \\
p_{m-1}(t) &= c_1 e^{-2m^2 t} - c_2 e^{-2mt} - \dots - c_{m-1} e^{-2mt} + \frac{1}{m}, \\
p_m(t) &= -(m-1)c_1 e^{-2m^2 t} + \frac{1}{m},
\end{aligned}$$

kde

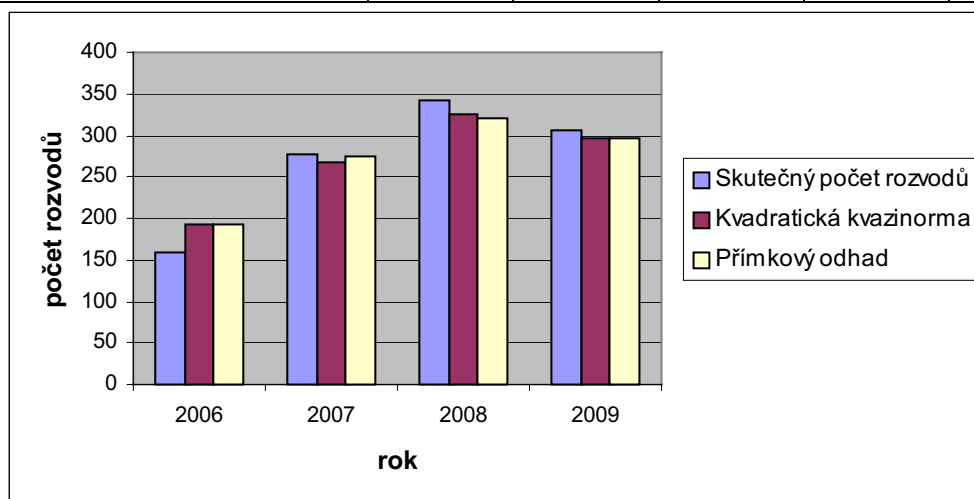
$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \dots + \frac{f_{m-1}}{n}}{m-1} - \frac{1}{m}, \\
c_2 &= \frac{\frac{(m-2)f_1}{n} - \frac{f_2}{n} - \dots - \frac{f_{m-2}}{n} - \frac{f_{m-1}}{n}}{m-1}, \\
c_3 &= \frac{-\frac{f_1}{n} + \frac{(m-2)f_2}{n} - \dots - \frac{f_{m-2}}{n} - \frac{f_{m-1}}{n}}{m-1}, \\
&\dots \\
c_{m-1} &= \frac{-\frac{f_1}{n} - \frac{f_2}{n} - \dots + \frac{(m-2)f_{m-2}}{n} - \frac{f_{m-1}}{n}}{m-1}.
\end{aligned}$$

Důsledek 3.1. Jestliže volíme za hodnoty parametru t takovou posloupnost t_n v závislosti na rozsahu výběru n , že $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, pak složky gradientního odhadu $\mathbf{p}(t_n) = (p_1(t_n), \dots, p_m(t_n))$ z věty 3.1 získané z empirického rozdělení $\frac{\mathbf{f}}{n} = \left(\frac{f_1}{n}, \dots, \frac{f_m}{n} \right)$ jsou asymptoticky nestranné odhady složek pozorovaného rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$.

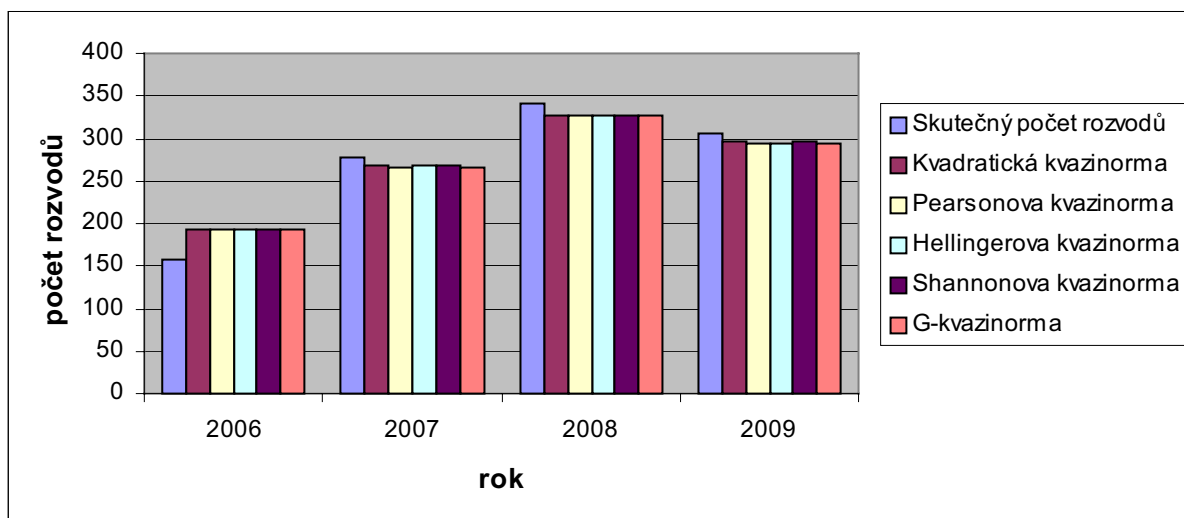
Příklad 3.1. V tabulce 3.1 je uveden počet manželství v České republice, které nevydržely déle než jeden rok. Dále jsou v tabulce vypočítané odhady četností rozvodů pomocí jednotlivých kvazinorem a přímkový odhad, včetně kritických hodnot t_0 , kdy ještě nezamítáme vhodnost vypočteného odhadu rozdělení na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. K výpočtu odhadů pomocí kvazinorem byl použit software Pesfit 1.0. Přímkový odhad byl vypočten pomocí optimalizačního řešiče v Excelu. Výsledky jsou ilustrovány na obr. 3.1 a 3.2.

Tabulka 3.1

Rok	2006	2007	2008	2009	t_0
Skutečný počet rozvodů	158	277	341	307	---
Kvadratická kvazinorma	193,2	268,1	326,4	295,4	0,02512
Pearsonova kvazinorma	193,2	266,6	328,0	295,2	0,02273
Hellingerova kvazinorma	193,2	267,3	327,3	295,2	0,04883
Shannonova kvazinorma	193,2	267,5	327,0	295,3	0,03212
G-kvazinorma	193,2	266,8	327,8	295,2	0,02511
Přímkový odhad	192	275	320	296	0,30102



Obr. 3.1



Obr. 3.2

4. Závěr

Gradientní i přímkové odhady $\mathbf{p}(t)$ rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné kategoriální veličiny X jsou vzhledem k variabilitě volby parametru t do jisté míry blízké diskrétním jádrovým odhadům. Umožňují také volit libovolnou hodnotu parametru t z intervalu $[0; t_0]$ a tím je přiblížit k empirickému rozdělení. Ukazuje se, že výpočet hodnoty t_0 je dosti citlivý na „strmost“ zvolené kvazinormy $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ a související numerické problémy s řešením odpovídající nelineární rovnice lze alespoň částečně zmenšit vhodným kladným násobkem $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$. Kvadratická kvazinorma z oddílu 3 je přitom až na tento násobek jediná, která vede na lineární soustavu diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. V současné době se zabýváme jednak citlivostí gradientních odhadů s kvadratickou kvazinormou na velikostech pozorovaných četností a jejich rozdílech, jednak nasazením dalších kvazinorem, které se osvědčily při fitování rozdělení pravděpodobnosti diskrétních náhodných veličin za vedlejších momentových podmínek [5]. Tyto kvazinormy ovšem vyžadují numerické řešení získaných nelineárních soustav diferenciálních rovnic. Předložené odhady založené na kvazinormách mají sice poněkud samoučelný charakter, ale ukazuje, že budou prakticky použitelné. Předpokládáme jejich aplikace v kategoriální analýze při řešení úloh z managementu, marketingu, sociologie a psychologie.

Literatura:

- [1] Vajda, I. *Teória informácie a štatistického rozhodovania*. Bratislava: Alfa, 1982.
- [2] Karpíšek, Z., Jurák, P., Šácha, J. Divergences for Discrete Probability Distribution Estimations. In: *Summer School DATASTAT '06, Proceedings*, Masaryk University, Brno, 2007, pp. 109-120, ISBN 978-80-210-4493-7.
- [3] Karpíšek, Z., Neradová, V., Žampachová, E. A Contribution to the Estimation of Discrete Probability Distribution. In: *MENDEL 2008. 14th International Conference on Soft Computing*. Brno, 18. – 20. 6. 2008, pp. 287-292, ISBN 978-80-214-3675-6.
- [4] Vávra, F. et al. Discrete Kernels. *Austrian Journal of Statistics*, Volume 35, 2006, No. 2 - 3, pp. 365-370.
- [5] Karpíšek, Z., Jurák, P., Neradová, V. Divergences and Quasi-norms of Discrete Probability Distributions. In: *6th International Conference APLIMAT 2007 (Part I)*. Bratislava, 6. – 9. 2. 2007, pp. 387-395, ISBN 978-80-969562-5-8.

Poděkování: Příspěvek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 „Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR“, grantového projektu GAČR reg. č. 103/08/1658 „Pokročilá optimalizace návrhu složených betonových konstrukcí“, grantového projektu GAČR reg. č. P403/11/2085 „Konstrukce metod pro vícefaktorové měření komplexní podnikové výkonnosti ve vybraném odvětví“ a výzkumného úkolu „Podpora řízení malých a středních firem s využitím matematických metod“ soukromé vysoké školy Akademie Sting v Brně.

STRUCTURAL DESIGN OF STRUCTURES USING SIMULATION METHODS

NÁVRH STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ S POUŽITÍM SIMULAČNÍCH METOD

Ivana Laníková, Petr Štěpánek*, Petr Šimůnek**

*Ústav betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně,
Veveří 95, 602 00 Brno

lanikova.i@fce.vutbr.cz, stepanek.p@fce.vutbr.cz, simunek.p@fce.vutbr.cz

Abstract: *Standard EC2 and original ČSN 73 1201-86 for design of concrete structures allow designing of a structure by several methods. Currently the partial reliability factor methods is used for design and assessment of the structure from the view of limit state because of its simplicity and the ease of obtaining input data which are given by used material, geometry and loads. Characteristic input data values are given in relevant parts of the standards and drawing documentation. However, the standard alternatively also enables the application of fully probabilistic approach based on simulation methods, e.g. Monte Carlo method (Latin Hypercube Sampling). This paper presents the comparison of the reliability of several variants of reinforcement of prestressed poles from spun concrete using both methods, including economic and environmental assessment of proposals.*

Keyword: *reliability, reliability factor, fully probabilistic approach*

Abstrakt: *Norma pro navrhování betonových konstrukcí EC2[2] stejně jako původní ČSN 73 1201-86 umožňuje návrh konstrukce provést více metodami. V současnosti je při návrhu a posouzení konstrukce z hlediska mezních stavů v převážné většině používána metoda dílčích součinitelů spolehlivosti [1] a to vzhledem ke své jednoduchosti a snadnému získání vstupních veličin, které jsou dány použitými materiály, geometrií a zatíženími. Charakteristické hodnoty těchto vstupních veličin jsou dány v příslušných ustanoveních norem a výkresovou dokumentací. Norma [1] však alternativně umožňuje i použití plně pravděpodobnostní analýzy založené na numerických simulacích např. typu Monte Carlo (Latin Hypercube Sampling). V příspěvku je provedeno porovnání spolehlivosti více variant vyztužení předpjatého stožáru z odstředovaného betonu pomocí obou metod včetně ekonomického a environmentálního zhodnocení provedených návrhů.*

Klíčová slova: *spolehlivost, součinitelé spolehlivosti, plně pravděpodobnostní přístup*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/146

1. Úvod

Většina norem pro navrhování konstrukcí umožňuje pro návrh konkrétní konstrukce použití více metod. Přitom hodnota výsledků získaných dle těchto metod závisí na

- úrovni zjednodušení, která do výpočtu daná metoda zavádí,
- kvalitě vstupních dat,
- odborné erudici projektanta a času, který má při návrhu konstrukce k dispozici.

V současnosti je při návrhu a posouzení konstrukce z hlediska mezních stavů v převážné většině používána metoda dílčích součinitelů spolehlivosti [1] a to vzhledem ke své jednoduchosti a snadnému získání vstupních veličin, které jsou dány použitými materiály a

zatíženími (vyplývající z účelu stavby a polohy). Charakteristické hodnoty těchto vstupních veličin jsou dány v příslušných ustanoveních norem a výkresovou dokumentací. Numerické hodnoty dílčích součinitelů jsou

- buď stanoveny na základě kalibrace s využitím dlouhodobých zkušeností ze stavební praxe (tento způsob je používán pro většinu dílčích součinitelů spolehlivosti uvedených v současných Eurokódech),
- nebo je lze stanovit na základě statistického vyhodnocení experimentálních údajů a zkoušek v terénu (postup se má provádět na základě teorie spolehlivosti a dílčí součinitelé spolehlivosti se mají kalibrovat tak, aby se úroveň spolehlivosti pro typické konstrukce co nejvíc blížila směrné hodnotě indexu spolehlivosti).

Pro kalibraci dílčích součinitelů spolehlivosti norma [1] kromě historických a empirických metod umožňuje použití pravděpodobnostních metod: spolehlivostní metody prvního řádu (FORM) (úroveň II), anebo plně pravděpodobnostní metody (úroveň III). Protože analytické řešení určení spolehlivosti konstrukce či její části (v podstatě se jedná o vyčíslení pravděpodobnosti poruchy) pro reálné konstrukce obvykle není známé, rozumí se v terminologii normy [1] pod pojmem „plně pravděpodobnostní metoda“ stanovení spolehlivosti pomocí simulačních metod. V tomto smyslu také bude někdy v textu tohoto příspěvku termín „plně pravděpodobnostní metoda“ také používán.

Norma [1] umožňuje alternativně použít i pravděpodobnostní metody navrhování. Potřebná aplikační pravidla však neuvádí. Základní informace o spolehlivostních metodách uvádí [1] v příloze C (viz předchozí odstavec) a jsou rovněž uvedeny i v [3]. Podle [3] lze ověření spolehlivosti konstrukce provést přímo pomocí „pravděpodobnostního přístupu“ (opět se zde myslí aplikace simulačních metod), anebo použitím dílčích součinitelů spolehlivosti.

2. Metody navrhování

Proces navrhování konstrukcí je provázen řadou nejistot, mezi které patří zejména

- náhodnost fyzikálních veličin vstupujících do návrhu (jako přirozená vlastnost každé veličiny),
- statistické nejistoty při popisu konkrétní veličiny způsobené omezeným množstvím dat,
- modelové nejistoty, které jsou dány nedostatky a nepřesnostmi výpočetních modelů ve srovnání s reálným chováním konstrukce,
- nejistoty vyvolané nepřesnostmi definic mezních stavů
- a chyby a nedostatky způsobené selháním lidského činitele v procesu navrhování, realizace, údržby a užívání konstrukce, nedokonalá znalost skutečného chování materiálů a konstrukcí.

2.1 Metoda dílčích součinitelů spolehlivosti

V klasickém přístupu posouzení spolehlivosti konstrukce pomocí metody dílčích součinitelů spolehlivosti jsou první tři uvedené skupiny nejistot skryty právě v dílčích součinitelích spolehlivosti, které se stanovují odděleně jak pro účinky zatížení E , tak pro odolnost konstrukce R (obr. 1). Jedná se sice o metodu polopravděpodobnostní, ale při její aplikaci není třeba znát konkrétní „hodnoty“ těchto nejistot. Posudek se zjednodušuje na dodržení jistých pravidel a doporučení a skutečná podstata posudku spolehlivosti však zůstává skrytá.

Podmínka spolehlivosti pro mezní stav y únosnosti (MSU) je

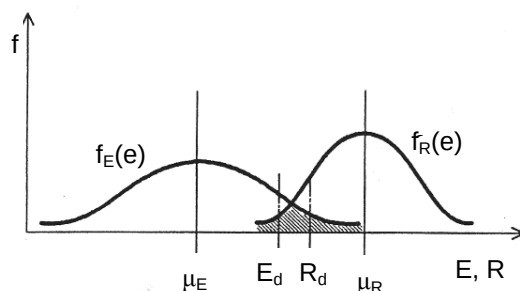
$$R_d \geq E_d, \quad (1)$$

a pro mezní stav y použitelnosti (MSP)

$$C_d \geq E_d, \quad (2)$$

kde R_d (ev. C_d) je návrhová hodnota odolnosti konstrukce (ev. příslušného kritéria použitelnosti), která zahrnuje dílčí součinitele spolehlivosti pro materiály a modelové nejistoty,

E_d je návrhová hodnota účinku zatížení zahrnující dílčí součinitele spolehlivosti pro zatížení a modelové nejistoty (ev. v případě MSP návrhová hodnota účinků zatížení stanovená v kritériu použitelnosti a určená na základě příslušné kombinace zatížení).



Obr. 1 Náhodné veličiny: R – odpor konstrukce, E – účinek zatížení

Pro MSU návrhová hodnota účinku zatížení E_d je podle [1] vyjádřena vztahem

$$E_d = \gamma_{sd} E(\gamma_{f,i} F_{rep,i}; a_d) \text{ pro } i \geq 1 \quad (3)$$

kde $F_{rep,i}$ je reprezentativní hodnota zatížení,
 $\gamma_{f,i}$ dílčí součinitel zatížení, který zohledňuje možné nepříznivé odchylky hodnot zatížení od reprezentativních hodnot,
 γ_{sd} dílčí součinitel zatížení, který zohledňuje nejistoty účinků zatížení a nejistoty modelu zatížení,

a_d je návrhová hodnota geometrického údaje.

Ve většině případů se může provést následující zjednodušení

$$E_d = E(\gamma_{F,i} F_{rep,i}; a_d) \text{ pro } i \geq 1 \quad (4)$$

kde $\gamma_{F,i}$ je dílčí součinitel spolehlivosti zatížení daný vztahem

$$\gamma_{F,i} = \gamma_{sd} \gamma_{f,i}. \quad (5)$$

Obdobně návrhová odolnost je podle [1] vyjádřena vztahem

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R\left(\eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{m,i}}; a_d\right) \text{ pro } i \geq 1, \quad (6)$$

kde $X_{k,i}$ je charakteristická hodnota vlastnosti materiálu,
 η_i průměrná hodnota převodního součinitele zohledňujícího vliv objemu a rozměrů, účinků vlhkosti a teploty apod.,

- $\gamma_{m,i}$ dílčí součinitel vlastností materiálu, který zohledňuje možné nepříznivé odchylky vlastností materiálu od její charakteristické hodnoty,
 γ_{Rd} dílčí součinitel, který pokrývá jistoty modelu odolnosti včetně geometrických odchylek,
 a_d návrhová hodnota geometrického údaje.

Vztah (6) může být zjednodušen na

$$R_d = R \left(\eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{M,i}}; a_d \right) \text{ pro } i \geq 1, \quad (7)$$

kde $\gamma_{M,i}$ je dílčí součinitel spolehlivosti zatížení daný vztahem

$$\gamma_{M,i} = \gamma_{Rd} \gamma_{m,i}. \quad (8)$$

Hodnoty jednotlivých dílčích součinitelů spolehlivosti jsou závislé na druhu posuzovaného mezního stavu, na návrhové situaci a na třídě spolehlivosti. Jsou vedeny v [1], v příslušných Eurokódech a v národních přílohách.

Charakteristické hodnoty vlastností materiálů představují buď střední hodnoty (např. modul pružnosti) nebo 5%, 95% event. jiný kvantil rozdělení uvažované náhodné veličiny (např. pevnostní charakteristiky, hodnoty mezních poměrných přetvoření) podle povahy mezního stavu a posuzované podmínky spolehlivosti.

2.2 Plně pravděpodobnostní přístup

Pravděpodobnostní postup vyjádření spolehlivosti konstrukce [4] pohlíží na proměnné vstupující do výpočtu jako na náhodné veličiny, jejichž nejistoty lze popsat metodami matematické statistiky. Tento přístup tedy vyžaduje znalost rozdělení pravděpodobnosti těchto veličin anebo alespoň znalost statistických parametrů jejich rozdělení, případně vzájemné statistické závislosti. Podmínka spolehlivosti se obvykle vyjadřuje pomocí funkce poruchy Z

$$Z = g(R, E) = R - E. \quad (9)$$

Hodnota $Z \geq 0$ znamená bezporuchový stav (rezerva spolehlivosti), hodnota $Z < 0$ znamená poruchu konstrukce (obr. 2). Veličiny E účinek zatížení a R odolnost konstrukce jsou funkcemi náhodných veličin, které představují zpravidla geometrické a materiálové charakteristiky, zatížení, případně vlivy dalších faktorů. Pravděpodobnost poruchy lze odvodit (např. [5]) ve tvaru

$$p_f = P(R < E) = P(Z < 0) = \int_{Z < 0} f_Z(z) dz, \quad (10)$$

kde $f_Z(z)$ je hustota pravděpodobnosti rozdělení funkce poruchy.

Podmínka spolehlivosti je pak vyjádřena ve tvaru

$$p_f \leq p_0, \quad (11)$$

kde p_0 je směrná hodnota pravděpodobnosti poruchy konstrukce.

Pokud má funkce poruchy Z normální rozdělení s parametry μ_Z (střední hodnota) a σ_Z (směrodatná odchylka), lze alternativně použít jako ukazatel spolehlivosti Cornellův index spolehlivosti β podle vztahu

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}. \quad (12)$$

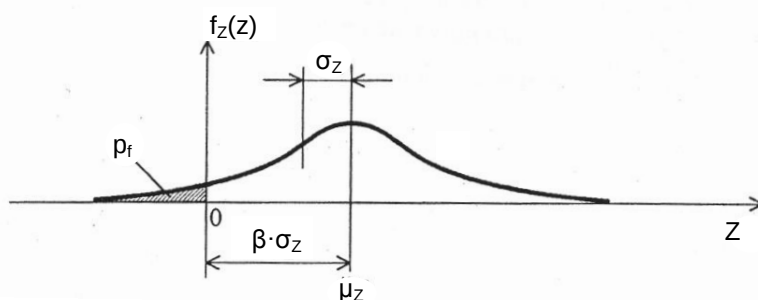
Platí

$$p_f = P(Z \leq 0) = P(g \leq \mu_z - \beta\sigma_z). \quad (13)$$

Podmínka spolehlivosti pak má tvar

$$\beta > \beta_0, \quad (14)$$

kde β_0 je směrná hodnota indexu spolehlivosti vztažená pro různé návrhové situace a referenční dobu pro nosné prvky v závislosti na třídě spolehlivosti daná v [1] a [3].



Obr. 2 Funkce poruchy Z , pravděpodobnost poruchy p_f , index spolehlivosti β

Takto určená pravděpodobnost poruchy však představuje pouze jistou hypotetickou úroveň poruchy a zpravidla neodpovídá skutečné pravděpodobnosti poruchy. Zohledňuje asi 20% celkového počtu poruch. Ostatní nejistoty způsobené prováděním, provozem a dalšími vlivy [6] nejsou ve výpočtu zahrnuty a představují hlavní náplň oboru rizikového inženýrství.

Analytické vyjádření funkce poruchy je možné jen v jednoduchých případech a má tedy jen omezené využití. Funkce poruchy $Z = g(R, E)$ zpravidla závisí na řadě náhodných veličin, jejichž rozdělení ne vždy odpovídá normálnímu rozdělení, a vztahy pro výpočet účinků zatížení E a funkce odolnosti R jsou často složité a nelineární, proto se k výpočtu pravděpodobnosti poruchy používají numerické metody (simulační, semianalytické). Numerické techniky použitelné na řešení rozsáhlých optimalizačních úloh obsahujících nejistoty jsou popsány v [11].

Podle [3] lze pro řešení časově nezávislé spolehlivosti konstrukce formulované pomocí pravděpodobnostního přístupu použít analytické metody např. FORM/SORM (First/Second Order Reliability Methods), simulační metodu Monte Carlo nebo numerickou integraci.

3. Environmentální zhodnocení

Při posuzování vhodnosti provedeného návrhu lze vzít na zřetel hlediska ekonomická a environmentální (pořizovací náklady, spotřebovanou energii a vzniklé emise CO_2 a SO_2 spojené s výrobou betonového prvku). Cílem je minimalizovat všechny tyto aspekty. Vzniklou multikriteriální úlohu je nutno řešit metodou vážených součtů. Vzhledem k tomu, že jednotlivé členy (sčítance) účelové funkce jsou v různých jednotkách, je nutno funkci normovat pomocí referenčních hodnot. Účelová funkce zohledňující tyto aspekty vztažená na jeden stožár pak může mít např. tvar

$$f(x) = \alpha_P \frac{P(x)}{{}_0P} + \alpha_{CO} \frac{CO_2(x)}{{}_0CO_2} + \alpha_{SO} \frac{SO_2(x)}{{}_0SO_2} + \alpha_E \frac{E(x)}{{}_0E}, \quad (15)$$

kde použité symboly znamenají:

- P pořizovací náklady

$$P = V_c U_p^c + m_s U_p^s + S_w U_p^w, \quad (16)$$

- CO_2 množství emisí CO_2

$$CO_2 = V_c U_{CO}^c + m_s U_{CO}^s + m_w U_{CO}^w, \quad (17)$$

- SO_2 množství emisí SO_2

$$SO_2 = V_c U_{SO}^c + m_s U_{SO}^s + m_w U_{SO}^w, \quad (18)$$

- E spotřebovanou energii

$$E = V_c U_E^c + m_s U_E^s + m_w U_E^w. \quad (19)$$

${}_0P$ (nebo ${}_0CO_2$, ${}_0SO_2$, ${}_0E$) jsou uživatelem nastavené referenční hodnoty pro pořizovací náklady (nebo množství emisí CO_2 , SO_2 , spotřebovanou energii), α_P (nebo α_{CO} , α_{SO} , α_E) váhy v účelové funkci (15) pro P (nebo emise CO_2 a SO_2 , spotřebovanou energii), V_c objem betonu, m_s (m_w) hmotnost betonářské oceli (přepínací výztuže), U_p^c , U_p^s , U_p^w jednotková cena betonu, betonářské a přepínací oceli, U_E^c , U_E^s , U_E^w spotřebovaná energie na jednotku betonu, betonářské a přepínací výztuže, U_{CO}^c , U_{CO}^s , U_{CO}^w množství emisí CO_2 vztažených na jednotku vyprodukovaného betonu, betonářské a přepínací výztuže, U_{SO}^c , U_{SO}^s , U_{SO}^w množství emisí SO_2 vztažených na jednotku vyprodukovaného betonu, betonářské a přepínací výztuže.

4. Ilustrativní příklad

Posuzován byl předpjatý stožár z odstředovaného betonu s geometrií a zatížením na obr. 3. Kriteriem spolehlivosti podle zásad normy [1] a [2] je požadavek splnění podmínek:

- mezního stavu únosnosti (MSÚ) při namáhání normálovou silou (od předpětí) a ohybovým momentem (od zatížení vrcholovou silou V) v zadaných diskrétních průřezích po délce stožáru,
- mezního stavu použitelnosti (MSP) kontrolujícího
 - průhyb hlavy stožáru od zatížení vrcholovou silou V ,
 - vznik trhlin při zatížení $0,5V$,
 - šířku trhlin pro zatížení V .

Jedná se o stožár o výšce $l = 10,5$ m a hloubce založení $h_z = 2$ m. Průřez stožáru má tvar mezikruží – vnější průměr stožáru v hlavě je $d_h = 220$ mm s tloušťkou stěny 60 mm, v patě $d_d = 370$ mm s tloušťkou stěny 70 mm. Stožár je vyroben z betonu C40/50, jako přepínací výztuž byly použity dráty s vtisky (PN) s pevností 1570 MPa profilu 6 mm, a betonářská výztuž B500B profilu 10mm (dále bude ve zkratce označována písmenem R). Výztuž je rovnoměrně rozdělena po obvodě stožáru s krycí vrstvou betonu 15 mm. Přepínací výztuž probíhá po celé délce stožáru a je kotvena v hlavě a v patě soudržností. Betonářská výztuž je navržena v kratších délkách tak, aby byly vykryty tahové síly od zatížení (obr. 4).

Zatížení stožárů se udává vodorovnou silou (vrcholová síla) působící v hlavě stožáru. Pro posuzovaný sloup je daná charakteristická hodnota vrcholové síly $V = 10 \text{ kN}$ (zahrnuje jednak tahy od vedení kabelů, jednak klimatická zatížení jako tlak větru a námrazu).

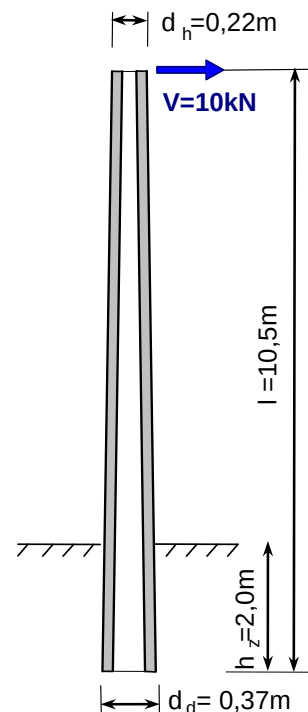
Návrh a posouzení stožáru bylo provedeno pomocí výpočtového programu, který byl sestaven podle algoritmů odvozených a uvedených v [7] a [8].

Při výpočtu podle metody dílčích součinitelů byly vstupní hodnoty uvažovány podle příslušných norem. Požadovaným podmínkám spolehlivosti vyhověl stožár vyztužený $20\phi\text{PN}/17\phi\text{R}$ (obr. 4, tab. 2).

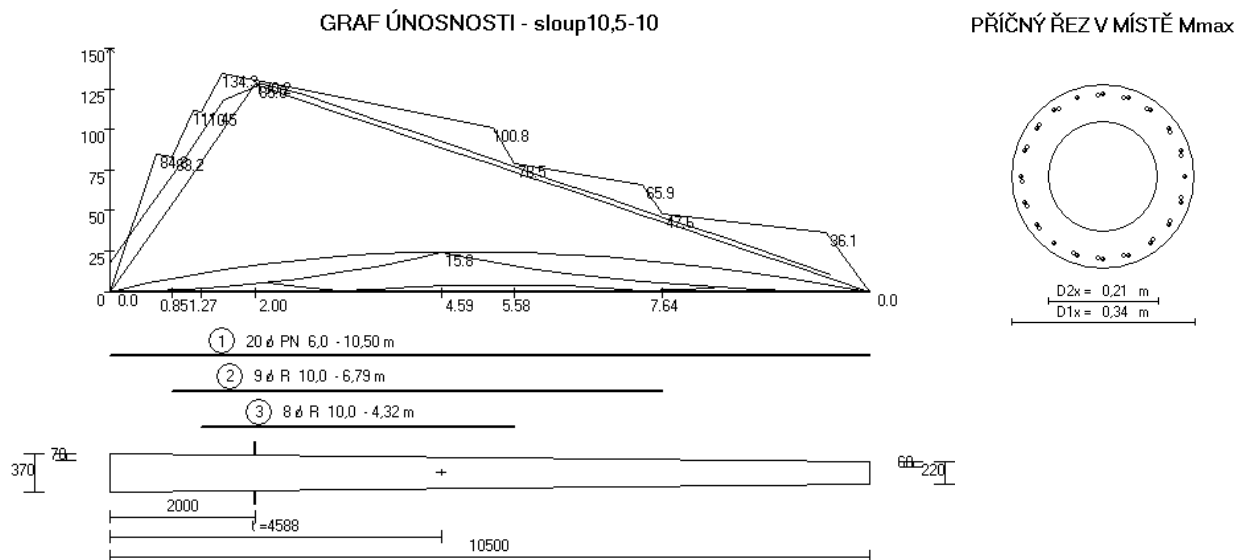
Při pravděpodobnostním přístupu posouzení spolehlivosti byly za náhodné veličiny vstupující do výpočtu uvažovány pouze některé proměnné, o kterých se předpokládalo, že budou mít na spolehlivost konstrukce rozhodující vliv. Jedná se o

- materiálové charakteristiky
 - betonu – pevnost betonu v tlaku, pevnost betonu v tahu, modul pružnosti a mezní poměrné přetvoření betonu v tlaku,
 - betonářské výztuže – mez kluzu, mez pevnosti, mezní poměrné přetvoření v tahu a plocha výztuže,
 - přepínací výztuže – mez pevnosti (a smluvní mez 0,1), modul pružnosti a mezní poměrné přetvoření v tahu,
- geometrické vlastnosti jako je
 - hloubka zapaštění sloupu do země (vetknutí),
 - krytí výztuže,
- a zatížení vrcholovou silou V .

Ostatní veličiny byly považovány za deterministické.



Obr. 3 Geometrie stožáru



Obr. 4 Vykrytí tahových sil ve výztuži a schéma vyztužení stožáru $20\phi\text{PN}/17\phi\text{R}$ [8]

Statistické parametry rozdělení většiny vybraných náhodných veličin včetně statistické závislosti byly převzaty z doporučení Joint Committee on Structural Safety [10], tak aby výsledné distribuční funkce těchto náhodných veličin co možná nejvíce odpovídaly realitě. Pro prezentovaný příklad byla uvažována hodnota vrcholové síly se statistickými parametry rozdělení uvedenými v Tab. 1. Je předpokládáno, že tyto statistické parametry jsou stanoveny k celkové době životnosti stožáru.

Podle doporučení JCSS [10] mají být do výpočtu spolehlivosti konstrukce R zahrnuty i nejistoty modelu odolnosti konstrukce (při výpočtu momentové únosnosti v průřezu namáhaného normálovou silou) pomocí náhodné proměnné θ_R

$$R = \theta_R f_R(y) \quad (14)$$

a obdobně i pro výpočet účinků zatížení E

$$E = \theta_E f_E(z), \quad (15)$$

kde f_R je funkce definující mezní stav a f_E je funkce definující účinky zatížení v závislosti na vstupních veličinách.

Uvažované statistické parametry rozdělení proměnných θ_R a θ_E jsou uvedeny v Tab. 1. (převzato z doporučení [10]).

Tab. 1 Statistické parametry rozdělení zatížení a modelových nejistot odporu konstrukce a zatížení

Veličina	Jednotky	Typ rozdělení	μ	σ	C.o.V.
V	[kN]	LN (2par)	5,5	2,75	0,5
θ_R	-	LN (2par)	1,2	0,18	0,15
θ_E	-	LN (2par)	1	0,1	0,1

Pro stanovení spolehlivosti byla použita simulační metoda Latin Hypercube Sampling (LHS), která poskytuje velmi dobré odhady funkce poruchy ve srovnání s klasickou metodou Monte Carlo již při nízkém počtu provedených simulací. Bylo provedeno 500 numerických simulací, vektory vstupních náhodných veličin byly generovány pomocí programu FReET [9]. Z těchto virtuálních numerických simulací byly získány soubory hodnot funkce účinků zatížení E , odporu konstrukce R a funkce poruchy Z . Statistickými metodami byly dále odhadnuty parametry rozdělení těchto veličin a určena pravděpodobnost poruchy a index spolehlivosti pro jednotlivé mezní stavy.

Podle pravděpodobnostního přístupu vyhoví požadovaným podmínkám spolehlivosti čtyři typy vyztužení stožáru a to 20øPN/17øR, 20øPN/15øR, 20øPN/13øR a 18øPN/17øR (tab. 2).

Tab. 2 Mezní a výsledné hodnoty posuzovaných veličin

Posuzovaná veličina	Plně pravděpodobnostní přístup				Metoda dílčích součinitelů spolehlivosti			
	MSÚ	MSP			MSÚ	MSP		
	N + M	Průhyb	Vznik trhlin	Šířka trhlin	Zatížitelnost	Průhyb	Vznik trhlin	Šířka trhlin
Mezní hodnota	β	β	p_f	p_f	V [kN]	f [mm]		w [mm]
	3,8	0	0,0668	0,0668	10	340,00	ne	0,150
12øPN/17øR	3,67	-	-	-	8,77	-	-	-
14øPN/17øR	3,80	3,22	0,1117	0,0506	9,14	218,15	ano	0,116
16øPN/17øR	3,92	3,62	0,0873	0,0386	9,47	197,33	ano	0,094

18øPN/17øR	4,02	4,04	0,0668	0,0236	9,76	180,17	ne	0,078
20øPN/17øR	4,11	4,45	0,0482	0,0209	10,03	166,20	ne	0,061
20øPN/15øR	3,99	4,23	0,0482	0,0209	9,54	170,95	ne	0,066
20øPN/13øR	3,85	4,02	0,0482	0,0261	9,06	174,87	ne	0,072
20øPN/11øR	3,70	-	-	-	8,58	-	-	-
Poznámka: Zvýrazněné hodnoty vyhovují příslušné podmínce spolehlivosti.								

Srovnání ekonomického a environmentálních hledisek navržených stožárů bylo provedeno pro pět variant hodnot váhových koeficientů podle tab. 3 a pro jednotkové cenové a environmentální dopady použitých materiálů podle tab. 4.

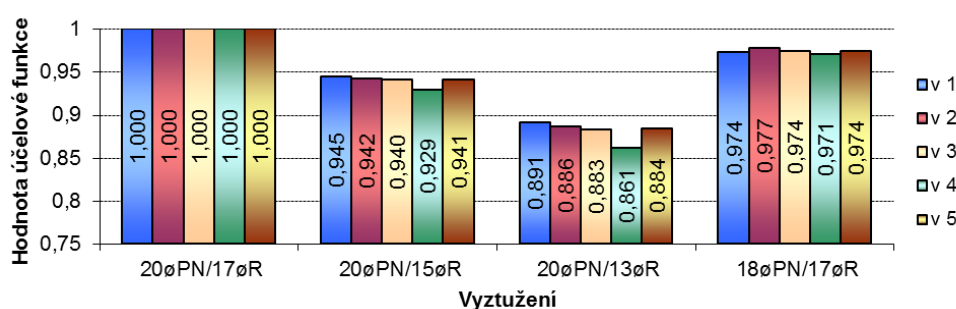
Tab. 3 Varianty hodnot váhových koeficientů

Varianta	v 1	v 2	v 3	v 4	v 5
α_p	1	0	0	0	0,5
α_{CO}	0	1	0	0	0,167
α_{SO}	0	0	1	0	0,167
α_E	0	0	0	1	0,167

Tab. 4 Jednotkové ceny a environmentální dopady stavebních materiálů

Materiál	Spotřebovaná energie [MJ/kg]	Emise		Cena	
		CO ₂ [kg CO ₂ /kg]	SO ₂ [g SO ₂ /kg]		
Beton C40/50	0,8	0,13	0,5	2385	CZK/m ³
Betonářská výztuž	49	3,2	14,6	23,7	CZK/kg
Předpínací výztuž	55	3,5	17	30	CZK/kg

Z grafu na obr. 5 vyplývá, že pro všech pět variant váhových koeficientů vychází nejpriznivěji (minimální) hodnota účelové funkce u stožáru s výztuží 20øPN/13øR. Tento stožár splňuje podmínky spolehlivosti pouze při použití pravděpodobnostního přístupu realizovaného simulační metodou. Tento návrh je o 11-14% úspornější v závislosti na posuzované variantě nastavených váhových koeficientů oproti stožáru s výztuží 20øPN/17øR, který jako jediný vyhověl podle metody dílčích součinitelů spolehlivosti (a jehož cena a environmentální dopady byly při vyhodnocení účelové funkce uvažovány za referenční).



Obr. 5 Srovnání cen a environmentálních dopadů pro vyšetřované varianty vyztužení stožáru

5. Závěr

Je zřejmé, že obě uvedené metody poskytují jiné úrovně spolehlivosti návrhu. Největší rozdíl byl dosažen při posouzení mezního stavu únosnosti, při posouzení všech mezních stavů použitelnosti byly výsledky srovnatelné.

Plně pravděpodobnostní výpočet však oproti metodě dílčích součinitelů spolehlivosti vyžaduje

- znalost definice rozložení vstupních veličin a jejich charakteristiky,
- výpočetní nástroj pro opakovaný výpočet,
- dostatečné odborné znalosti.

Použití plně pravděpodobnostního přístupu návrhu a ověření spolehlivosti stožáru však umožňuje promítnout do procesu navrhování opakovanou výrobu s možností řízení a zvyšování její kvality (management výroby). Jednotlivé vstupní veličiny, které jsou považovány za náhodné proměnné s daným rozdělením pravděpodobnosti (nebo statistickými parametry rozdělení), lze získat jejich dlouhodobým sledováním a vyhodnocováním.

Provedením parametrických testů vlivu jednotlivých vstupních veličin na výsledné hodnoty pravděpodobnosti poruchy pro jednotlivé mezní stavy únosnosti a použitelnosti lze vytipovat ty vstupní hodnoty, které se na ovlivnění spolehlivosti podílejí v největší míře. Toto znamená možnost zpětného vazby návrhu konstrukce na výrobu a její cílené zkvalitňování.

Konstrukci pak lze navrhnout tak, aby bylo dosaženo jak úspory v nákladech na výrobu stožárů (cena materiálu, spotřebovaná energie), montáž, provoz, údržbu, demontáž a na jeho recyklaci, tak snížení celkového dopadu na životní prostředí.

Literatura

- [1] ČSN EN 1990: 2004 Eurokód: *Zásady navrhování konstrukcí*, ČNI 2004
- [2] ČSN EN 1992-1-1: 2006 Eurokód 2: *Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*, ČNI 2006
- [3] ISO 2394:1998 (E) General principles on reliability for structures
- [4] Karpíšek, Z.: Stochastické modelování spolehlivosti. Sborník konference *Celostátní seminář Analýza dat 2005/II*. Lázně Bohdaneč 2005, pp. 75-98, ISBN 80-239-6552-2
- [5] Šejnoha, J., Blažek, V.: Základy inženýrského pojetí spolehlivosti a jejího vyhodnocení, Sborník *VI. konference Spolehlivost konstrukcí*, 2005
- [6] Holický, M.: Navrhování stavebních konstrukcí na základě přijatelných rizik, Sborník *I. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí*, 2000, Ostrava.
- [7] Laníková, I., Štěpánek, P.: Optimalizovaný návrh stožárů z předpjatého betonu – parametrická studie, Sborník konference *14. Betonářské dny 2007*, ČBS Servis, 2007, s. 421-426, ISBN 978-80-87158-04-3
- [8] Laníková, I., Štěpánek, P.: Optimalizovaný návrh železobetonových, předpjatých a kombinovaných stožárů z předpjatého betonu podle zásad ČSN EN 1992-1-1, Sborník konference *13. Betonářské dny 2006*, ČBS Servis, 2006, s. 256-261, ISBN 80-903807-2-7
- [9] Novák, D., Vořechovský, M., Rusina, R.: *FReET v. 1.0 – program documentation. User's and Theory Guides*. Brno, Červenka Consulting 2007, <http://www.freet.cz>
- [10] JCSS: *Probability model code*, ISBN 978-3-909386-97-6, <http://www.jcss.ethz.ch>
- [11] Popela, P., Vlk, M.: Bayesian Approach and Other Updating Techniques, Chapter 16. In Marek, P.-Brozzetti, J.-Guštar, M.-Tikalsky, P.: *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, 2nd edition. ITAM. Semily: TEREKO, GLOS, 2003. s. 404-422. ISBN: 80-86246-19-1

Poděkování: Výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT ČR v rámci výzkumného centra AdMaS „Advanced Materials, Structures and Technologies“ CZ.1.05/2.1.00/03.0097. Při jeho zpracování byly aplikovány i poznatky získané z řešení projektu MPO ČR FR-TI1/357 „Betonové konstrukce s nekovovou výztuží se zvýšenou požární odolností a odolností vůči agresivním vlivům“.

STATISTICAL APPROACH TO AEROSOL TRANSPORT EVALUATION UNDER CYCLIC CONDITIONS

STATISTICKÉ VYHODNOCOVÁNÍ DAT TRANSPORTU ČÁSTIC AEROSOLU PŘI CYKlickÝCH PODMÍNKÁCH

Tomáš Mauder, Jan Jedelský, František Lízal, Miroslav Jícha

Energetický ústav, Odbor termomechaniky a techniky prostředí, Fakulta strojního inženýrství,
Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2, 616 69 Brno
ymaude00@stud.fme.vutbr.cz

Abstract: *The effort to understand how aerosols transport and deposit in lungs drove us to application of particle velocity measurement with P/DPA (Phase Doppler Particle Anemometry). We have used optically transparent realistic human airway model and liquid aerosol for experiments under cyclic breathing conditions. The aerosol diameter, breathing frequency, tidal volume and way of the air supply was varied during experiments. We have employed statistical methods to distinguish and quantify differences in character of the aerosol transport for particular cases. Aerosol measurement using P/DPA gives results with non-equidistant sampling and unlike data rates in particular cases. Particle velocity and turbulence are variable with the cycle phase which makes the situation more complicated. Common statistical methods are not appropriate in this case. Statistical approach proposed in the paper is based on linear regression models of data fits. A test for the equality of two linear regression curves includes a heteroskedasticity effect. Our methods were implemented in MATLAB software. Mathematical background, results and discussions are presented in the paper.*

Keywords: linear regression, weight function, heteroskedasticity

Abstrakt: *Pro lepší porozumění transportu a depozice aerosolu v plicích jsme přistoupili k měření rychlosti částic systémem P/DPA (Phase Doppler Particle Anemometry). K experimentu cyklického dýchání byl použit realistický model plic a kapalný aerosol. V rámci experimentu byly zvoleny různé průměry částic aerosolu, dýchací frekvence, objemy dechu a způsoby dodávky vzduchu. Byl vytvořen statistický přístup, který vyjadřuje míru rozdílu jednotlivých případů. Aerosol měřený pomocí systému P/DPA je zaznamenáván v neekvidistantní datové formě s různým datovým rozsahem. Rychlost a turbulence částic není při cyklickém průběhu konstantní, což problém komplikuje. Použití běžných statistických metod v tomto případě není vhodné. Statistický přístup je v tomto článku založen na lineárních regresních modelech. Test shodnosti regresních přímek zahrnuje heteroskedasticitu naměřených dat. Naše metoda byla implementována v programu MATLAB. Matematický popis, výsledky a zhodnocení jsou představeny v závěru článku.*

Klíčová slova: lineární regrese, váhová funkce, heteroskedasticita

DOI: 10.5300/IB/2011-2/156

1. Úvod

Zvýšená intenzita automobilové dopravy, průmyslová výroba, energetika a domácí kotle na tuhá paliva jsou hlavními zdroji znečištění ovzduší [5]. Koncentrace tuhých a kapalných částic ve venkovním prostředí se neustále zvyšuje a současně s tím narůstá i výskyt nemocí

lidského dýchacího traktu. Nejčastějšími obtížemi jsou astmatická onemocnění, bronchitidy, zhoršení vývoje plicních funkcí u dětí a rostoucí počet karcinomů plic [2]. Při onemocnění plic jsou léky často podávány vdechováním. Účinná látka se však na zamýšlené místo v plicích dostane pouze tehdy, když má aerosol správnou velikost a tvar. Částice s velikostí mezi 100 a 10 μm jsou většinu zachyceny v horních dýchacích cestách a částice menší než 10 μm pronikají do dolních partií dýchacích cest. Studium transportu částic v realistickém modelu plic nám umožní lépe pochopit mechanismy, které působí v plicích při vdechování aerosolu. Pomocí studie bude možné pacientovi podat lék v podobě aerosolu, který bude působit pouze v místě postižení. Podávání léků formou vdechování však není omezeno pouze na pacienty s dýchacími obtížemi. Velká budoucnost se předpovídá např. aplikaci inzulínu vdechováním u diabetiků. Velká výhoda spočívá v tom, že účinná látka se dostane do krevního oběhu okamžitě a zároveň na poměrně velké ploše [3].

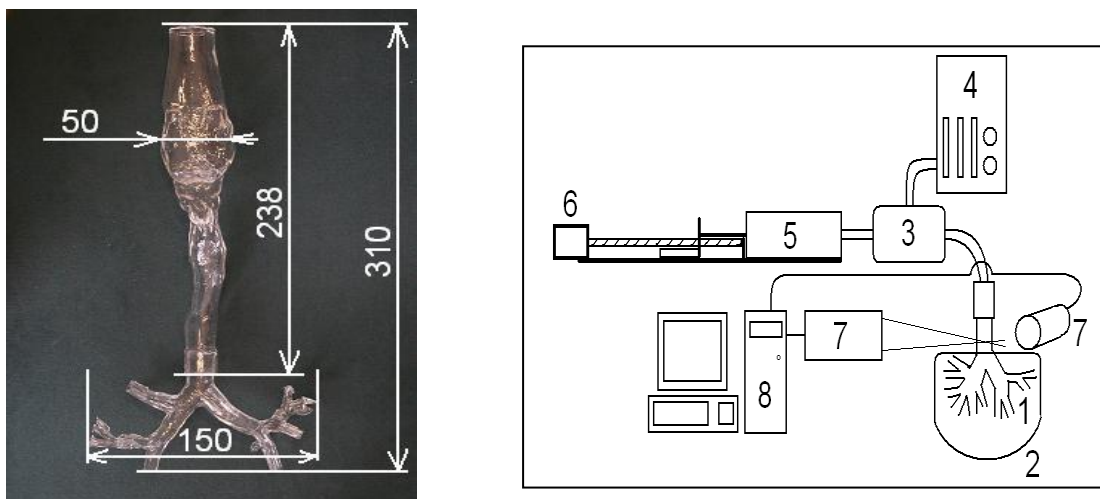
Jedním z našich cílů je tedy studie transportu aerosolu při různých dýchacích zátěžích (odpočinek, běžný dech, lehká aktivita, ...) pro různé velikosti částic na několika místech v lidských plicích. Model plic, který jsme vyvinuli na našem pracovišti, je určen pro měření pomocí optických metod. Měření je prováděno se vzduchem, proto je nutné, aby model měl co nejtenčí stěnu, čímž lze omezit problémy s lomem paprsku laseru. Uvnitř modelu plic jsme schopni měřit velikost a rychlost částic. Model je v současnosti vyvinut do šestého dělení. V tomto článku jsou prezentovány data experimentů, které byly provedeny na měřicí trati. Pomocí Phase/Doppler Particle Analyser (P/DPA) jsme měřili rychlost a velikost částic aerosolu v trachei. Pro práci s naměřenými daty musíme použít statistické metody, k vyhodnocení a rozlišení jednotlivých výsledků experimentu. V prvním kroku bylo potřeba zvolit vhodnou statistickou metodu. Jako nejjednodušší cesta k porovnávání datových souborů se jeví využití klasických statistických metod, které jsou implementovány v komerčních softwarech. Tyto metody mají však obecné omezení, například stejný počet porovnávaných hodnot, ekvidistanční dělení dat, podmínka normálního rozdělení dat apod. Systém P/DPA při zachycení průletu částice zaznamená její rychlost a čas průletu. Výsledky obdržené systémem P/DPA při realistických dýchacích podmínkách proto nesplňují obecná omezení klasických statistických metod a tedy i jejich další použití.

Tento článek je především zaměřen na popis použitých statistických metod pro porovnávání dat z jednotlivých měření. Je zde popsáno několik rozdílných způsobů a jejich použitelnost pro naše měření.

2. Realistický model plic a měřicí trať

K vytvoření modelu byla použita data z [4], která jsou přesná až do 17. dělení, ale neobsahují popis částí od trachey nahoru. Proto byla provedena 3D CT měření mužského dospělého dobrovolníka ve fakultní nemocnici U Svaté Anny v Brně, která dodala data použitelná od ústní dutiny do třetího dělení. Tyto dva modely byly zkombinovány a napojeny na sebe v oblasti trachey, obr. (1).

Dále byla vyvinuta metoda výroby průhledného modelu z jádra vyrobeného pomocí rapid prototypingu. Na jádro se nejprve nanese několik vrstev vodou rozpustného PVA separátoru. Po jeho zaschnutí se nanese silikon v několika vrstvách, podle požadované tloušťky. Po vytvrzení silikonu se pak vodou vypláchne jádro se separátorem a pro zajištění dokonalé průhlednosti se nanese ještě vrstva silikonu na vnitřní stranu modelu [5].



Obr. 1 Realistický model plic (vlevo), měřicí trať (vpravo) 1...realistický model plic, 2...vak, 3...směšovací komora, 4...generátor aerosolu, 5...válec s pístem, 6...elektromotor s pohybovým šroubem, 7...vysílací a přijímací optika P/DPA, 8...počítač

Realistický model plic byl zabudován do měřicí trati a napojen na zdroj vzduchu, který simuluje dýchání a umožňuje nastavit různé dýchací režimy. Skládá se z válce s pohyblivým pístem, který je ovládán elektromotorem. Pomocí počítače je možné nastavit dechové objemy až do 3 l a dobu trvání jednoho cyklu od 1 s. Vzduch proudící z válce se ve směšovací komoře smísí s aerosolem produkovaným generátorem monodisperzního aerosolu. Velikost částic je možné nastavit v rozmezí 1 až 10 μm . Kontrolu velikosti a koncentrace aerosolu zajišťuje monitor aerosolu. Výstupní větve modelu jsou uzavřeny do vaku. Cyklus je tedy uzavřený a aerosol proudí modelem při vdechu i při výdechu. Pro měření rychlosti a velikosti kapek byl použit P/DPA.

Měření byla provedena v trachei ve vzdálenosti cca 20 mm od nultého dělení v ose (střednici) trubice. PDA systém vyhodnocoval velikost částic a jejich osovou rychlost. Výsledkem byla sada dat s velikostí, osovou rychlostí a dobou příletu kapky do měřícího objemu pro řádově 10^3 - 10^5 kapek.

Samotný experiment probíhal tak, že se nejprve nastavila požadovaná velikost částic aerosolu, perioda cyklu dýchání a dechový objem. Po ustálení velikosti částic byl aerosol puštěn do směšovací komory a zároveň začal pracovat elektromotor simulující dýchání. Aerosol pak při nádechu prošel celým objemem plic, dostal se i do vaku a při výdechu proudil zpět. Postupně došlo během několika cyklů k rovnoměrnému rozmístění aerosolu v modelu plic, ve vaku a v trubicích. Když byla koncentrace aerosolu dostatečná, byl generátor odpojen od směšovací komory [5].

3. Naměřená data

Hlavním cílem je nalezení vhodných statistických nástrojů, použitelných k problematice měření rychlostních profilů aerosolu v modelu lidských plic. Pro tento účel byla provedena sada měření, pro různá nastavení generátoru aerosolu. Tyto režimy jsou zachyceny v tab. (1). Tyto režimy byly voleny pro různé dýchací zátěže, které popsuje literatura v souladu s předešlou prací [6]. Měření proběhlo ve dvou měřících bodech, první v ose trubice (A - 0

mm od osy trubice) a druhý v blízkosti stěny trubice (A - 4 mm od osy trubice) obr. (2). Pro každé nastavení byla provedena sada třech měření. Pro 18 různých nastavení bylo tedy celkově provedeno 54 měření. Časová délka měření dosahuje 30 000 - 35 000 ms, což je pro první dva režimy zhruba 9 period.

Tab. 1 Nastavení režimů

Dechový objem/cyklus	Velikost částic	Měřící body
0,5l/4s	1 μm	0 mm
	3 μm	
	6 μm	4 mm
1l/4s	1 μm	0 mm
	3 μm	4 mm
	6 μm	
1,5l/3s	1 μm	0 mm
	3 μm	4 mm
	6 μm	

Měření systémem PDA probíhá tak, že při průletu částice systém zaznamená aktuální rychlost a čas průletu částice. Z toho je zřejmé, že naměřená data nejsou ekvidistantní, tedy jednotlivé naměřené hodnoty nejsou ukládány po stejných časových úsecích a dva pozorované průběhy nemají stejný počet hodnot.

4. Statistické vyhodnocení, výsledky a zhodnocení

Statistika by v našem případě měla odpovědět na otázku, jestli při porovnávání dvou nastavení lze rychlostní profily částic uvažovat jako shodné nebo nikoliv. Zároveň by statistika měla určit míru rozdílu dvou režimů. Jde tedy o porovnávání dvou datových souborů, přičemž v každém jsou dva sloupce hodnot. Jeden časový, který chápeme jako osu x a jeden udávající aktuální rychlost, kterou vynášíme na osu y. Naměřená data simulují fyziku plíc, proto mají periodický charakter.

Jak bylo uvedeno, datové soubory nemají stejný počet dat a nejsou ekvidistantní. Jednou cestou by mohla být interpolace dat pro konstantní časové úseky. Bohužel vyhodnocení takto upravených dat nemusí přinést vhodné a statisticky správné závěry. V našem případě jsme se rozhodly pozorované data proložit regresní funkcí a porovnávat dva soubory testem shodnosti dvou regresních přímek [6].

Máme tedy dva regresní lineární modely:

$$y = \beta_0 + \beta_1 f(x), \quad (1)$$

$$y^* = \beta_0^* + \beta_1^* f(x^*), \quad (2)$$

kde $f(x) = \sin \frac{2\pi x}{T}$ a $f(x^*) = \sin \frac{2\pi x^*}{T}$. Pro první dva režimy perioda $T = 4000$ [ms] a pro zbývající $T = 3000$ [ms]. Při ověřování shodnosti těchto regresních funkcí testujeme hypotézu $H_0 : \beta = \beta^*$ proti hypotéze $H_1 : \beta \neq \beta^*$, kde $\beta = (\beta_0, \beta_1)'$, $\beta^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)'$. Parametry β odhadneme metodou nejmenších čtverců a odhad označíme b . Pro test je nezbytný předpoklad, že pozorované soubory jsou statisticky nezávislé.

Hodnota testového kritéria je potom podle [1]

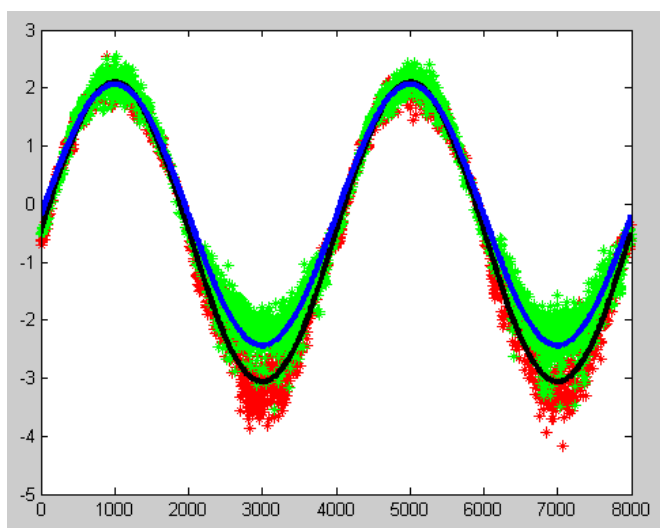
$$Z = \frac{n + n^* - 4 (b - b^*)' [(X'X)^{-1} + (X'^*X^*)^{-1}]^{-1} (b - b^*)}{2 (n-2) s^2 + (n^*-2) s^{*2}}, \quad (3)$$

kde n, n^* je počet hodnot v prvním a druhém souboru, s^2, s^{*2} jsou rozptyly souborů, b, b^* je vektor odhadů regresních parametrů a pro první a druhý datový soubor je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} 1 & x_1^* \\ 1 & x_2^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n^*}^* \end{bmatrix}.$$

Náhodná veličina Z má za platnosti H_0 rozdělení Fisherovo-Snedecorovo $F_{2, n+n^*-4}$. Jestliže platí nerovnost $Z \geq F_{2, n+n^*-4}(\alpha)$, zamítáme hypotézu H_0 na hladině významnosti α . Tento test jsme naprogramovali v programu Matlab. Na obr. (3) můžeme vidět vykreslené dva soubory dat proložené regresní funkcí. První soubor obsahuje data z režimu 0,5l/4s-3 μm -0mm která jsou zbarvena červeně a příslušná regresní funkce černě. V druhém souboru jsou data z režimu 0,5l/4s-3 μm -4mm zbarvena zeleně a příslušná regresní funkce modře. Z důvodu přehlednosti jsou vykresleny pouze dvě periody.

Hodnota testového kritéria v tomto případě vyšla $Z = 8,2900e+003$, přičemž $F = 4,6056$. Protože $Z \geq F$ zamítáme hypotézu o shodnosti regresních funkcí. Tato skutečnost je i zcela zřejmá ze samotného obrázku a z povahy problému, kdy můžeme očekávat, že rychlost ve středové ose bude vyšší než u stěny. Z obrázku je ale rovněž patrné, že naměřená data nemají konstantní rozptyly podél času. Tedy jeden ze základních požadavků lineární regrese homoskedasticita není splněn. V tomto případě může dojít ke špatnému odhadu regresních koeficientů.



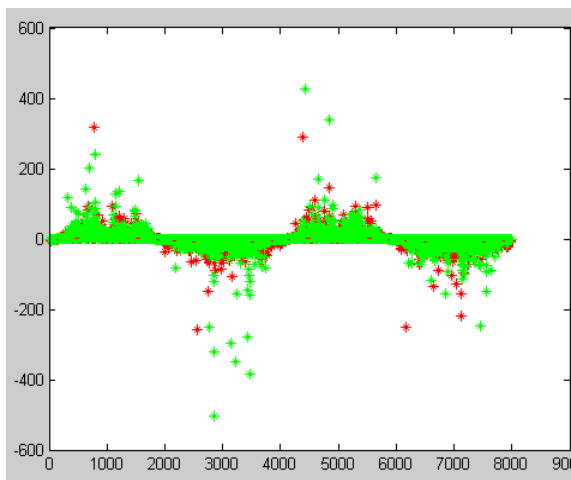
Obr. 3 Proložené data regresní funkcí

Dále si představíme dvě metody, jak jsme v tomto případě postupovali [6]. První z nich je, použití vhodné váhy pro regresní funkci, která stabilizuje rozptyl a zamezí velké chybě při odhadu regresních parametrů. Regresní funkce s použitím váhy následně vypadá

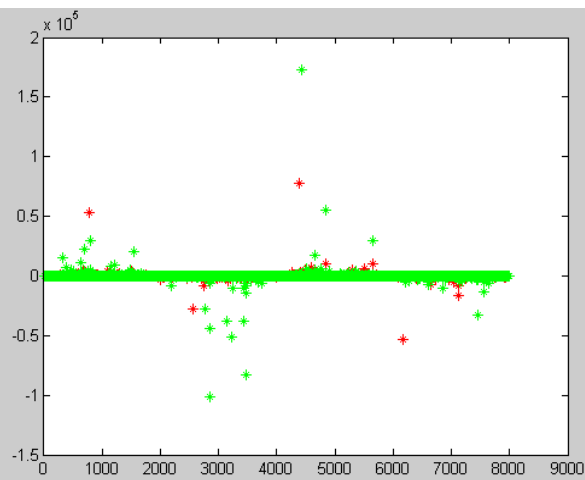
$$y = \beta_0 \sqrt{w(x)} + \beta_1 f(x) \sqrt{w(x)}, \quad (4)$$

$$y^* = \beta_0^* \sqrt{w(x^*)} + \beta_1^* f(x^*) \sqrt{w(x^*)}. \quad (5)$$

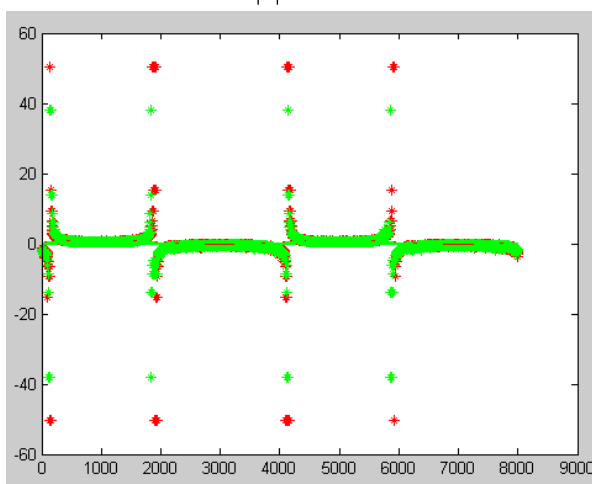
Pro naše data byly testovány tři váhové funkce $w = \frac{1}{r^2}$, $w = \frac{1}{|r|}$, $w = \frac{1}{y}$, kde r je vektor residuí. Hladina zamítnutí po použití váhy zůstává stejná, ale hodnota testového kritéria Z je pro různé funkce různá. Pro uvedené váhy je její hodnota pod obrázkem.



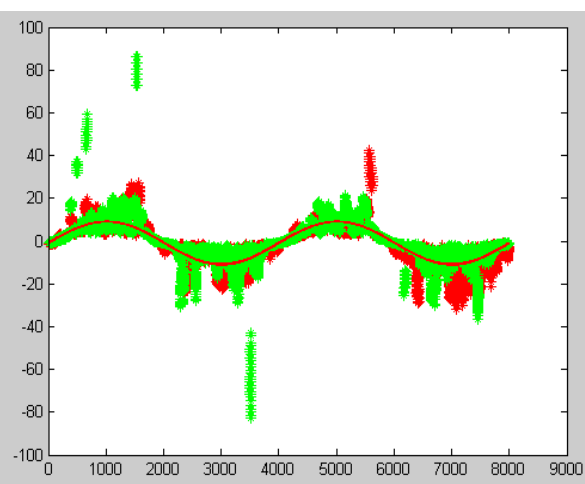
Obr. 4 $w = \frac{1}{|r|}$, $Z = 1,2236$



Obr. 5 $w = \frac{1}{r^2}$, $Z = 8,1594e - 007$



Obr. 6 $w = \frac{1}{y}$, $Z = 0,0099$

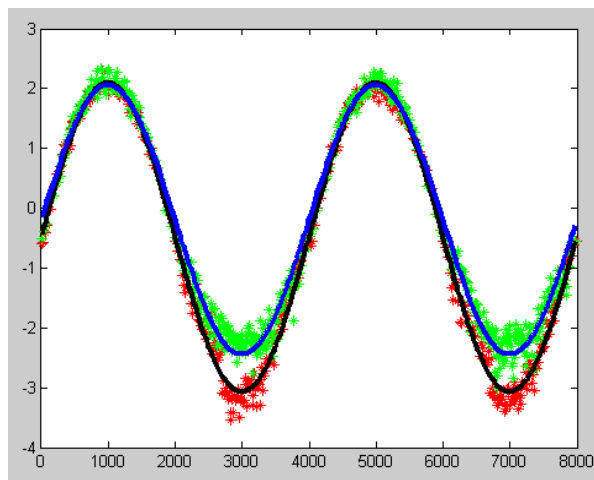


Obr. 7 $w = \frac{1}{|r|}$, $Z = 10,9865$

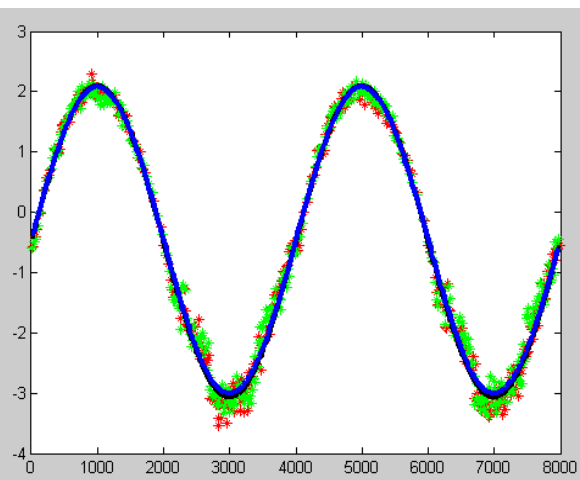
Podle obr. (6) je vidět, že tento případ je zcela nevhodný pro naše použití. Druhá váhová funkce obr. (5) vyhlazuje data natolik, že testem potom projdou i soubory, které jsou zcela rozdílné. Jediným pro test použitelnou váhovou funkcí je první zmiňovaná váha $w = \frac{1}{|r|}$

obr. (4), která ale také test o shodnosti regresních funkcí nezamítla. Z tohoto pohledu se zdají být všechny tři váhové funkce nevhodné. Bohužel nalézt nějakou vhodnější váhovou funkci se zatím nepodařilo i když jistou modifikací první váhové funkce se podařilo dosáhnout lepších výsledků. Tato modifikace konkrétní modifikace upravovala vektor residuí, kde za hodnotu residu r_i na i -té časové úrovni byla dosazena průměrná hodnota $\bar{r}$, získaná zprůměrováním okolních residuí. Pokud tato hodnota byla zvolena z 10 okolních residuí, hodnota testového kritéria vyšla $Z = 1,5750$. Pokud bylo hodnot použito 100, $Z = 10,9865$ a test zamítl shodnost souborů. Pro různé nastavení vzhledem k různému počtu dat by ale bylo potřeba tuto hodnotu měnit.

Druhá metoda byla založena na práci s daty před použitím regrese. Data byla ořezána ve smyslu nahrazení každých n hodnot jednou, která byla získána jako aritmetický průměr. Otázkou je podobně jako v předchozím případě jak zvolit n . Pro množství dat, které PDA naměřil se jako vhodné ukázalo zavést $n = 50$. Po tomto výpočtu vyšla hodnota $Z = 511,4458 \geq F = 4,6282$ obr. (8).



Obr. 8 Regresní analýza zprůměrovaných dat



Obr. 9 Regresní analýza zprůměrovaných

Pokud budeme porovnávat jiné dva soubory např. dva soubory naměřené při stejných režimech 0,5l/4s-3 μ m-0mm, dostaneme $Z = 4,5051 \leq F = 4,6330$, nezamítáme tak hypotézu o shodnosti souborů. Můžete tedy říci, že model dokáže rozpoznat vzorky, které můžeme z hlediska rychlostních profilů považovat za stejné a které nikoli. Rovněž vyšší hodnota Z znamená větší neshodnost vzorků. Například pokud budeme pozorovat rozdíl mezi velikostí částice, nebo mezi rozdílným nastavením dechového objemu, můžeme konstatovat, že rychlostní profil je mnohem více rozdílný v případě rozdílného dechového objemu. Tato skutečnost je zanesena v tab. (2).

Tab. 2 Porovnání režimů

1. soubor	2. soubor	Z
1.0l/4s-0mm-3 μ m	0.5l/4s-0mm-3 μ m	1.2211e+004
1.0l/4s-0mm-3 μ m	1.0l/4s-0mm-1 μ m	6.1035
1.0l/4s-0mm-3 μ m	1.0l/4s-0mm-6 μ m	0.6418

5. Závěr

V článku šlo především o nastínění problému statistického vyhodnocování dat, obdržených ze simulace dýchání z modelu lidských plic. Několik statistických přístupů bylo testováno. Jako nejpoužitelnější metoda se ukazuje použití regresních funkcí na zprůměrovaných datech. Tímto směrem se nadále vydáváme a budeme model testovat na dalších datech a na dalších režimech nastavení modelu plic. V přístupu použití váhové funkce v regresní analýze rovněž budeme pokračovat.

Literatura

- [1] ANDĚL, J. *Matematická statistika*, SNTL/Alfa, Praha, L11-C3-III-84/17991. (1985)
- [2] Kolektiv CENIA, české informační agentury životního prostředí. Zpráva o životním prostředí České republiky v roce 2006. 1. vyd. Praha : [s.n.], 2007. 223 s. Dostupný z WWW:<<http://www.env.cz/AIS/webnews.nsf/9ab6596b5dac8075c1256662002b0723/9a6e925ea1ce1d71c125736b0047718e?OpenDocument>>.

- [3] CLINKENBEARD, Rodney E., et al. *Replication of Human Tracheobronchial Hollow Airway Models Using a Selective Laser Sintering Rapid Prototyping Technique*. AIHA Journal. 2002, no. 63, s. 141-150.
- [4] SCHMIDT, A., ZIDOWITZ, S., KRIETE, A., DENHARD, T., KRASS, S. & PEITGEN, H. O. J. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 28, 203-211. (2004).
- [5] LÍZAL, F., JEDELSKÝ, J., JÍCHA, M. *Studium transportu částic v realistickém modelu plic pomocí pda*, Příspěvek na konferenci Colloquium FLUID DYNAMICS 2008, Institute of Thermomechanics AS CR, v.v.i., Prague, October 22 - 24, 2008
- [6] MAUDER, T., JEDELSKÝ, J., LÍZAL, F. *Statistical approach to aerosol transport evaluation under cyclic conditions*. In Sborník konference. Praha, ÚT AV ČR. 2009. p. 31 - 32. ISBN 978-80-87012-21-5.

Poděkování: Řešitelé tímto děkují za finanční podporu poskytnutou v rámci projektů ME 09030 (program KONTAKT), OC10052 (COST) financovaných MŠMT ČR, projektu FSI-S-10-20 financovanému Vysokým učením technickým v Brně, projektu GA 101/09/H050 financovanému Grantovou agenturou České republiky a ED0002/01/01 NETME Centre.

NEW APPLICATIONS OF THE NEWSBOY PROBLEM NOVÉ APLIKACE ÚLOHY KOLPORTÉRA NOVIN

Pavel Popela^a, Michaela Ulverová^b, Radovan Šomplák^c

^aÚstav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, ^bÚstav soudního inženýrství, ^cÚstav procesního a ekologického inženýrství, Fakulta strojního inženýrství,
Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno

popela@fme.vutbr.cz, michaela.ulverova@usi.vutbr.cz, Radzs@seznam.cz

Abstract: *The purpose of the paper is to review a traditional newsboy/newsvendor problem as a specialised stochastic program and to introduce its two original applications. The first application is related to the optimal organization of university entrance examinations, the second one deals with the optimal choice of waste-to-energy plant capacity.*

Keywords: *stochastic programming, newsboy problem, optimization models*

Abstrakt: *Cílem textu je připomenout klasickou úlohu kolportéra novin jako speciální úlohu stochastického programování a uvést její dvě původní aplikace. První aplikace souvisí s problémem přijímání optimálního počtu studentů na vysokou školu, druhá pak s výstavbou spalovny s optimální kapacitou.*

Klíčová slova: *stochastické programování, problém kolportéra novin, optimalizační modely*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/164

1. Úvodem

Stále více aplikačních problémů, a to i v náročných inženýrských oborech, vyžaduje tvorbu a řešení adekvátních optimalizačních modelů, které navíc zahrnují neurčité parametry. Tyto rozsáhlé úlohy nejsou dnes řešeny jen ve světě, ale je jim věnována pozornost i v České republice. Jako příklady problémů řešených na VUT můžeme uvést např. problémy kontilit, viz [9] a [10], problémy optimálních návrhů spolehlivých konstrukcí, viz [7], [13] a [18], optimalizační problémy s omezeními ve tvaru diferenciálních rovnic, viz [21] a [22] a problémy optimalizace ve výrobě energie, viz [11] a [12]. Vhodné modely a metody řešení pro tyto problémy poskytly přístupy stochastického programování, viz [2], [16] a [14] a jako doplňující se osvědčují heuristické algoritmy, viz [8] a [15]. Pozornost je věnována i alternativním přístupům v modelování neurčitosti, viz [20] a [5].

Uveďme nyní některé základní pojmy stochastického programování. Úlohu matematického programování zahrnující náhodné parametry označujeme jako původní úlohu. Tato úloha je syntakticky korektně definována, ale její sémantika bez dalšího upřesnění je nejasná. Pro tuto původní úlohu tedy potřebujeme formulovat tzv. deterministický přepis úlohy, který korektně interpretuje roli náhodných parametrů v modelu. Uvažují se principiálně dvě základní možnosti. Podle Madanského [2], v případě, kdy rozhodnutí následuje až po pozorování realizace náhodných parametrů, hovoříme o WS (wait-and-see) přístupu. Ve většině případů ale rozhodovatel musí rozhodnout předtím, než jsou pozorování známa. Tento případ označujeme HN (here-and-now) přístup a rozhodnutí musí být stejné pro libovolnou budoucí realizaci náhodných parametrů.

Pro účely pochopení principů stochastického programování bývají uváděny typické zjednodušené příklady. Mezi ně lze zařadit tzv. úlohu kolportéra (prodáváče) novin. Tato úloha, která původně měla svůj význam v základních aplikacích řízení zásob, je dnes převážně používána pro výukové účely. Její použitelnost pro reálné aplikace však nezastarala, jak ukážeme v předloženém textu uvedením dvou nových původních aplikací. V diskusi navíc ukážeme, že tato úloha může být prvním přirozeným krokem k obecnějším a složitějším modelům.

2. Úloha kolportéra novin a její řešení

Pro problém kolportéra novin (viz newsboy problem nebo newsvendor problem v USA zdrojích) označujeme $x \in \mathbb{R}$ hledaný počet nakoupených výtisků, d je kupní cena jednoho výtisku, c ($c > d$) je prodejní cena jednoho výtisku, ξ je náhodná poptávka se známým rozdělením pravděpodobnosti a existující střední hodnotou $E\xi$. Volíme deterministický přepis tak, že maximalizujeme střední hodnotu zisku $E\{z\}$ v podmínkách HN rozhodování, tj. poptávku neznáme v době nákupu výtisků:

$$z = f(x, \xi) = \begin{cases} c\xi - dx & \text{pro } x \geq \xi \\ cx - dx & \text{pro } x < \xi \end{cases}$$

Potom

$$\begin{aligned} E\{f(x, \xi)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi) dF(\xi) = \\ &= \int_{\xi \leq x} (c\xi - dx) dF(\xi) + \int_{\xi > x} (cx - dx) dF(\xi) = (c-d)x - c \int_{\xi \leq x} (x - \xi) dF(\xi). \end{aligned}$$

Předpokládáme $\xi \in \Xi = [a, b]$ a dostaneme

$$E\{f(x, \xi)\} = \begin{cases} (c-d)x & \text{pro } x < a \\ (c-d)x - c \int_a^x (x - \xi) dF(\xi) & \text{pro } x \in [a, b] \\ -dx + cE\xi & \text{pro } x > b \end{cases}$$

což lze srovnat s $(c-d)x - c \int_a^b (x - \xi) dF(\xi) = (c-d)x - cx + cE\xi$. Dále $E\{f(x, \xi)\} = (c-d)x - cE_\xi(x - \xi)_+$ kde $+$ index znamená kladnou část hodnoty v závorkách.

Pro $\xi \sim U(a, b)$: $E_\xi\{f(x, \xi)\} = (c-d)x - c \int_a^x (x - \xi) \frac{1}{b-a} d\xi = (c-d)x - \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)}$. Pak $\max\{E\{f(x, \xi)\} \mid x \geq 0\} = \max\{(c-d)x - cE_\xi(x - \xi)_+ \mid x \geq 0\} = \max\{(c-d)x - \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)} \mid x \geq 0\}$.

Tedy $x_{\max} = a + \frac{(b-a)(c-d)}{c}$. Uvažujme nyní normálně rozdělenou poptávku, tj. $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Maximalizujeme opět očekávaný zisk $E\{z\}$ a dostáváme

$$\begin{aligned} E[f(x, \xi)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi) dF(\xi) = \\ &= \int_{\xi \leq x} (c\xi - dx) dF(\xi) + \int_{\xi > x} (cx - dx) dF(\xi) = (c-d)x - c \int_{\xi \leq x} (x - \xi) dF(\xi). \end{aligned}$$

Označme distribuční funkci normálního rozdělení $\Phi(\cdot)$ a dostáváme

$$\begin{aligned} E\{f(x, \xi)\} &= (c-d)x - c \int_{-\infty}^x (x - \xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \\ &= (c-d)x - c(x - \mu)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{\xi-\mu}{\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \\ &= (c-d)x - c(x - \mu)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= (c-d - c\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right))x + c\mu\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Protože účelová funkce je konkávní a po částech hladká, vypočteme její derivaci a položíme ji rovnu nule, abychom určili extrém. Dostáváme podmínku:

$$\begin{aligned} 0 &= [E\{f(x, \xi)\}]' = \\ &= c - d - c\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - cx[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)]' + c\mu[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)]' - \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= c - d - c\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{cx}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{c\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x - \mu) = \\ &= c - d - c\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$x_{\max} = \mu + \sigma u_{1-\frac{\alpha}{c}}$. Závěrem uvažujme pravděpodobnostní omezení a rovnoměrně rozdělenou poptávku. Deterministický přepis je

$$\max\{(c-d)x \mid P(\xi \geq x) \geq \alpha, x \geq 0\}, \quad \xi \sim U[a, b].$$

Pak $P(\xi \geq x) = 1$ pro $x < a$, $P(\xi \geq x) = 0$ pro $x > b$, a $P(\xi \geq x) = \frac{b-x}{b-a}$ pro $x \in [a, b]$. Tak pro $x \in [0, b]$ řešíme $\max\{(c-d)x \mid (\frac{b-x}{b-a} \geq \alpha) \vee (x \leq a)\}$. Podobně jako předtím dostáváme z nerovnice $x \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ výsledek $x_{\max} = \alpha a + (1-\alpha)b$. Pokud zvolíme $\alpha = \frac{d}{c}$, vidíme shodu řešení s první úlohou.

Kořeny úloha kolportéra novin sahají do roku 1886, kdy F. Y. Edgeworth formuloval problém, ve kterém se snažil najít správnou výši bankovní likvidity, a to tak, aby nedošlo k vyčerpání pokladní hotovosti a následnému runu na banku. V oblasti stochastického programování popularizovala úlohu kolportéra novin J. Dupačová [3], která také uvedla zobecněný problém květinářky (flower-girl problem) pro vysvětlení idejí vícestupňového stochastického programování. Dnes jsou uvedené úlohy standardně uváděny mezi motivujícími příklady v monografiích, viz [16] a v dokumentaci optimalizačního software, viz [4] pro případ diskrétního rozdělení poptávky. Dalšími zobecněními se na VUT zabývali P. Popela a S. Knotek, viz [6].

3. Optimalizace počtu přijatých uchazečů o studium

Pro každou vysokou školu je důležité se zabývat zásadní otázkou: Kolik přijmout studentů? Počty studentů představují výkony, které zajišťují VŠ finanční prostředky. Proto by se zdálo, že je nutné přijmout jich co nejvíce. K tomu je ale nutné znát základní terminologii v souladu s pravidly financování VŠ od MŠMT. Podle pravidel MŠMT platí, že tzv. kontrahovaný počet lze překročit jen o určité procento studentů, pak je přijímání zvýšeného počtu studentů penalizováno. Studenti navíc mohou být nezaplaceni nebo za každého z nich může být odečten základní normativ (s nákladovým koeficientem rovným 1) nebo průměrný normativ VŠ. Problémem je vliv rozhodnutí studenta, zda po přijetí na univerzitu také na ni nastoupí. To se z pohledu univerzity projevuje náhodným kolísáním počtu skutečně přijatých studentů. Historická data minulých let lze použít k přibližnému, spíše expertnímu, odhadu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny popisující toto kolísání. Pokud budeme zjednodušeně uvažovat, že rozhodnutí o počtu přijatých studentů není na fakultách, ale je centralizováno, lze nalézt analogii mezi řešeným problémem a známou úlohou prodáváče novin. Rozhodnutí x nakoupit určitý počet výtisků novin bude odpovídat rozhodnutí y přijmout určitý počet studentů. Náhodné poptávce ξ po novinách pak odpovídá náhodný počet studentů $y - \eta$, kteří skutečně nastoupí ke studiu včetně přepočtení jejich počtu podle pravidel (η značíme náhodný pokles). Rozdíl mezi prodejní cenou c a nákupní cenou d jednoho kusu novin pak zde odpovídá dotaci r na přijatého studenta do té chvíle, než jejich počet překročí kontrahovaný počet o dovolená procenta. Cena neprodaného výtisku novin d pak odpovídá penalizaci q za studenta po překročení zmíněného limitu b počtu studentů. S využitím výše uvedené symboliky a analogie s úlohou kolportéra novin nyní můžeme formulovat původní úlohu stochastického programování

$$\max\{g(y, \eta) \mid y \geq 0\},$$

kde platí, že příjem vysoké školy z dotací na studenty, který chceme maximalizovat, je $g(y, \eta) = r(y - \eta)$ pro $y - \eta < b$, a dále $g(y, \eta) = rb - q(y - \eta - b)$ pro $y - \eta \geq b$. Podobně, jako v případě kolportéra novin, budeme maximalizovat střední hodnotu účelové funkce

$$E[g(y, \eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, \eta) dF(\eta) = \int_{y \leq y-b} (rb - q(y - \eta - b)) dF(\eta) + \int_{y > y-b} r(y - \eta) dF(\eta).$$

Pro diskrétní empirické rozdělení založené na historických datech můžeme formulovat dvojstupňový scénářový lineární model, který můžeme vyřešit v GAMSu podle [4]. Pokud uvažujeme

rovnorné rozdělení, tj. $\eta \sim U[0, a]$, lze provést výpočty podle úlohy kolportéra novin a výslednou účelovou funkci obdržíme ve tvaru

$$E\{g(y, \eta)\} = \begin{cases} r(y - \frac{a}{2}) & \text{pro } y - b < 0 \\ -\frac{q+r}{2a}y^2 + (\frac{qb+rb}{a} + r)y - \frac{q+r}{2a}b^2 - \frac{ra}{2} & \text{pro } 0 \leq y - b \leq a \\ -qy + \frac{qa}{2} + (r+q)b & \text{pro } y - b > a \end{cases}$$

Podobně jako v předchozím případě určíme, že maximum po částech definované a hladké konkávní účelové funkce je v intervalu $[0, a]$, vypočteme derivaci, položíme ji rovnu nule a po úpravě získáme řešení ve tvaru $y_{\max} = b + a - \frac{aq}{q+r}$, které doporučuje o kolik studentů přijmout více než je limit b definovaný MŠMT tak, abychom optimálně zohlednili skutečnost, že někteří přijatí studenti nenastoupí. Uvedenou problematikou se dlouhodobě zabývá P. Popela, širší diskuse k roli optimalizace při tvorbě rozpočtů VŠ je v práci M. Ulverové [19].

4. Optimalizace kapacity spalovny odpadů

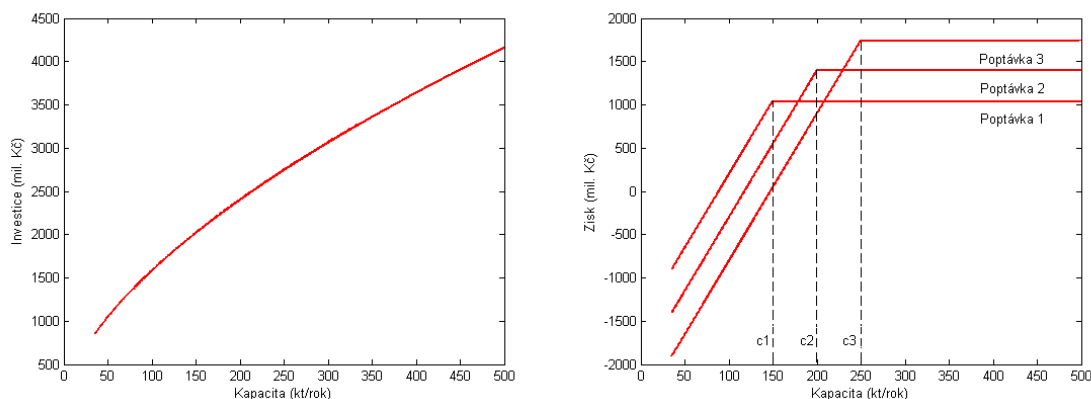
Uvažujme následující problém optimalizace kapacity spalovny smíšeného komunálního odpadu. Usilujeme o maximální výnosy při minimálních nákladech. Model sestavujeme za předpokladu neurčité poptávky po teple dodávaném spalovnou. Tuto optimalizační úlohu zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \min_{c, \tau_s^+, \tau_s^-} \{ & I(c) - \sum_s p_s(\lambda_t(\tau(c) - \tau_s^+) - \lambda_q \tau_s^-) \mid l \leq c \leq u, \\ & \tau_s^+ - \tau_s^- = \tau(c) - \xi_s, \tau_s^+, \tau_s^- \geq 0, s = 1, \dots, S\}, \end{aligned}$$

kde označení proměnných a parametrů má následující význam: c je kapacita spalovny, kterou hledáme (tzv. strategické rozhodnutí prvního stupně) a která určuje maximální množství odpadu, které lze ve spalovně zpracovat, l, u jsou meze kapacity c pro stavbu spalovny, $I(c)$ je investiční funkce určující náklady pro kapacitu c , $\tau(c)$ je funkce popisující množství tepla, které lze vyprodukovat pro kapacitu c , p_s je pravděpodobnost daného scénáře poptávky po teple, ξ_s je poptávka při daném scénáři s , τ_s^+ je množství tepla, o které by byla překročena poptávka ξ_s , pokud by výroba plně využila kapacitu c a poptávka by byla nižší než kapacitní mez (tj. $\xi_s \leq \tau(c)$), λ_t je cena za jednotku vyprodukovaného a prodaného tepla, τ_s^- je množství tepla, které chybí do splnění poptávky, pokud tato je vyšší než kapacitní mez (tj. $\xi_s \geq \tau(c)$) a λ_q je penále za jednotkové množství tepla, které nám schází k uspokojení poptávky.

Uvažujeme, že prodáme jen teplo, které je poptávané (tj. dokážeme reagovat rozhodnutím druhého stupně, tj. úpravou výroby tepla $\tau(c) - \tau_s^+$ podle poptávky ξ_s), a dále budeme penalizováni, pokud poptávku nedodržíme, protože kapacita spalovny (viz rozhodnutí prvního stupně c) to neumožňuje. Vidíme tedy, že problém i model má podobné rysy jako původní úloha kolportéra novin, která nás při sestavení modelu inspirovala. Rozhodnutím prvního stupně je rovněž jediná proměnná, zde kapacita c , v úloze kolportéra to je počet koupených výtisků. Kapacita může být nevyužita, podobně, jako noviny, které nejsou prodány. Prodej tepla i novin se vždy přizpůsobí poptávce, s výjimkou případů, kdy kapacita spalovny, respektive počet výtisků, neumožňuje poptávku uspokojit. Model spalovny se liší od úlohy kolportéra tím, že uvažujeme obecně nelineární investiční (nákladovou) funkci a přepočít kapacity na teplo. Podstatný rozdíl mezi modely pak je, že pro reálnou spalovnu (viz práce R. Šompláka [17]) kapacita c závisí na dalších proměnných a model musí zahrnout jak technologická omezení pro výrobu tepla, tak detailní formulace výpočtu nákladů a výnosů. Při sestavení komplexního reálného modelu, ale využití analogie s úlohou kolportéra pro nás představovalo klíčový metodologický krok, protože jsme si uvědomili, že kapacitě spalovny je vhodné přistupovat jako k jediné proměnné, která vznikla agregací dalších proměnných, na kterých je kapacita závislá.

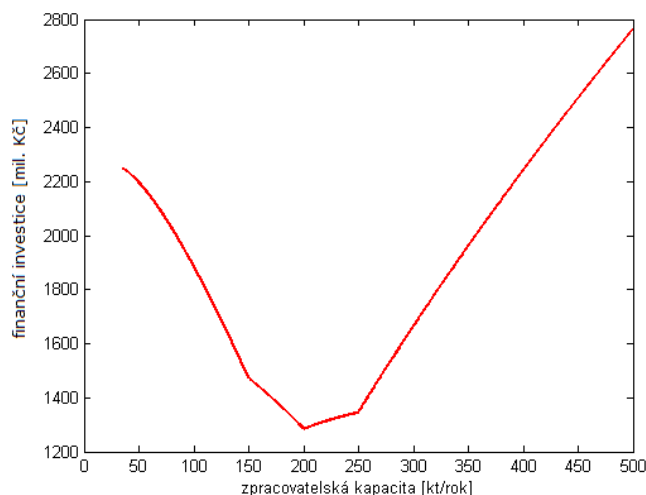
Závěrem odstavce uvedme řešení úlohy pro konkrétní příklad. Investiční náklady na výstavbu spalovny stanovíme z investiční funkce závislé na velikosti spalovny (tj. maximální možné množství spáleného SKO za jeden rok). Investiční funkce je tvaru $I(c) = 100 \cdot c^{0.6}$. Na obr. 1 a) vidíme závislost investic (mil. Kč) na velikosti spalovny (kt odpadu za rok).



Obrázek 1: a) Investiční funkce

b) Tři scénáře ročních poptávek po teple

Uvažujeme tři scénáře poptávky na dodávku tepla. Výše poptávek jsou $\xi_1 = 1050$ TJ/rok, $\xi_2 = 1400$ TJ/rok a $\xi_3 = 1750$ TJ/rok. Pro tyto scénáře ξ_s jsme zvolili stejné pravděpodobnosti $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Penále jsme nastavili na $\lambda_q = 60000$ Kč/TJ a zisk z prodeje jednotkového tepla $\lambda_t = 42000$ Kč/TJ. Na obr. 1 b) máme graficky znázorněny zisky pro jednotlivé scénáře. Účelová funkce, která vyjadřuje závislost nákladů na kapacitě spalovny je pak uvedena na obr. 2. K výpočtu jsme použili modelovací jazyk GAMS a lokálně konvergentní řešič CONOPT. Protože



Obrázek 2: Účelová funkce

účelová funkce je kvazikonvexní, nalezené optimum bylo globální. uveďme z výstupního LST souboru výsledky:

VARIABLE Z.L = 1296.749 ucel. fce VARIABLE C.L = 200.000 optim. kapacita

Je tedy vhodné poznamenat, že jde pouze o ukázkovou scénářovou úlohu a že podle výsledků by se investice do spalovny pro naše vstupní data nevyplatila.

5. Závěr

V textu článku byla připomenuta úloha kolportéra novin jako úloha stochastického programování a byly uvedeny její dvě původní aplikace, a to při řešení problému určení optimálního počtu studentů přijatých na vysokou školu a při optimálním návrhu kapacity spalovny. Ukázalo se, že tradiční a často citované, zdánlivě již vyčerpané, téma může být nadále rozvíjeno.

Reference

- [1] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 2nd ed. New York: Wiley and Sons, 1993. 638 p.
- [2] Birge, J., Louveaux, F. Introduction to Stochastic Programming. 1st ed. New York: Springer, 1997.
- [3] Dupačová, J. Stochastické Programování. MON, Praha, 1986.
- [4] Kalvelagen, E. The Newsboy Problem. Working paper, GAMS, 2010.
- [5] Karpíšek, Z. Zadeh-Type Fuzzy Probability with Triangular Norms, In Proceedings of the East West Fuzzy Colloquim 2008, Zittau/Gorlitz, pp.126-133.
- [6] Knotek, S. Úlohy dvojstupňového stochastického programování. Diplomová práce, ÚM FSI, VUT Brno, 2006.
- [7] Láníková, I., Štěpánek, P., Šimůnek, P. Fully Probabilistic Design of Concrete Structures Design. In Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010, pp. 426-433, (2010).
- [8] Matoušek, R. GAHC: Improved GA with HC mutation, World Congress on Engineering and Computer Science WCECS 2007, pp.915-920. Newswood Limited, 2007.
- [9] Mauder, T., Novotný, J. Two Mathematical Approaches for Optimal Control of the Continuous Slab Casting Process. In Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010, pp. 395-400, (2010).
- [10] Mauder T., Šandera C., Šeda M., Štetina J. Optimization of Quality of Continuously Cast Steel Slabs by Using Firefly Algorithm, In Proceedings of Conference on Materials and Technology, pp.45-53, ISBN 978-961-92518-2-9, (2010).
- [11] Pavlas, M., Touš, M., Bébar, L., Stehlík, P. Waste to Energy - An Evaluation of the Environmental Impact, Applied Thermal Engineering, Vol.30, (2010), No.16, pp.2326-2332.
- [12] Pavlas, M., Touš, M. Efficient waste-to-energy system as a contribution to clean technologies, Clean Technologies and Environmental Policy, Vol.11, (2009), No.1, pp.19-29.
- [13] Plšek, J., Štěpánek, P., Popela, P. Deterministic and Reliability Based Structural Optimization of Concrete Cross-section. Journal of Advanced Concrete Technology 5, 1 (2007), 63-74.
- [14] Popela, P. Numerical Techniques and Available Software. In Stochastic Modeling in Economics and Finance (authors: Dupacová, J., Hurt, J., Štěpán, J.), Chapter 8 in Part II, Kluwer A. P., 2002, pp. 206-227.
- [15] Roupec, J., Popela, P. Scenario generation and analysis by heuristic algorithms. In Proceedings of World Congress on Engineering and Computer Science (WCECS), pp. 931-935, San Francisco, CA 2007.
- [16] Ruszczyński, A., Shapiro, A. (ed.) Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [17] Šomplák, R. Využití metod stochastického programování pro hodnocení investic v energetických zdrojích. Diplomová práce, ÚM FSI, VUT Brno, 2011.
- [18] Štěpánek, P., Plšek, J., Láníková, I., Girgle, F. and Šimůnek, P. Optimization of Concrete Structures Design. In Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010, pp. 434-440, (2010).
- [19] Ulverová, M. Optimalizační modely pro podporu strategického rozhodování. Diplomová práce, ÚM FSI, VUT Brno, 2011.
- [20] Žák, L. Fuzzy inference system a jeho využití při předpovědi časových řad, Sborník 5th International Conference APLIMAT, pp.559-566, (2006).
- [21] Žampachová, E., Popela, P. Different reformulations of stochastic optimization of the transverse vibrations. *Engineering mechanics*, 2010, vol.17, no.5/6, pp. 339-350.
- [22] Žampachová, E., Popela, P., Mrázek, M. Optimum beam design via stochastic programming. *Kybernetika* vol. 46, no.3 (2010), pp. 571-582.

Poděkování: Článek byl podpořen projektem MŠMT ČR č. 1M06047, grantem GAČR reg. č. 103/08/1658 a výzkumným plánem MŠMT ČR č. MSM0021630519.

A NOTE ON DYNAMIC PRICING IN STOCHASTIC PROGRAMMING

POZNÁMKA O DYNAMICKÉM OCEŇOVÁNÍ VE STOCHASTICKÉM PROGRAMOVÁNÍ

Pavel Popela^a, Jan Novotný^a, Kjetil Haugen^b, Dušan Hrabec^a

^aÚstav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, ^b Molde University College,
Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno

popela@fme.vutbr.cz, ynovot35@stud.fme.vutbr.cz, kjetil.haugen@hiMolde.no, DusanHrabec@seznam.cz

Abstract: *The purpose of the paper is to present an overview of stochastic programs focusing on scenario-based stochastic linear programs. The ways of involving dynamic pricing idea into the selected models is discussed in short together with the decision dependent randomness case. At the end, the particular case of scenario-based model of transportation network involving a random demand and dynamic pricing is introduced.*

Keywords: *stochastic programming, dynamic pricing, transportation models*

Abstrakt: *Cílem textu je uvést stručnou informaci o úlohách stochastického programování s důrazem na scénářové dvojstupňové lineární úlohy. Krátce je diskutována otázka zahrnutí ideje dynamického oceňování do vybraných modelů a její souvislost s případy, kdy náhodnost závisí na rozhodnutí. V závěru je krátce uveden konkrétní příklad scénářového modelu dopravní sítě, který zahrnuje náhodné poptávky a umožňuje dynamické oceňování.*

Klíčová slova: *stochastické programování, dynamické oceňování, dopravní modely*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/170

1. Úlohy stochastického programování

Řada aplikačních optimalizačních problémů zahrnuje neurčité parametry. Při řešení těchto úloh na VUT se v často osvědčil přístup založený na modelech stochastického programování, viz [2] a [15]. Uveďme např. problémy kontilit, viz [7] a [8], problémy optimálních návrhů spolehlivých konstrukcí, viz [5], [12] a [16], optimalizační problémy s omezeními ve tvaru diferenciálních rovnic, viz [18] a [19] a problémy optimalizace ve výrobě energie, viz [10] a [11]. Vhodné modely a metody řešení pro tyto problémy poskytly přístupy stochastického programování, jako doplňující se osvědčují heuristické algoritmy, viz [6] a [14]. Pozornost je věnována i alternativním přístupům v modelování neurčitosti, viz [17] a [4].

Uveďme nyní některé základní pojmy matematického a stochastického programování. Úloha matematického programování (UMP) má tvar:

$$? \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in C\}, \quad (1)$$

kde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina přípustných řešení, $n \in \mathbb{N}$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ je účelová funkce a $\mathbf{x} \in C$ popisuje vektor rozhodovacích proměnných. UMP (1) často zahrnují důležité konstantní parametry. Tuto skutečnost můžeme zdůraznit zápisem:

$$? \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \mid \mathbf{x} \in C(\mathbf{a})\}, \quad (2)$$

kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^K$ je konstantní parametr, $K \in \mathbb{N}$. Úlohu matematického programování zahrnující náhodné parametry označujeme jako původní úlohu.

$$? \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \xi) \mid \mathbf{x} \in C(\xi)\}, \quad (3)$$

kde $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K$ je náhodný vektor pro $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ daný pravděpodobnostní prostor. Tato úloha je syntakticky korektně definována, ale její sémantika bez dalšího upřesnění je nejasná. Pro tuto původní úlohu tedy potřebujeme formulovat tzv. deterministický přepis úlohy, který korektně interpretuje roli náhodných parametrů v modelu. Uvažujeme dvě základní možnosti. V případě, kdy rozhodnutí následuje až po realizaci náhodných parametrů, hovoříme o WS (wait-and-see) přístupu. Příklad, kdy rozhodovatel musí rozhodnout předtím, než jsou pozorování známa označujeme HN (here-and-now) přístup a rozhodnutí pak musí být stejné pro libovolnou budoucí realizaci náhodných parametrů. Pro další text se omezíme na deterministický přepis se střední hodnotou účelové funkce a splnění omezení skoro jistě:

$$? \in \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \{E[f(\mathbf{x}, \xi)] \mid \mathbf{x} \in C(\xi) \text{ a.s.}\}.$$

Dále budeme uvažovat dvojstupňovou lineární úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \{ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad \text{kde} \\ Q(\mathbf{x}) = & E_\xi \{ Q(\mathbf{x}, \xi) \}, \quad \text{a} \\ Q(\mathbf{x}, \xi) = & \min_{\mathbf{y}(\xi)} \{ \mathbf{q}^\top(\xi) \mathbf{y}(\xi) \mid \mathbf{W}(\xi) \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{h}(\xi) - \mathbf{T}(\xi) \mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi) \geq \mathbf{0} \text{ a.s.} \}, \end{aligned}$$

kde dimenze matic a vektorů jsou zřejmé z kontextu formulované úlohy. Tuto úlohu můžeme po provedení dosazení formulovat také ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \{ & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + E_\xi \{ \min_{\mathbf{y}(\xi)} \{ \mathbf{q}^\top(\xi) \mathbf{y}(\xi) \mid \mathbf{W}(\xi) \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{h}(\xi) - \mathbf{T}(\xi) \mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi) \geq \mathbf{0} \text{ a.s.} \} \} \\ & \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

Pokud uvažujeme diskrétní rozdělení pravděpodobnosti pro ξ dostaneme

$$? \in \underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}_s : s \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmin}} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{q}_s^\top \mathbf{y}_s \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W}_s \mathbf{y}_s = \mathbf{h}_s - \mathbf{T}_s \mathbf{x}, \mathbf{y}_s \geq \mathbf{0}, s \in \mathcal{S} \},$$

Ve výše uvedené lineární dvojstupňové úloze vzniká zajímavá otázka, pokud připustíme, že cenový vektor $\mathbf{c}$ by mohl být měněn v určitém rozmezí, což odpovídá řadě praktických situací, zda by touto relaxací nemohlo být docíleno zlepšení hodnoty účelové funkce. Je ovšem nutné si uvědomit, že z deterministických alokačních úloh řešených autory K. Haugenem a A. Olstadem plyne, že změna ceny má dopady na poptávku, tedy v našem případě na vektor $\mathbf{h}(\xi)$, tedy můžeme psát, že tento vektor je nahrazen vektorem $\mathbf{h}(\xi, \mathbf{c})$ a nastává tedy případ, kdy se náhodná pravá strana v omezení mění v závislosti na změně nové proměnné $\mathbf{c}$. Tím vzniká původní aplikace úlohy stochastického programování, ve které náhodné parametry závisí na rozhodovací proměnné. Problémy tohoto typu studoval R. Wets v devadesátých letech, podrobnosti lze najít v práci J. Novotného [9]. Možnosti dalšího postupu naznačme pro speciální případ.

2. Modifikovaná dopravní úloha

Uveďme úlohu, která je podrobně popsána D. Hrabcem v [3]

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{Icus} (\sum_k (A_{Icus,k} \cdot x_k)) \cdot g_{Icus} - \sum_k (c_k \cdot x_k) \\ & - \sum_s (p_s \cdot (\sum_{Icus} (q_{Icus}^- \cdot y_{Icus,s}^- + q_{Icus}^+ \cdot y_{Icus,s}^+))) - \sum_{k1} d_{k1} \cdot \delta_{k1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_k (A_{Icus,k} \cdot x_k) + (y_{Icus,s}^+ - y_{Icus,s}^-) &= \beta_{Icus,s} - \alpha_{Icus,s} \cdot g_{Icus}, & Icus = 1, 2, \dots 14, \\
& & s = 1, 2, \dots 5, \\
\sum_k (A_{Ipla,k} \cdot x_k) &= pro_{Ipla}, & Ipla = 15, 16, \\
\sum_k (A_{Inod,k} \cdot x_k) &= 0, & Inod = 17, 18, \dots 30, \\
y_{Icus,s}^+ &\leq dem_{Icus,s}, & Icus = 1, 2, \dots 14, \\
& & s = 1, 2, \dots 5, \\
x_{k1} &\leq \sum_{Ipla} (-pro_{Ipla}) \cdot \delta_{k1}, & \forall k1, \\
\delta_{k1} &\in \{0, 1\}, & \forall k1, \\
x_k &\geq 0, & k = 1, 2, \dots 24, \\
y_{Icus,s}^+, y_{Icus,s}^- &\geq 0, & Icus = 1, 2, \dots 14, \\
& & s = 1, 2, \dots 5, \\
g_{Icus} &\geq 0, & Icus = 1, 2, \dots 14, \\
l &\leq g_{Icus}, & Icus = 1, 2, \dots 14, \\
g_{Icus} &\leq u, & Icus = 1, 2, \dots 14.
\end{aligned}$$

V uvedeném modelu kromě určení toků x_k jako proměnných prvního stupně, modifikace struktury sítě proměnnými δ_{k1} a náhodné poptávky $dem_{Icus,s}$ v zákaznických uzlech kompenzované rozhodnutími druhého stupně $y_{Icus,s}^+$ a $y_{Icus,s}^-$ je uvažováno dynamické oceňování následovně. Je dovoleno měnit prodejní cenu dodaného zboží pro jednotlivého zákazníka g_{Icus} v určitých mezích a v nich se předpokládá lineární závislost poptávky na změně ceny v regresním tvaru $\beta_{Icus,s} - \alpha_{Icus,s} \cdot g_{Icus}$. Uvedený tvar řeší závislost náhodných parametrů na rozhodnutí explicitním vyjádřením, a to pro jednotlivé scénáře s . V důsledku toho se originální úloha smíšeného celočíselného lineárního programování stává úlohou smíšeného celočíselného nelineárního programování, která byla řešena systémem GAMS s řešičem BARON. Provedená relaxace (změna konstantního cenového vektoru na vektor proměnných) sice komplikuje tvar modelu, ale umožňuje další zlepšení nalezeného řešení. Navíc scénářový přístup s využitím explicitního vyjádření odstraňuje zásadní problém s náhodnými parametry, které závisí na rozhodnutí.

3. Závěr

V textu článku byly stručně shrnuty základní poznatky stochastického programování, krátce byly diskutovány otázky související s náhodnými parametry, které závisí na rozhodnutí a byl uveden postup jak zahrnout dynamické oceňování do stochastických optimalizačních úloh. Pro vybranou dopravní úlohu s náhodnou poptávkou a přidáváním hran byl uveden způsob, jak lze do ní, z výpočtového hlediska vhodně, zahrnout dynamické oceňování.

Reference

- [1] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 2nd ed. New York: Wiley and Sons, 1993. 638 p.
- [2] Birge, J., Louveau, F. Introduction to Stochastic Programming. 1st ed. New York: Springer, 1997.
- [3] Hrabec, D. Stochastic Programming for Engineering Design. Diplomová práce, ÚM FSI, VUT Brno, 2011.
- [4] Karpíšek, Z. Zadeh-Type Fuzzy Probability with Triangular Norms, In Proceedings of the East West Fuzzy Colloquim 2008, Zittau/Gorlitz, pp.126-133.
- [5] Láníková, I., Štěpánek, P., Šimůnek, P. Fully Probabilistic Design of Concrete Structures Design. In Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010, pp. 426-433, (2010).
- [6] Matoušek, R. GAHC: Improved GA with HC mutation, World Congress on Engineering and Computer Science WCECS 2007, pp.915-920. Newswood Limited, 2007.
- [7] Mauder, T., Novotný, J. Two Mathematical Approaches for Optimal Control of the Continuous Slab Casting Process. In Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010, pp. 395-400, (2010).
- [8] Mauder T., Šandera C., Šeda M., Štetina J. Optimization of Quality of Continuously Cast Steel Slabs by Using Firefly Algorithm, In Proceedings of Conference on Materials and Technology, pp.45-53, ISBN 978-961-92518-2-9, (2010).

- [9] Novotny, J. Stochastic Programming Models with Applications. Diplomová práce, ÚM FSI, VUT Brno, 2008.
- [10] Pavlas, M., Touš, M., Bébar, L., Stehlík, P. Waste to Energy - An Evaluation of the Environmental Impact, *Applied Thermal Engineering*, Vol.30, (2010), No.16, pp.2326-2332.
- [11] Pavlas, M., Touš, M. Efficient waste-to-energy system as a contribution to clean technologies, *Clean Technologies and Environmental Policy*, Vol.11, (2009), No.1, pp.19-29.
- [12] Plšek, J., Štěpánek, P., Popela, P. Deterministic and Reliability Based Structural Optimization of Concrete Cross-section. *Journal of Advanced Concrete Technology* 5, 1 (2007), 63–74.
- [13] Popela, P. Numerical Techniques and Available Software. In *Stochastic Modeling in Economics and Finance* (authors: Dupacová, J., Hurt, J., Štěpán, J.), Chapter 8 in Part II, Kluwer A. P., 2002, pp. 206-227.
- [14] Roupec, J., Popela, P. Scenario generation and analysis by heuristic algorithms. In *Proceedings of World Congress on Engineering and Computer Science (WCECS)*, pp. 931-935, San Francisco, CA 2007.
- [15] Ruszczyński, A., Shapiro, A. (ed.) *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 10: Stochastic Programming. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [16] Štěpánek, P., Plšek, J., Láníková, I., Girgle, F. and Šimůnek, P. Optimization of Concrete Structures Design. In *Proceedings of the 16th International Conference on Soft Computing MENDEL 2010*, pp. 434-440, (2010).
- [17] Žák, L. Fuzzy inference system a jeho využití při předpovědi časových řad, *Sborník 5th International Conference APLIMAT*, pp.559-566, (2006).
- [18] Žampachová, E., Popela, P. Different reformulations of stochastic optimization of the transverse vibrations. *Engineering mechanics*, 2010, vol.17, no.5/6, pp. 339-350.
- [19] Žampachová, E., Popela, P., Mrázek, M. Optimum beam design via stochastic programming. *Kybernetika* vol. 46, no.3 (2010), pp. 571-582.

Poděkování: Článek byl podpořen projektem MŠMT ČR č. 1M06047, grantem GAČR reg. č. 103/08/1658 a výzkumným plánem MŠMT ČR č. MSM0021630519.

STOCHASTIC MODELING OF COMPOSITE MATERIALS

STOCHASTICKÉ MODELOVÁNÍ KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ

Tomáš Pospíšil

Ústav matematiky,
Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno
tomin.pos@seznam.cz

Abstract: *Mathematical modeling of fibre composite materials is very difficult because of their random values of the coefficient describing mechanical properties of their separate phases. For the computational reasons, the real materials, i.e. materials with non-periodic structure are replaced by "equivalent" structures having almost the same mechanical properties. To the implementation of this, the various algorithms were developed for generating an "equivalent" structures, which will be similar to the real one as much as possible. Therefore some simple methodology for a statistical comparing of different structures developed by different algorithms is needed.*

Keywords: *composite materials, non-periodic structures, random processes, normality, homogeneity*

Abstrakt: *Matematické modelování kompozitních materiálů je velmi obtížné z důvodu náhodných hodnot koeficientů popisujících mechanické vlastnosti jednotlivých fází. Z výpočetních důvodů jsou reálné materiály, t.j. materiály s neperiodickou strukturou nahrazeny „ekvivalentními“ strukturami mající téměř stejné mechanické vlastnosti. K realizaci těchto výpočtů byly vyvinuty algoritmy generující struktury co nejvíce podobné reálnému materiálu. Dále pro vzájemné porovnání generovaných struktur s reálným materiálem je třeba navrhnout způsob, jakým mají být porovnávány.*

Klíčová slova: *kompozitní materiály, neperiodické struktury, náhodné procesy, normalita, homogenita*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/174

1 Úvod

1.1 Pojem kompozitního materiálu

Vícesložkové materiály – tzv. kompozity, jsou heterogenní materiály tvořené dvěma, popř. více fázemi, obvykle rozdílného chemického složení, které se liší také svými fyzikálními a mechanickými vlastnostmi. Jedna z fází tvoří tzv. *matrici* kompozitu a je souvislou fází. Sekundární fáze, která zpevňuje matici kompozitu, je obvykle nesouvislá, a je tvořena částicemi různého typu a tvaru. Jako příklad uveďme matici vyztuženou vlákny. Pak hovoříme o tzv. vláknovém kompozitu. Vhodným výběrem vzájemných kombinací matrice a zpevňující fáze a volbou jejich vzájemného objemového poměru (*volume fraction*), je možné dosáhnout vysoké úrovně užitečných vlastností kompozitů. Matrice kompozitu má v porovnání se zpevňující fází nižší pevnostní vlastnosti a větší plasticitu. Často je požadována také nízká hustota materiálu matrice. Základní funkcí matrice je přenos vnějšího zatížení na zpevňující fázi. Matrice dále spojuje částice zpevňující fáze, chrání je před mechanickým, popř. chemickým poškozením. Matrice odděluje jednotlivé částice zpevňující fáze a brání rozvoji křehkého porušení kompozitu. Dále přenáší převážnou část vnějšího zatížení.

Vláknové kompozity nacházejí v dnešní době velmi široké uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti. Jako příklad se zmiňme o jejich širokém využití např. v automobilovém, kosmickém či stavebním průmyslu pro jejich dobré fyzikální vlastnosti. Z hlediska matematického modelování nám jde především o znalost některých fyzikálních vlastností bez nutnosti jejich výroby.

Experimentální měření jsou totiž dosti složitá a nákladná, a navíc vyžadují nejdříve vyrobit vzorky, a proto je užitečné umět spočítat tyto veličiny z parametrů jednotlivých složek a jejich geometrického uspořádání.

1.2 Možné přístupy

Matematické modelování heterogenních materiálů je velmi obtížné, zejména v případech kompozitních materiálů s jemnou strukturou.

Jedním postupem, jak řešit takové úlohy, je matematická metoda nazývaná homogenizace. Fyzikálně pod tímto pojmem rozumíme nahrazení heterogenního materiálu s periodickou strukturou z makroskopického hlediska „ekvivalentním“ materiálem homogenním. Tato metoda však předpokládá periodickou strukturu daného materiálu.

Jelikož reálné kompozitní materiály nevykazují periodickou strukturu, tj. rozložení vláken v matici má náhodný charakter, tak nás zejména bude zajímat otázka, jak velké chyby se dopustíme, jestliže neperiodický (reálný) materiál nahradíme materiálem periodickým.

Základem této studie bude vytvoření několika různých algoritmů na generování náhodné struktury dvousložkového vláknového kompozitu při zachování objemového poměru (*volume fraction*) obou fází a jejich následné porovnání z hlediska rychlosti výpočtu, efektivity a podobnosti s reálnými vzorky.

2 Stochastické procesy

V této kapitole uvedeme základní pojmy z teorie stochastických procesů, které budeme v dalším využívat.

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1 *Nechť $T \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ a $\{X_t; t \in T\}$ je systém náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak $\{X_t\}_{t \in T}$ nazýváme stochastickým (náhodným) procesem.*

Poznámka 2.2

1. Je-li T jednobodová, pak $\{X_t\}_{t \in T}$ je náhodná veličina.
2. Je-li $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, pak $\{X_t\} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je náhodný vektor.
3. Je-li $T = (a, b)$ interval, pak mluvíme o stochastickém procesu se spojitým časem.

Poznámka 2.3

1. Je-li $\{X_t\}_{t \in T}$ stochastický proces, tak pro $\forall t \in T$ je X_t náhodná veličina, tj. $X_t = X_t(\omega)$.
2. $\{X_t\}_{t \in T} = X_t = X(t, \omega) = X_t(\omega)$.
3. Je-li ω pevné, pak $X(t) = X(t, \omega)$ reprezentuje jednu realizaci (trajektorii) stochastického procesu $\{X_t\}_{t \in T}$. Tedy $\{X_t\}_{t \in T}$ lze chápat jako množinu trajektorií.

Definice 2.4 (Bílý šum) *Stochastický proces ξ_t budeme nazývat bílý šum (white noise process), jestliže pro libovolné časové okamžiky $t_1 \neq t_2$ jsou ξ_{t_1} a ξ_{t_2} nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem λ , tj. $\mathbf{E}[\xi_t] = 0$; $\mathbf{D}[\xi_t] = \lambda$. Píšeme pak $\xi_t \sim \mathbf{WN}(0, \lambda)$.*

Poznámka 2.5 *Bílý šum nemá spojitě trajektorie a nelze je proto nakreslit.*

Definice 2.6 (Brownův pohyb) *Stochastický proces B_t , kde $t \in \langle 0, \infty \rangle$ budeme nazývat Brownův pohyb (nebo též Wienerův proces), jestliže platí:*

1. $B_0 = 0$ a jednotlivé trajektorie Brownova pohybu jsou spojité funkce času t .
2. Pro $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou přírůstky (tj. náhodné veličiny) $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezávislé.
3. Pro libovolné t a $h > 0$, má $B_{t+h} - B_t$ normální (Gaussovo) rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem h , tj. $B_{t+h} - B_t \sim \mathbf{N}(0, h)$.

Lemma 2.7 *Nechť B_t je Brownův pohyb. Pak platí*

1. $\mathbf{E}[B_t^2] = t$.
2. $\mathbf{E}[B_t B_s] = \min\{t, s\}$ pro $t \geq 0, s \geq 0$.
3. $\mathbf{E}[(B_t - B_s)^2] = |t - s|$.

2.2 Karhunen-Loèveův rozvoj

Karhunen-Loèveův rozvoj stochastického procesu $a(x, \omega)$ je založen na spektrálním rozvoji jeho kovarianční funkce

$$C(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(a(t_1, \omega) - \mathbf{E}[a(t_1, \omega)])(a(t_2, \omega) - \mathbf{E}[a(t_2, \omega)])], \quad \forall t_1, t_2 \in D,$$

kde t_1 a t_2 značí časové souřadnice a D značí množinu, na které je daný stochastický proces definován. Z definice kovarianční funkce náhodného procesu plyne, že je ohraničená, symetrická a pozitivně definitní. Proto existuje spektrální rozklad kovarianční funkce ve tvaru

$$C(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_n(t_1) \Phi_n(t_2),$$

kde λ_n a $\Phi_n(\cdot)$ jsou vlastní čísla a vlastní funkce příslušného kovariančního jádra, které dostaneme řešením následující integrální Fredholmovy rovnice druhého druhu

$$\int_D C(t_1, t_2) \Phi(t_2) dt_2 = \lambda \Phi(t_1).$$

Dá se ukázat, že všechny vlastní funkce jsou vzájemně ortogonální. Karhunen-Loèveův rozvoj pak má tvar

$$a(t, \omega) = \mathbf{E}[a(t, \omega)] + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Phi_n(t) X_n(\omega),$$

kde X_n , $n = 1, 2, \dots$ je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin. Největší význam této spektrální reprezentace je ten, že časové náhodné odchylky můžeme vyjádřit jako součet deterministických funkcí v časových souřadnicích vynásobených náhodnými veličinami, které jsou nezávislé na těchto souřadnicích. Dále, označíme-li

$$a_K(t, \omega) = \mathbf{E}[a(t)] + \sum_{n=1}^K \sqrt{\lambda_n} \Phi_n(t) X_n(\omega), \quad (t, \omega) \in D \times \Omega,$$

pak platí

$$\mathbf{E}[(a - a_K)^2(t)] \rightarrow 0, \quad \text{pro } K \rightarrow \infty, \quad t \in D.$$

Pro Brownův pohyb definovaný na množině $D = \langle 0, T \rangle$ se dá ukázat, viz např. [18], [12], že pro vlastní funkce a vlastní hodnoty platí následující vztahy:

$$\Phi_n(t) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \quad \lambda_n = \frac{4T^2}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Brownův pohyb lze pak psát ve tvaru

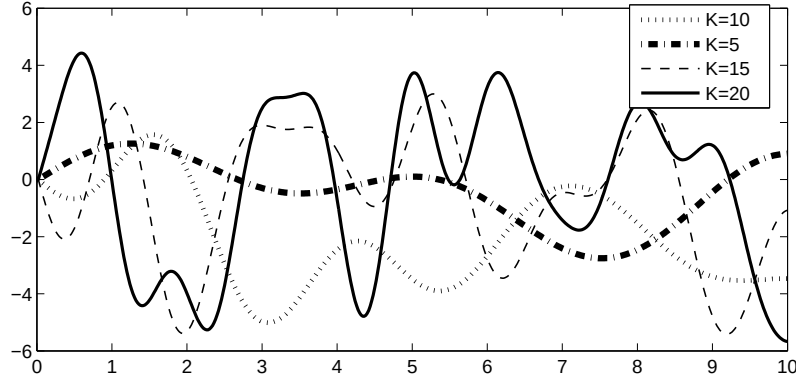
$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}T}{\pi(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) X_n(\omega).$$

Z předchozího je jasné, že nahrazením uvedené sumy pouze konečným počtem jejích členů dostaneme trajektorii Brownova pohybu, která ovšem bude „hladší“ než skutečný Brownův pohyb.

Nyní uvedeme Karhunen-Loèveův rozvoj s konečným počtem členů pro stochastický proces $S(t, \omega)$ definovaný na intervalu $\langle 0, T \rangle$, který později využijeme v jednom algoritmu k simulaci náhodné struktury. Ten má následující tvar

$$S(t, \omega) = \sum_{n=0}^K \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) X_n(\omega).$$

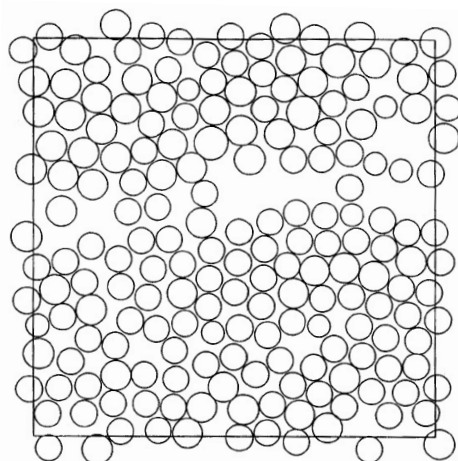
Tento proces má charakter vyhlazeného bílého šumu (*smoothed white noise*) a pro naši simulaci je zcela dostačující. Platí, že čím více má daný proces charakter bílého šumu, tím větší počet členů v rozvoji je třeba. V praxi však často vystačíme jen s několika členy. Na následujícím obrázku jsou nakresleny trajektorie pro $K = 5, 10, 15, 20$.



Trajektorie procesu $S(t, \omega)$ pro různá K

3 Simulace náhodné struktury

Jak již bylo řečeno v úvodu, simulace náhodné struktury má svůj význam jak po stránce teoretické, tak i po stránce praktické. Nyní ukážeme reálnou strukturu vláknového kompozitu, která byla převzata z práce [37].



Reálný vzorek kompozitu.

Je důležité připomenout, že většina dosavadních výsledků týkající se generování vzorků kompozitního materiálu vychází ze skutečnosti, že středy vláken reprezentující kompozitní materiál nejsou blíže než je průměr vlákna, který byl považován za konstantní pro všechna vlákna vystupující v daném vzorku. Algoritmy, generující vzorky tohoto typu jsou založeny zejména na tzv. prostorových bodových procesech (*spatial point processes*), které vycházejí z faktu, že počet a pozice vláken ve vzorku jsou náhodné veličiny. Tyto se však liší od algoritmů, které budou postupně uvedeny, jelikož umožňují pracovat s nekonztantními poloměry vláken vystupující v daném vzorku při zachování výsledného objemového podílu vláken ve vzorku.

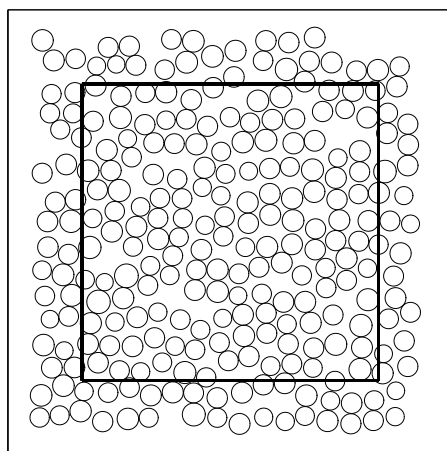
Celkem byly vytvořeny čtyři algoritmy **AI-AIV**. Vstupem byla velikost strany čtvercového vzorku v μm , objemový podíl vláken ve vzorku a pravděpodobnostní rozdělení průměrů vláken ve vzorku. Na základě článku [?] bylo voleno normální rozdělení průměrů vláken $\mathbf{N}(6,78\mu\text{m}; 0,38\mu\text{m}^2)$, délka strany vzorku byla $100\mu\text{m}$ a objemový podíl vláken 0,55 (tedy 55% obsahu plochy vzorku tvoří vlákna).

3.1 Algoritmus I

Tento algoritmus **AI** využívá Karhunen-Loèveova rozvoje procesu, mající charakter vyhlazeného bílého šumu

$$S(t, \omega) = \sum_{n=0}^K \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) X_n(\omega).$$

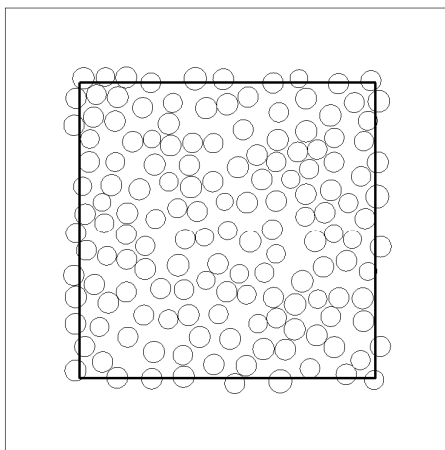
Algoritmus generuje náhodnou strukturu, jak můžeme vidět na následujícím obrázku.



*Výsledná struktura generovaná algoritmem **AI**.*

3.2 Algoritmus II

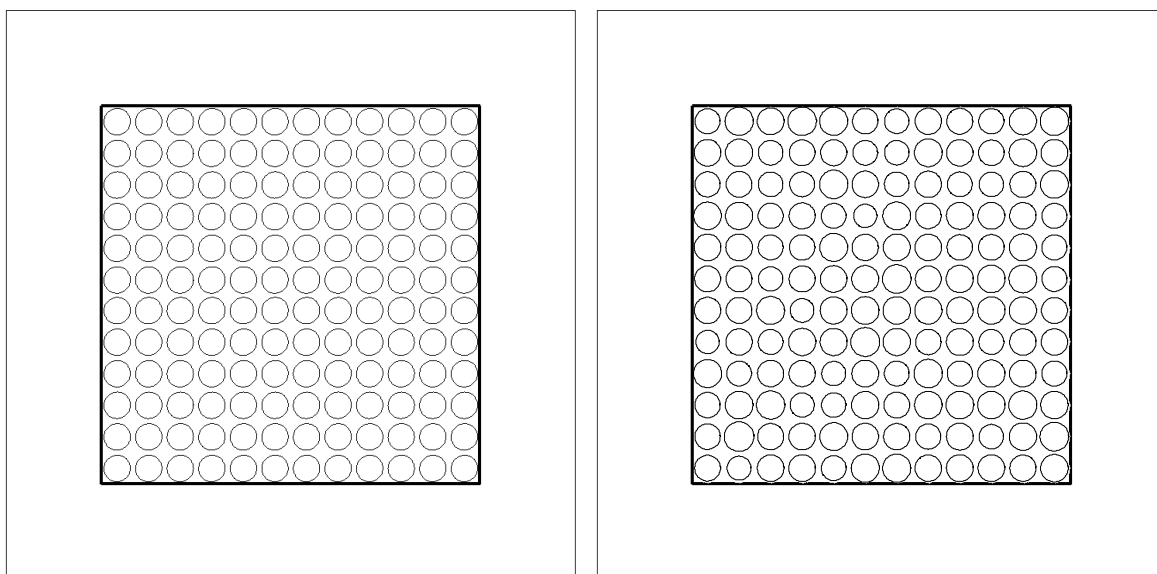
Princip algoritmu **AII** je postaven na několika krocích. Nejprve se vygeneruje vlákno uvnitř vzorku a pak se zvolí náhodný směr a vzdálenost, kam se „umístí“ další vlákno (s náhodným průměrem). Tento postup se dále opakuje. Při každém kroku je třeba ověřit, zda nová pozice vlákna je reálná, tj. zda nedojde k překryvu vláken. Zároveň je přitom kontrolována minimální vzdálenost mezi sousedními vlákny. Pokud je skutečná vzdálenost menší než námi zvolená nebo pokud dojde k překryvu vláken, tak musíme z výchozího vlákna vygenerovat nový náhodný směr, vzdálenost a následně vše opět zkontrolovat. Postup se opakuje tak dlouho, dokud aktuální objemový podíl vláken je menší než požadovaný, tj. 0,55. Výsledek této simulace můžeme vidět na následujícím obrázku.



*Výsledná struktura generovaná algoritmem **AII**.*

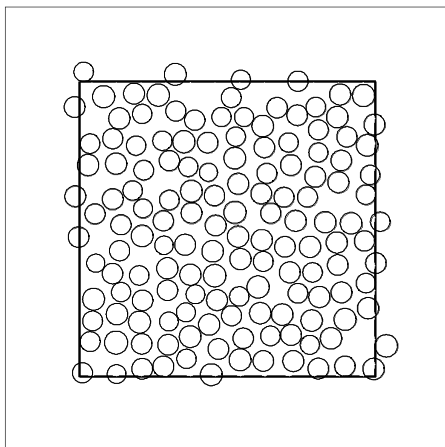
3.3 Algoritmus III

Tento algoritmus se od předchozích dvou dosti odlišuje. Vychází ze samotné fyzikální podstaty Brownova pohybu částic. Simulace probíhá tak, že nejprve nageneryjeme čistě periodickou strukturu, kde všechny poloměry vláken jsou konstantní při zachování požadovaného objemového podílu. Potom průměr každého vlákna náhodně změníme podle známého rozdělení průměrů vláken. Tento postup můžeme vidět na následujících dvou obrázcích.



*K simulaci algoritmu **AIII**.*

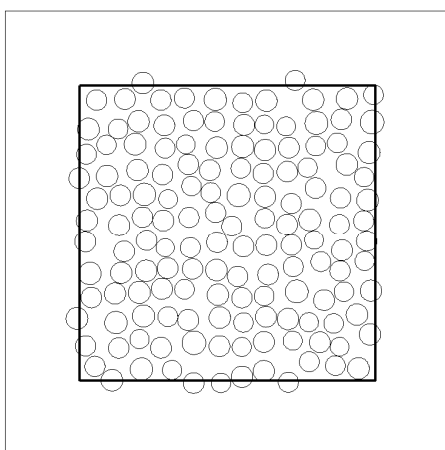
V následujícím kroku simulace podrobíme postupně každé vlákno Brownově pohybu. Jinak řečeno, zvolíme náhodný směr a vzdálenost, o kterou každé vlákno vychýlíme. V každém kroku musíme dále kontrolovat, zda nedojde k překryvu vláken nebo nedodržení minimální vzdálenosti. Pokud ano, zvolíme jiný náhodný směr a vzdálenost a postup opakujeme do té doby, dokud není všechno v pořádku. Důležité je, že generované náhodné výchylky se pohybují řádově v desetinách velikosti průměru vlákna, tedy jsou relativně malé. Tato skutečnost tudíž odpovídá představě reálného Brownova pohybu. Rozdíl je pouze v tom, že zde neuvažujeme srážky dvou nebo více částic a předávání hybnosti při nárazu jedné částice do druhé. Výslednou strukturu generovanou algoritmem **AIII** můžeme vidět na následujícím obrázku.



*Výsledná struktura generovaná algoritmem **AIII**.*

3.4 Algoritmus IV

Princip tohoto algoritmu je velice podobný jako princip algoritmu **AIII**. Rozdíl je pouze v tom, že pokud dojde při vychýlení vlákna k překryvu nebo nedodržení minimální vzdálenosti, tak se negeneruje nová poloha, ale vlákno zůstane na svém původním místě. Tato skutečnost způsobí, že výsledná struktura není tak náhodná jako tomu bylo v předchozím případě. Výhoda spočívá v tom, že generování této struktury je podstatně rychlejší. Výsledek je vidět na dalším obrázku.



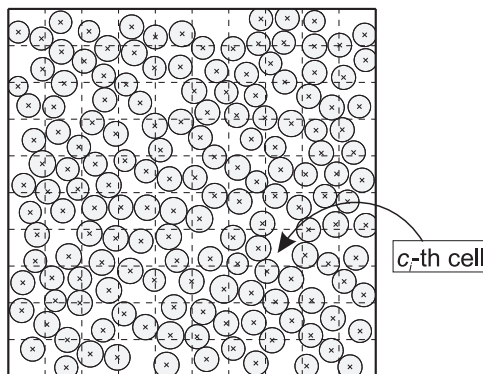
*Výsledná struktura generovaná algoritmem **AIV**.*

4 Statistický popis

Nyní uvedeme některé statistické indikátory používané ke správnému popisu rozdílů jednotlivých vzorků kompozitního materiálu.

4.1 Popisná statistika

Za účelem možnosti použití metod popisné statistiky, musíme vytvořit sadu parametrů pro každý vzorek, kterou dále použijeme pro další výpočty. Nejjednodušší je rozdělit každý vzorek regulární abstraktní $n \times n$ čtvercovou sítí. V našich vzorcích použijeme $n = 10$, tj. 10×10 sítí. Dále, pro každou buňku c_i spočítáme elementární objemový podíl (volume fraction) a tuto obdržanou sadu objemových podílů $\{f_i\}_{i=1}^{n \times n}$ použijeme pro následné výpočty.



Rozdělení vzorku abstraktní sítí.

Je velmi důležité zvolit optimální poměr mezi velikostí n a průměrným průměrem vláken ve vzorku. Je zřejmé, že volba velkého n je bezpředmětná, jelikož některé buňky by měly nulový objemový podíl. Na druhou stranu volba malého n by plně nevystihla náhodnost vzorku. Označme symbolem f_i^j , $i = 1 \dots n \times n$, $j = 1 \dots 15$ elementární objemové podíly v i -té buňce pro j -tou realizaci. Výsledky popisné statistiky jsou uvedeny v tabulce 1. V tabulce 2 jsou uvedeny popisné

	Průměr	Medián	Min.	Max.	Rozsah	Rozptyl	Sm. odch.	Šikm.	Špič.
No. 1	51.63	53.35	17.38	92.39	75.01	215.32	14.67	2.97	-0.04
No. 2	51.13	54.21	0.00	86.84	86.84	295.23	17.18	2.99	-0.49
No. 3	47.93	48.53	0.28	86.17	85.90	326.10	18.06	2.85	-0.34
No. 4	44.32	46.51	0.00	74.44	74.44	277.27	16.65	2.91	-0.55
No. 5	53.79	54.44	15.86	93.25	77.39	242.45	15.57	2.60	0.05
No. 6	52.48	54.16	0.00	81.10	81.10	240.03	15.49	3.51	-0.62
No. 7	42.76	44.50	0.00	78.95	78.95	364.05	19.08	2.72	-0.55
No. 8	49.66	52.33	14.79	80.69	65.90	227.93	15.10	2.10	-0.09
No. 9	44.74	45.71	0.00	73.06	73.06	226.27	15.04	2.93	-0.37
No. 10	42.47	41.95	0.00	78.55	78.55	295.63	17.19	2.78	-0.09
No. 11	52.48	53.91	20.09	80.31	60.22	200.27	14.15	2.43	-0.32
No. 12	50.20	52.14	0.00	82.89	82.89	350.25	18.72	3.08	-0.70
No. 13	52.43	51.26	5.76	89.63	83.87	296.10	17.21	2.84	-0.24
No. 14	46.40	46.18	11.48	92.29	80.81	229.73	15.16	2.99	0.19
No. 15	47.90	47.36	0.00	86.14	86.14	275.41	16.60	2.81	-0.15
Průměr	48.69	49.77	5.71	83.78	78.07	270.80	16.39	2.83	-0.29

Tab. 1 *Spočítané popisné statistiky elem. obj. podílů pro všechny vzorky.*

statistiky pro počet vláken v reálných vzorcích.

	Průměr	Medián	Min.	Max.	Rozsah	Rozptyl	Sm. odch.	Šikm.	Špič.
Real	164.60	164	145	189	44	167.40	12.94	2.04	0.14

Tab. 2 *Spočítané popisné statistiky pro celkový počet vláken ve všech vzorcích.*

4.2 Prostorová náhodnost

Úplná prostorová náhodnost (*complete spatial randomness (CSR)*), viz např. [8] nebo [7] pro její definici je středem zájmu v teorii kompozitů. Důvodem je její fyzikální podstata, viz [8]. Testy náhodnosti jsou zpravidla založeny na následujících třech oblastech metod:

- Quadrat tests
- Second-order methods
- Distance methods

Metody prvního typu jsou nejvíce používány v základních studiích, ale měly by být vždy doplněny jinými metodami. Metody druhého typu jsou založeny na použití metod typu Monte-Carlo a metody třetího typu využívají informaci přesných pozic vláken a mají výhodu, že nevyžadují dělení vzorku na jednotlivé kvadráty (sítě).

5 Závěr

Kompozitní vláknové materiály mají v dnešní době velmi široké uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti a jsou proto právem velmi intenzivně studovány a analyzovány. Pro řádný výzkum je však mít třeba reálné vzorky těchto materiálů, jejichž zhotovení je velmi nákladné. Je proto důvod vyvíjet algoritmy, které nám dokáží s jistou přesností reálný materiál nasimulovat.

V práci jsou navrženy postupně čtyři různé algoritmy, které na základě reálného materiálu dokáží daný materiál nasimulovat s vysokou přesností. Jejich popis je v práci uveden. Využívají zejména teorie stochastických procesů a Brownova pohybu. Další krok spočívá v tom, jak dané vzorky získané těmito algoritmy mezi sebou navzájem statisticky porovnat. To je dalším cílem práce. V praxi existuje celá sada metod, jak tohoto dosáhnout. Mezi nejběžnější patří metody, které jsou založeny na rozdělení vzorku na tzv. kvadráty, ve kterých se jednotlivě spočítají elementární objemové podíly (volume fractions), se kterými se nadále pracuje. Mezi druhou třídu patří metody založené na použití funkcí druhého řádu, kde nejrozšířenější je tzv. Ripleyova funkce. A nakonec třetí třídu tvoří metody využívající informace o přesných pozicích vláken nevyžadující dělení vzorku na kvadráty, které může být někdy obtížné zvolit.

Studium vláknových kompozitů je velmi složité a proto tvorba nových algoritmů a metod jejich statistického porovnávání může být otázkou dalšího výzkumu.

Reference

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1964.
- [2] Anděl, J.: *Statistické metody*. Matfyzpress, Praha, 2005.
- [3] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha, 2005.
- [4] Anderson, T.W., Darling, D.A.: Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **23**:193–212, 1952.
- [5] Chen, J.S., Moon, Y.S.: Fingerprint Matching with Minutiae Quality Score *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 4642, 2007.
- [6] Cliff, A.D., Ord, J.K.: *Spatial autocorrelation*. Pion, London, 1973.
- [7] Cressie, N.A.C.: *Statistics for Spatial Data*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [8] Diggle, P.J.: *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Oxford University Press Inc., New York, 2003.
- [9] Dixon, P.M.: Ripley's K -function. *Encyklopedia of Environmetrics*, **3**:1796–1803, 2002.
- [10] Fitzgibbon, A., Pilu, M., Fisher, R.B.: Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **21**(5):476–480, 1999.
- [11] Gajdošík, J.: Quantitative analysis of fiber composite microstructure. Master's thesis, Czech Technical University in Prague, 2004.

- [12] Ghanem, R.G., Spanos, P.D.: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] Hátle, J., Likeš, J.: *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. SNTL, ALFA, Praha, 1974.
- [14] Hebák, P., Hustopecký, J. & kol.: *Vícerozměrné statistické metody [1], [2], [3]*. INFORMATORIUM, Praha, 2005.
- [15] Hendl, J.: *Přehled statistických metod zpracování dat*. Portál, Praha, 2004.
- [16] Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J., Zhang, T.: *Stochastic Partial Differential Equations. A modelling, White Noise Functional Approach*. Birkhäuser Boston, Springer-Verlag New York, New York, 1996.
- [17] Islam, K.: *Transformed Tests for Homogeneity of Variances and Means*. PhD thesis, Graduate College of Bowling Green State University, Ohio, 2006.
- [18] Kloeden, P.E., Platen, E., Schurz, H.: *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [19] Mansilla, D. Trias: *Analysis and Simulation of Transverse Random Fracture of Long Fibre Reinforced Composites*. PhD thesis, Universitat de Girona, 2005.
- [20] Meloun, M., Militký, J.: *Statistická analýza experimentálních dat*. Academia, Praha, 2004.
- [21] Meloun, M., Militký, J., Hill, M.: *Počítačová analýza vícerozměrných dat v příkladech*. Academia, Praha, 2005.
- [22] Mikosch, T.: *Elementary Stochastic Calculus*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998.
- [23] Militký, J.: *Prostorová statistika v matlabu*. Sborník příspěvků z 8. konference, MATLAB 2000, HUMUSOFT Praha.
- [24] Ohser, S., Mücklich, F.: *Statistical Analysis of Microstructures in Material Science*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [25] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., Chiu, S.N.: *Spatial Tessellations*. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- [26] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Germany, 2000.
- [27] Pospíšil, T.: Mathematical modelling of composite material with random structure. Master's thesis, Brno University of Technology, Dept. of Mathematics, 2003.
- [28] Rektorys, K. & kol.: *Přehled užití matematiky I, II*. Prometheus, Praha, 2000.
- [29] Ripley, B.D.: *Spatial Statistics*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
- [30] Ryan, T.A., Joiner, B.L.: Normal probability plots and tests for normality, 1976.
- [31] Sofia Mucharreira de Azeredo Lopes: *Statistical Analysis of Particle Distributions in Composite Materials*. PhD thesis, University of Sheffield, 2000.
- [32] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I,II,III*. SNTL, Praha, 1990.
- [33] Smith, T.E.: *Notebook On Spatial Data Analysis*.
<http://www.seas.upenn.edu/~ese502/>.
- [34] Statistics Toolbox for use with Matlab. User's Guide, 2001.
- [35] Štecha, J.: *Optimalizační rozhodování a řízení*. Skriptum FEL ČVUT, Praha, 2000.
- [36] Torquato, S.: *Random Heterogeneous Materials*. Springer-Verlag, New-York, 2002.
- [37] Zeman, J.: *Analysis of Composite Materials with Random Microstructure*. PhD thesis, Czech Technical University in Prague, 2003.
- [38] Zeman, J.: *Analysis of mechanical properties of fiber-reinforced composites with random microstructure*. Master's thesis, Czech Technical University in Prague, 1999.

Poděkování: Článek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 Centrum pro jakost a spolehlivost výroby.

THE USE OF DESIGN OF EXPERIMENTS IN OPTIMALIZATION OF ELECTRIC CONDUCTIVITY OF NONWOVEN FABRICS

VYUŽITÍ TECHNIKY PLÁNOVANÉHO EXPERIMENTU PRO OPTIMALIZACI ELEKTRICKÉ VODIVOSTI NETKANÝCH TEXTILIÍ

Veronika Šafářová, Sabrina Zobel***

*Katedra hodnocení textilií, Fakulta textilní, Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17 Liberec 1
safarovaveronika@seznam.cz

**Department of Textile Machines and Institute of Textile Technologies, RWTH Aachen
Otto-Blumenthal-Str. 1, 520 74 Aachen, Germany
sabrina.zobel@ita.rwth-aachen.de

Abstract: *Electric conductivity is one of the dominant parameters for enhancing electromagnetic smog resistivity, reducing electrostatic accumulation and formation of fabrics containing electro conductive paths. In this paper, the optimalization of textile structures is performed by the help of Design of Experiments technique. The main of this study was to determine influence of chosen procedural parameters of nonwoven fabric made of metal coated fibers on its electrical resistance. The experiment was designed and subsequently analyzed by means of Minitab software.*

Keywords: *nonwoven fabrics, metal coated fibers, electric resistance, Design of Experiments*

Abstrakt: *Elektrická vodivost je jedním z rozhodujících parametrů pro zlepšení odolnosti vůči elektromagnetickému smogu, snížení tendence k hromadění elektrostatického náboje a konstrukce textilií obsahující vodivé dráhy. V této práci je využito techniky plánovaného experimentu za účelem optimalizace elektrické vodivosti textilních struktur. Cílem práce bylo vyhodnotit vybrané procesní parametry netkané textilie vyrobené z pokovených vláken, které ovlivňují její elektrický odpor. Experiment byl navržen a následně analyzován pomocí software Minitab.*

Klíčová slova: *netkané textilie, pokovená vlákna, elektrický odpor, plánování experimentů*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/184

1. Úvod

Dnešní společnost je stále více obklopována všudypřítomnou výpočetní a informační technikou. V běžném životě se pro nás přístup k jakékoli informaci z jakéhokoli místa stává samozřejmostí. Jsme doprovázeni mnoha elektronickým zařízeními, jako jsou mobilní telefony, kapesní počítače, notebooky, MP3 přehrávače atd., které jsou více či méně rozměrné a ne tak docela vhodné k nošení na těle. Výhled do budoucna pak tvoří elektronické systémy, které budou nenápadně začleněny do všedního oděvu se všemi jeho požadavky (komfortní vlastnosti, praní, atp.) [1].

Na druhou stranu, každý z nás je v současné době vystaven expozici elektromagnetického pole jak doma, tak i v zaměstnání. Jeho zdrojem je výroba a přenos elektrické energie, používání domácích elektrických přístrojů, telekomunikace, rozhlasové a televizní vysílání [2]. Elektromagnetické rušení je jakýkoli elektromagnetický jev, který může zhoršit provoz přístroje, zařízení nebo systému anebo nepříznivě ovlivnit živou či neživou hmotu. Elektromagnetické stínění je jedním z nejdůležitějších odrušovacích prostředků

elektromagnetické kompatibility, umožňující jak zmenšení rušivého vyzařování na straně zdrojů rušivých signálů, tak i zvýšení elektromagnetické odolnosti na straně přijímačů rušivých signálů [3].

Oděv je tradičně určen k ochraně těla před klimatickými, mechanickými či tepelnými vlivy, zastává dále funkci estetickou, sociální či hygienickou. V dnešní době se pole jeho působnosti rozšířilo dále za tyto role. Dnes se textilní věda a technologie stávají dynamicky interagující.

Elektrická vodivost je jedním z rozhodujících parametrů pro zlepšení odolnosti vůči elektromagnetickému smogu, snížení tendence k hromadění elektrostatického náboje a konstrukce inteligentních textilií obsahujících vodivé dráhy. Elektricky vodivé textilie se často používají ve speciálních oděvních a technických textiliích, kde je účelem nahradit klasické kovy resp. jiné materiály pomocí flexibilních (textilních) struktur [4].

Většina syntetických vláken používaných v textiliích jsou elektrické izolátory s měrným odporem v řádu $10^{12} - 10^{14} \Omega\text{m}$. To je mnohem více, než je požadovaná rezistivita pro potřeby elektromagnetického stínění. Např. požadovaná rezistivita pro antistatické materiály se pohybuje v rozmezí $10^9 - 10^{13} \Omega/\text{cm}^2$; zatímco pro materiály, určené ke stínění elektromagnetického pole je rezistivita požadována nižší než $10^2 \Omega/\text{cm}^2$. Jednou z možností výroby elektricky vodivé textilie je použití elektricky vodivého základního elementu – vlákna. Kovová vlákna, vlákna uhlíková, polymerní vlákna plněná vodivými částicemi, bikomponentní vlákna či vlákna tvořená elektricky vodivými polymery představují základní vlákna se zvýšenou elektrickou vodivostí. Tato vlákna však skýtají některé nevýhody. Jedná se zejména o vysokou hustotu kovových vláken a vysoký modul pružnosti uhlíkových vláken v porovnání s vlákny klasickými. Problémem u vláken plněných je dosažení perkolačního prahu při zachování požadovaných mechanických vlastností atd.

Výše uvedené nevýhody je možno odstranit použitím pokovených klasických vláken. Výhodou techniky pokovování je, že je vhodná pro široké množství typů vláken a dosahuje se dobré vodivosti bez významného ovlivnění vlastností vlákenného substrátu jako je hustota, ohebnosti či omak.

V této práci je využito techniky plánovaného experimentu za účelem optimalizace elektrické vodivosti textilních struktur. Cílem práce bylo vyhodnotit vybrané procesní parametry netkané textilie vyrobené z pokovených vláken, které ovlivňují její elektrický odpor. Experiment byl navržen a následně analyzován pomocí software Minitab. Jako dominantní byly zvoleny tyto faktory: plošná hmotnost základní vrstvy, šířka vzorku, tloušťka vzorku, délka vláken.

2. Experimentální část

2.1 Návrh experimentu

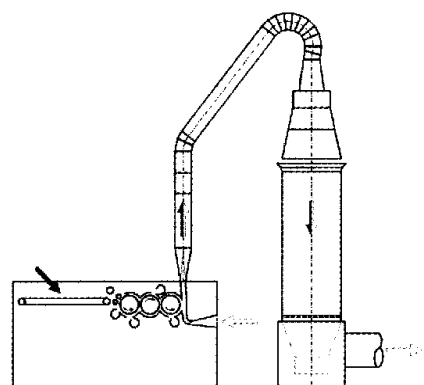
Pro tvorbu netkané textilie se zvýšenou elektrickou vodivostí byla zvolena staplová vlákna obchodního označení Shieldex® (stříbrem pokovená PA vlákna) dodaná firmou Statex, Německo. Použita byla vlákna délky 40 a 66 mm, jemnosti 1,5 dtex. Experiment byl navržen a analyzován pomocí software Minitab. Použit byl úplný faktorový plán. Jako dominantní byly zvoleny následující faktory: plošná hmotnost základní vrstvy, šířka vzorku, tloušťka vzorku a délka vláken. Proměnné veličiny a jejich úrovně jsou uvedeny v tab. 1.

FAKTOR	-1	+1
Plošná hmotnost základní vrstvy [g/m^2]	100	150
Šířka vzorku [mm]	10	100
Tloušťka vzorku – počet základních vrstev [-]	1	5
Délka vláken [mm]	40	66

Tab. 1 Proměnné veličiny a jejich úrovně

2.2 Příprava netkaných textilií se zvýšenou vodivostí

Netkaná textilie tvořená vlákny Shieldex® byla vyrobena následovně. Vláknenné vrstvy byly vytvořeny aerodynamickým způsobem pomocí diskontinuálního laboratorního zařízení, viz obr. 1a. Vláknenná surovina je při tomto způsobu přípravy vláknenné vrstvy rozvolněna šhubacím válcem, vlákna jsou ojednocena průchodem několika česacími válci a jsou unášena proudem vzduchu na nepohyblivé síto. Ukládání vláken na síto je podpořeno odsáváním vzduchu v prostoru pod sítem. Vlákna jsou nahodile orientovaná. Připravené vláknenné vrstvy různé plošné hmotnosti byly vrstveny podle uvedeného schématu a dále zpevněny pomocí vpichování. Použita byla vpichovací jednotka DILO LMB60, frekvence jehelné desky 170/min., rychlost odvádění textilie 1,26 m/min. Tímto způsobem byly získány netkané vzorky odlišující se tloušťkou, plošnou hmotností základní vrstvy a délkou použitých vláken. Tyto vzorky byly odděleny pomocí vysekávání do dvou různých šířek, 10 a 100 mm. Vytvořeno tedy bylo 16 vzorků netkaných textilií lišící se parametry uvedenými v tabulce 1. Na obr. 1b je zobrazena fotografie vybraných vzorků.



a.



b.

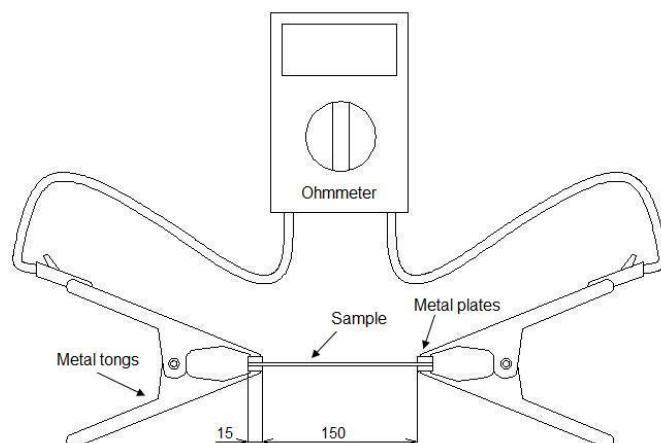
Obr. 1 Příprava netkané textilie tvořené pokovenými vlákny: a. schéma diskontinuálního laboratorního zařízení; b. fotografie vzorku s následujícími parametry - plošná hmotnost základní vrstvy: 100 g/m^2 , délka vláken: 40 mm, počet zákl. vrstev: 1

2.3 Použité metody

Tloušťka vzorků netkaných textilií byla měřena na tloušťkoměru zn. Frank Německo za následujících podmínek: přítlak $0,0625 \text{ N/cm}^2$, čas měření 30 s. Celková plošná hmotnost byla stanovena gravimetricky.

Elektrický odpor vzorků byl měřen pomocí ohmmetru. Konstantního tlaku elektrod bylo dosaženo pomocí kovových kleští a kovových destiček rozměru 15x100 mm. Princip měření

je znázorněn na obr. 2. Proměřovány byly vždy tři provedení od každého typu netkaného vzorku. Odpor vzorků byl měřen v klimatizované laboratoři: teplota vzduchu 19,7°C, relativní vlhkost vzduchu 47%.



Obr. 2 Schéma měření elektrického odporu netkaných vzorků

3. Výsledky a diskuse

V tab. 2 jsou uvedeny průměrné hodnoty tloušťky, celkové plošné hmotnosti a elektrického odporu jednotlivých vzorků netkaných textilií.

Plošná hmotnost základní vrstvy [g/m ²]	Šířka vzorku [mm]	Počet vstev [-]	Délka vláken [mm]	Celková plošná hmotnost [g/m ²]	Tloušťka [mm]	Elektrický odpor [ohm]
150	100	5	40	850,40	13,10	2,08
150	10	5	40	850,40	13,10	4,80
150	100	5	65	792,40	12,11	2,40
150	10	5	65	792,40	12,11	6,33
100	100	5	40	477,85	7,16	4,47
100	10	5	40	477,85	7,16	5,53
100	100	5	65	510,81	7,83	4,63
100	10	5	65	510,81	7,83	6,70
150	100	1	40	153,79	2,17	43,53
150	10	1	40	153,79	2,17	48,10
150	100	1	65	144,54	1,91	41,00
150	10	1	65	144,54	1,91	58,03
100	100	1	40	95,84	1,40	114,10
100	10	1	40	95,84	1,40	158,47
100	100	1	65	93,83	1,25	166,23
100	10	1	65	93,83	1,25	174,17

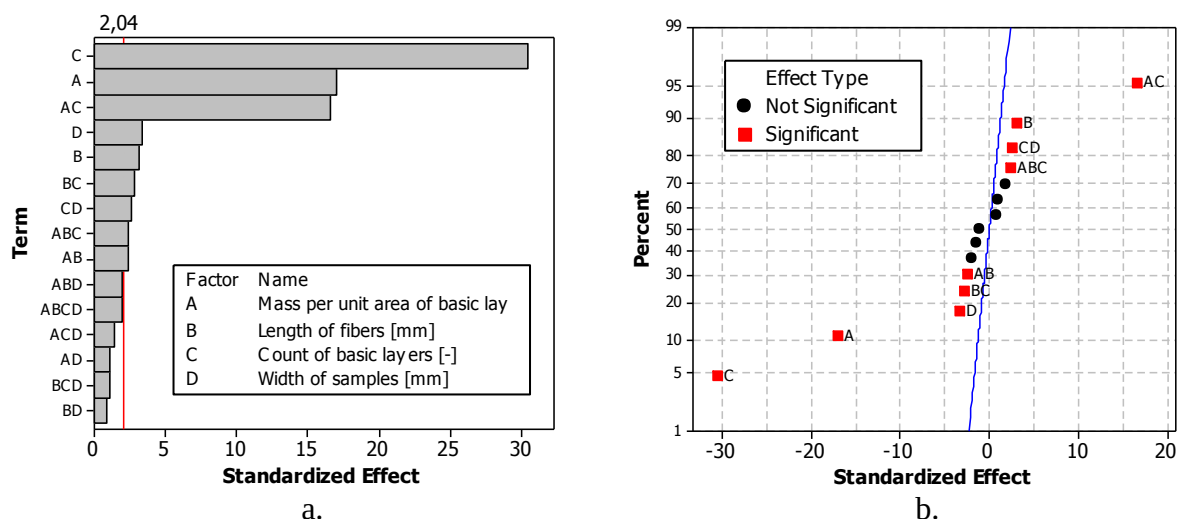
Tab. 2 Charakteristika vzorků a naměřené hodnoty tloušťky, celkové plošné hmotnosti a elektrického odporu vzorků

Jak již bylo zmíněno výše, experiment byl navržen a dále analyzován pomocí software Minitab využitím úplného faktorového plánu zahrnující čtyři hlavní efekty. Význam faktorů a interakcí je uveden v tab. 3. Významné efekty je možno určit dle p-hodnot (P) v tab. 3. Při hladině významnosti $\alpha = 0,05$ jsou hlavní efekty *plošná hmotnost základní vrstvy*, *délka vláken*, *počet vrstev*, *šířka vzorku* a interakce *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*, *plošná hmotnost základní vrstvy* počet vrstev*, *délka vláken*počet vrstev* a *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*počet vrstev* statisticky významné; neboť jejich p-hodnoty jsou nižší než 0,05.

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		52,54	1,574	33,38	0,000
Plošná hmotnost základní vrstvy	-53,50	-26,75	1,574	-17,00	0,000
Délka vláken	9,80	4,9	1,574	3,11	0,004
Počet vrstev	-95,84	-47,92	1,574	-30,45	0,000
Šířka vzorku	-10,46	-5,23	1,574	-3,32	0,002
Plošná hmotnost základní vrstvy Délka vláken	-7,49	-3,74	1,574	-2,38	0,023
Plošná hmotnost základní vrstvy Počet vrstev	52,07	26,04	1,574	16,55	0,000
Plošná hmotnost základní vrstvy *Šířka vzorku	3,4	1,70	1,574	1,08	0,288
Délka vláken* Počet vrstev	-9,01	-4,50	1,574	-2,86	0,007
Délka vláken* Šířka vzorku	2,72	1,36	1,574	0,86	0,394
Počet vrstev*Šířka vzorku	8,01	4,01	1,574	2,55	0,016
Plošná hmotnost základní vrstvy* Délka vláken* Počet vrstev	7,62	3,81	1,574	2,42	0,021
Plošná hmotnost základní vrstvy* Délka vláken* Šířka vzorku	-6,14	-3,07	1,574	-1,95	0,060
Plošná hmotnost základní vrstvy * Počet vrstev *Šířka vzorku	-4,28	-2,14	1,574	-1,36	0,184
Délka vláken* Počet vrstev*Šířka vzorku	-3,27	-1,64	1,574	-1,04	0,306
Plošná hmotnost základní vrstvy* Délka vláken* Počet vrstev*Šířka vzorku	6,09	3,04	1,574	1,93	0,062

Tab. 3 Estimated effects and coefficients vyhodnocené softwarem Minitab

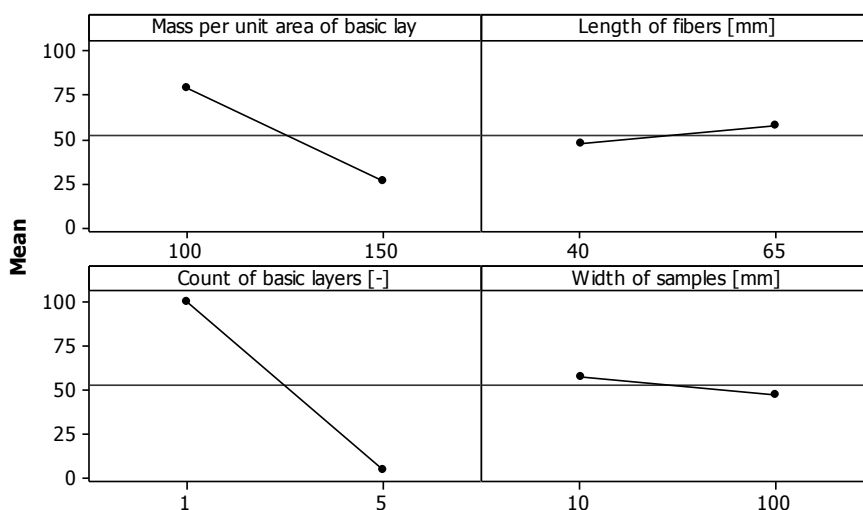
Grafická interpretace významných členů na odezvu elektrický odpor netkaných vzorků, tj. graf normálního rozdělení a Paretův diagram standardizovaných efektů jsou uvedeny na obr. 3. Z obou grafů je zřejmé, že hlavní efekty *plošná hmotnost základní vrstvy*, *délka vláken*, *počet vrstev*, *šířka vzorku* a interakce *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*, *plošná hmotnost základní vrstvy* počet vrstev*, *délka vláken*počet vrstev* a *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*počet vrstev* jsou všechny významné.



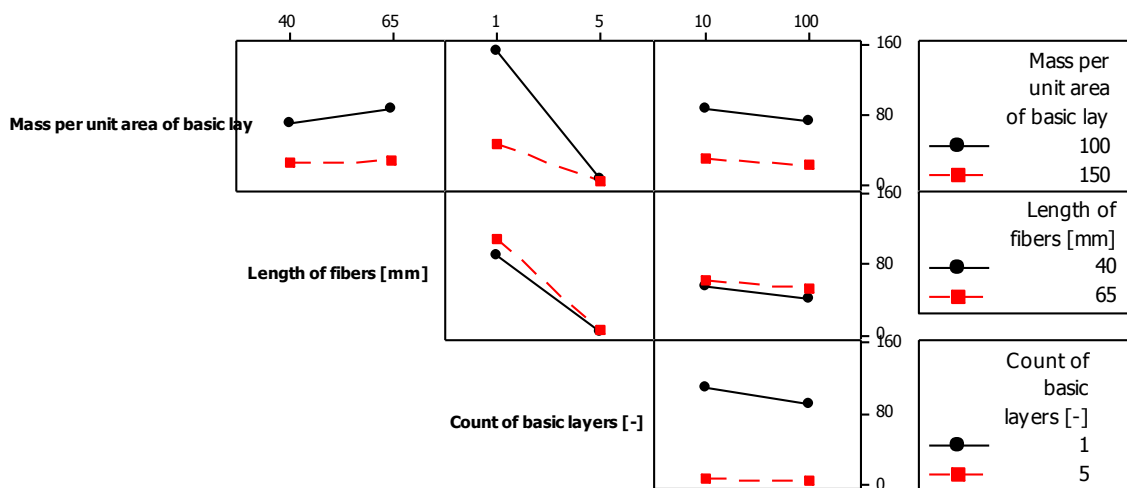
Obr. 3 Grafická interpretace významných členů na odezvu systému: a. Paretův diagram významnosti faktorů, b. graf normálního rozdělení

Na obr. 4 je zobrazen faktoriální graf hlavních efektů. Z obrázku je zřejmé, že nejvyššího vlivu na elektrický odpor dosahuje faktor *počet vrstev*, který má záporný vliv. To znamená, že se zvyšujícím se počtem základních vrstev (tj. se zvyšující se tloušťkou vzorku) klesá elektrický odpor vzorku. Druhý největší (opět záporný) vliv na měřenou odezvu má hlavní faktor *plošná hmotnost základní vrstvy*. Faktory *délka vláken* a *šířka vzorku* dosahují menšího vlivu na odezvu, přičemž *délka vláken* má malý kladný vliv, zatímco *šířka vzorku* má malý záporný vliv. Mezi faktory byly shledány významné interakce (viz obr. 2), proto je nutno dále vyšetřit graf interakcí (obr. 5).

Z obr. 5 je zřejmé, že velké interakce dosahuje *plošná hmotnost základní vrstvy***počet vrstev* se záporným hlavní faktorem *počet základních vrstev*. Malých interakcí dosahují *plošná hmotnost základní vrstvy***délka vláken* (kladný hlavní faktor *délka vláken*), *délka vláken***počet vrstev* (záporný hlavní faktor *počet vrstev*) a *počet vrstev***šířka vzorku* (záporný hlavní faktor *šířka vzorku*). Ostatní kombinace faktorů jsou bez interakcí.



Obr. 4 Vliv hlavních faktorů na elektrický odpor netkaných vzorků



Obr. 5 Graf interakcí pro odezvu elektrický odpor

Po provedení experimentů podle faktorového plánu a po vyhodnocení byl jako faktor nejvýznamněji ovlivňující odezvu určen faktor C (*počet základních vrstev*), což je v souladu s rovnicí pro elektrický odpor R [Ω]:

$$R = \frac{l \cdot \rho}{A} = \frac{l \cdot \rho}{w \cdot t}, \quad (1)$$

kde l je délka vzorku [m], ρ je měrný elektrický odpor [$\Omega \cdot m$], A je průřez vodiče [m^2], w je šířka vzorku [m], t je tloušťka vzorku [m].

Dále byl sestaven model pomocí lineární regrese. Model experimentu stanovující vztah mezi elektrickým odporem a faktory je následující:

$$R = 453 - 2,64 \cdot A - 89 \cdot C + 0,521 \cdot A \cdot C, \quad (2)$$

kde A je faktor plošné hmotnosti základní vrstvy, C je faktor počtu vrstev.

3. Závěr

Na základě výstupů z experimentů a statistické analýzy byla stanovena hierarchie a vztahy mezi vybranými faktory, u kterých byl předpokládán vliv na elektrickou vodivost netkaných vzorků tvořených pokovenými polyamidovými vlákny.

Bylo shledáno, že mezi statisticky významné faktory ovlivňující výsledný elektrický odpor textilního vzorku patří *plošná hmotnost základní vrstvy*, *délka vláken*, *počet vrstev*, *šířka vzorku* a interakce *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*, *plošná hmotnost základní vrstvy*počet vrstev*, *délka vláken*počet vrstev* a *plošná hmotnost základní vrstvy*délka vláken*počet vrstev*. Mezi nejvýznamnější pak patří hlavní faktory *počet základních vrstev* (záporný vliv) a *plošná hmotnost základní vrstvy* (záporný vliv) a interakce *plošná hmotnost základní vrstvy*počet vrstev*.

Je zřejmé, že pro dosažení vysoké elektrické vodivosti vzorků jsou vhodné vzorky s nízkým elektrickým odporem. Snížení elektrického odporu je možno dosáhnout zvýšením počtu základních vrstev a jejich plošné hmotnosti, snížením délky vláken a zvětšením šířky vzorků.

Výslednou hodnotu elektrického odporu studovaných vzorků je možno predikovat pomocí modelu, jenž byl sestaven pomocí lineární regrese.

Literatura:

- [1] LOCHER, I, KIRSTEIN, T, TROSTER, G. *Routing Methods Adapted to e-Textiles* [online]. Zürich : Wearable Computing Laboratory, ETH, c2009 [cit. 2009-09-20]. Dostupný z WWW: <http://www.wearable.ethz.ch/research/groups/textiles/ConductiveTextiles/imaps04_locher.pdf>.
- [2] NOVÁK, J. Elektromagnetické pole a zdravotní rizika (I). *Elektroinstalatér*. 2003, 5. Dostupný také z WWW: <<http://www.tzb-info.cz/t.py?t=2&i=1801&h=4&th=56>>.
- [3] SVAČINA, J. Základy elektromagnetické kompatibility. Část 6: Normalizace v oblasti EMC. *Elektrorevue* [online]. 2001/36 [cit. 2010-06-07]. Dostupné z <http://www.elektrorevue.cz>. ISSN 1213-1539.
- [4] AVLONI, J., et al Electromagnetic shielding with polypyrrole-coated fabrics. In *AMC Europe Conference*. [s.l.] : [s.n.], 2006.

Poděkování: Tato práce vznikla za finanční podpory Institutu pro textilní techniku při RWTH Aachen a projektu studentské grantové soutěže TUL v rámci specifického vysokoškolského výzkumu na rok 2010, č. 4822.

ESTIMATION OF PROBABILITY DISTRIBUTION WITH GENERAL LINEAR CONSTRAINTS

ODHAD ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI S OBECNÝMI LINEÁRNÍMI PODMÍNKAMI

Jakub Šácha^a, Zdeněk Karpíšek^b

^aÚstav statistiky a operačního výzkumu, Provozně ekonomická fakulta, Mendelova univerzita v Brně
Zemědělská 1, 61300 Brno
jakub.sacha@post.cz

^bÚstav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno
karpisek@fme.vutbr.cz

Abstract: *This article is focused on theoretical and applicational problems with estimation of a discrete probability distributions from observed data. Theoretical aspects come out from minimizing Hellinger, Shannon and Pearson quasi-norm with given constraints. In contrast to previous articles on this topic is not written only about moment constraints, but also about the general linear constraints. The article concludes with an example of possible practical applications.*

Keywords: *estimation, quasi-norm, discrete probability distribution, f-divergence*

Abstrakt: *Tento článek je zaměřen na řešení klasického statistického problému nalezení rozdělení pravděpodobnosti pozorované diskrétní náhodné veličiny pomocí minimalizace tzv. Hellingerovy, Shannonovy a Pearsonovy kvazinormy za vedlejších podmínek. Oproti předešlým článkům s touto tematikou se nepíše pouze o momentových podmínkách, ale také o obecných lineárních podmínkách. V závěru článku je příklad možného praktického využití.*

Klíčová slova: *odhad, kvazinorma, diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, f-divergence*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/192

1. Úvod

Mezi nejdůležitější úlohy matematické statistiky patří nalezení rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny či vektoru. Na základě pojmu f -divergence (vzdálenosti) dvou rozdělení je možné vyvodit postupy umožňující takové rozdělení odhadnout. Tyto postupy však musí obvykle respektovat další podmínky kladené na toto rozdělení. Jde nejčastěji o podmínky dané apriorním stanovením hodnot vybraných číselných charakteristik, např. střední hodnoty, rozptylu apod. Někdy však můžeme požadovat obecné lineární omezení. Naší základní ideou je najít takové rozdělení, které má nějaké požadované vlastnosti (splňuje zadané vedlejší podmínky) a je v jistém smyslu blízké vhodně zvolenému rozdělení. Přesněji jde o nalezení rozdělení, které je s takovým pevným rozdělením totožné při absenci vedlejších podmínek, ale s přidáváním podmínek se od tohoto pevného rozdělení postupně vzdaluje při současné minimalizaci zvolené f -divergence hledaného a daného pevného rozdělení.

2. f -divergence a kvazinorma

Nechť funkce $f(u)$ je konvexní $(0, \infty)$, striktně konvexní v $u = 1$, a $f(1) = 0$. f -divergencí pravděpodobnostních modelů $(\Omega, \mathbf{p})$, $(\Omega, \mathbf{q})$, resp. hustot $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ na (Ω, Σ, P) rozumíme funkcionál

$$D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_x q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right),$$

V článku se zaměřujeme na tyto f -divergence:

$f(u)$	Název	$D_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
$u \ln u$	$I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ <i>I-divergence</i>	$\sum_x p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)}$
$(u^{1/2} - 1)^2$	$D_{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ <i>Hellingerova vzdál.</i>	$\left(1 - \sum_x (p(x) q(x))^{1/2}\right)$
$(u - 1)^2$	$\chi^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ χ^2 - <i>divergence</i>	$\sum_x \frac{(p(x) - q(x))^2}{q(x)}$

f -divergenci dvou diskretních rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ na též pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) můžeme chápat jako vzdálenost (míru podobnosti) těchto dvou rozdělení.

Kvazinormou diskretního rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}$ nazýváme vzdálenost mezi rozdělením pravděpodobnosti $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$, které má maximální možnou neurčitost ve smyslu Shannonovy entropie. Jako analogii zavedení indukované normy na lineárním prostoru jako vzdálenosti od neutrálního prvku můžeme definovat následující pojem.

Nechť $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, a $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$, kde $m > 1$, je diskretní rozdělení pravděpodobnosti na pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) , a D_f a f -divergence definovaná na tomto prostoru. Pak f -divergenci $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ nazýváme **kvazinormou** rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ na (Ω, Σ, P) .

3. Odhad diskretního rozdělení

Předpokládáme, že pozorovaná diskretní náhodná veličina X na (Ω, Σ, P) , jejíž rozdělení pravděpodobnosti chceme odhadnout (fitovat), nabývá nejvýše konečně mnoha různých hodnot $x_j^* \in \mathbb{R}$, (tj. $\Omega = \{x_1^*, \dots, x_m^*\} \subset \mathbb{R}$) s neznámými pravděpodobnostmi

$$p_j = P(X = x_j^*), \quad j = 1, \dots, m, \quad m > 1.$$

Pozorováním náhodné veličiny X získáme statistický soubor $(x_1, \dots, x_n)$ a jeho roztríděním dostaneme roztríděný statistický soubor

$$\left((x_1^*, \frac{f_1}{n}), \dots, (x_m^*, \frac{f_m}{n}) \right),$$

kde f_j je absolutní četnost pozorované hodnoty x_j^* . Dále předpokládáme, že $n > m$ a $f_j > 0$ pro všechna $j = 1, \dots, m$ (jestliže $f_j = 0$, pak j -tou třídu vynecháme). Pro odhad rozdělení $\mathbf{p}$ požadujeme, aby toto rozdělení navíc splňovalo nějaké zadané podmínky, jejichž počet je $K \geq 1$. Mezi tyto podmínky zařazujeme zřejmou podmínku $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Hledáme pak takové rozdělení $\mathbf{p}$, které má minimální kvazinormu $D_f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ za těchto dodatečných podmínek. V předchzích článcích s touto tématikou jsme se zabývali **momentovými podmínkami**

$$\sum_{j=1}^m p_j x_j^{*k} = M_k, \quad k = 0, \dots, K.$$

jedná se o lineární podmínky v proměnných p_j s konkrétními koeficienty na levých stranách, a sice mocninami pozorovaných hodnot x_j^{*k} . Tento příspěvek je zaměřen na obecné lineární podmínky

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

zapsáno maticově

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b},$$

$$\text{kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \dots & a_{Km} \end{pmatrix}$$

je matice typu $K + 1$ krát m a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix}$ je sloupcový vektor pravých stran omezení.

4. Hellingerova kvazinorma

Rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ pozorované diskrétní náhodné veličiny X má na pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) , kde $\Omega = \{x_1^*, \dots, x_m^*\}$, $m > 0$ a Σ je množina všech podmnožin Ω , **minimální Hellingerovu kvazinormu za K počátečních obecných podmínek**

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

jestliže jeho Hellingerova kvazinorma

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = 2 - \frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \sqrt{p_j}$$

je minimální pro

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

Pro $K < m - 1$ obdržíme

$$p_j(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{m \left(\sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right)^2}, \quad j = 1, \dots, m,$$

kde λ_k , $k = 0, \dots, K$, jsou Lagrangeovy multiplikátory pro Lagrangeovu funkci

$$\Lambda(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = D(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \sum_{k=0}^K \lambda_k \left(\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} - b_k \right)$$

a $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_K)$.

Lagrangeovy multiplikátory λ_k je možno určit pomocí nelineární soustavy rovnic odpovídající nulovému gradientu Lagrangeovy funkce anebo přímo aplikovat některou metodu nelineární optimalizace pro určení jejího minima.

Jestliže označíme $D_K = \min D(\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{p}_0)$, kde $\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}) = (p_1(\boldsymbol{\lambda}), \dots, p_m(\boldsymbol{\lambda}))$ je odhad rozdělení pravděpodobnosti s minimální Hellingerovou kvazinormou za daných $K < m - 1$ momentových podmínek, pak

$$D_K = 2 - 2 \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right|.$$

Pro $K = 0$ je $p_j = \frac{1}{m}$, $j = 1, \dots, m$ a $D_0 = 0$.

5. Shannonova kvazinorma

Rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ pozorované diskrétní náhodné veličiny X má na pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) , kde $\Omega = \{x_1^*, \dots, x_m^*\}$, $m > 0$ a Σ je množina všech podmnožin Ω , **minimální Shannonovu kvazinormu za K počátečních obecných podmínek**

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

jestliže jeho Shannonova kvazinorma

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \sum_{j=1}^m p_j \ln p_j + \ln m$$

je minimální pro

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

Pro $K < m - 1$ obdržíme

$$p_j(\boldsymbol{\lambda}) = \exp \left(-1 - \sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

kde λ_k , $k = 0, \dots, K$, jsou Lagrangeovy multiplikátory pro Lagrangeovu funkci

$$\Lambda(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = D(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \sum_{k=0}^K \lambda_k \left(\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} - M_k \right)$$

a $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_K)$.

Lagrangeovy multiplikátory λ_k je možno určit pomocí nelineární soustavy rovnic odpovídající nulovému gradientu Lagrangeovy funkce

$$\sum_{j=1}^m \exp \left(-1 + \sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right) a_{\nu j} = b_\nu, \quad \nu = 1, \dots, K$$

anebo přímo aplikovat některou metodu nelineární optimalizace pro určení jejího minima.

Jestliže označíme $S_K = \min S(\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{p}_0)$, kde $\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}) = (p_1(\boldsymbol{\lambda}), \dots, p_m(\boldsymbol{\lambda}))$ je odhad rozdělení pravděpodobnosti s minimální Shannonovou kvazinormou za daných $K < m - 1$ momentových podmínek, pak

$$S_K = \ln m - \sum_{j=1}^m \left(1 + \sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right) \exp \left(-1 - \sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj} \right).$$

Pro $K = 0$ je $p_j = \frac{1}{m}$, $j = 1, \dots, m$ a $S_0 = 0$.

6. Pearsonova kvazinorma

Rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ pozorované diskrétní náhodné veličiny X má na pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) , kde $\Omega = \{x_1^*, \dots, x_m^*\}$, $m > 0$ a Σ je množina všech podmnožin Ω , **minimální Pearsonovu kvazinormu za K počátečních momentových podmínek**

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

jestliže jeho Pearsonova kvazinorma

$$P(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} - 1$$

je minimální pro

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

Pro $K < m - 1$ obdržíme

$$p_j(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{m \sqrt{\sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj}}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

kde λ_k , $k = 0, \dots, K$, jsou Lagrangeovy multiplikátory pro Lagrangeovu funkci

$$\Lambda(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = D(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \sum_{k=0}^K \lambda_k \left(\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} - b_k \right)$$

a $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_K)$.

Lagrangeovy multiplikátory λ_k je možno určit pomocí nelineární soustavy rovnic odpovídající nulovému gradientu Lagrangeovy funkce anebo přímo aplikovat některou metodu nelineární optimalizace pro určení jejího minima.

Jestliže označíme $P_K = \min P(\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}), \mathbf{p}_0)$, kde $\mathbf{p}(\boldsymbol{\lambda}) = (p_1(\boldsymbol{\lambda}), \dots, p_m(\boldsymbol{\lambda}))$ je odhad rozdělení pravděpodobnosti s minimální Shannonovou kvazinormou za daných $K < m - 1$ momentových podmínek, pak

$$P_K = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=0}^K \lambda_k a_{kj}} - 1.$$

Pro $K = 0$ je $p_j = \frac{1}{m}$, $j = 1, \dots, m$ a $P_0 = 0$. Specialně pro $K = m - 1$ jde o interpolaci $p_j = \frac{f_j}{n}$, $j = 1, \dots, m$ a $P_{m-1} = \frac{n}{m^2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{f_j}$. Platí, že $P_0 \leq \dots \leq P_{m-1}$.

7. Příklad

Předpokládejme, že první podmínkou ($k = 1$) v zápise

$$\sum_{j=1}^m p_j a_{kj} = b_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

chceme zaručit rovnost geometrických průměrů pro pozorování a odhad, tj.

$$\prod_{i=1}^m x_i^{*p_i} = \prod_{i=1}^m x_i^{*\frac{f_i}{n}}.$$

Tuto nelineární podmínku můžeme snadno linearizovat logaritmováním

$$\sum_{i=1}^m p_i \ln(x_i^*) = \sum_{i=1}^m \frac{f_i}{n} \ln(x_i^*) \equiv G_1$$

Spolu se samozřejmou podmínkou řádu 0 můžeme tuto podmínku zapsat maticovým zápisem $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ volbou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \ln(x_1^*) & \ln(x_2^*) & \dots & \ln(x_m^*) \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ G_1 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli zaručit ještě navíc stejnou variabilitu pro pozorování a odhad přidáme ještě další podmínku

$$\sum_{i=1}^m p_i \ln^2(x_i^*) = \sum_{i=1}^m \frac{f_i}{n} \ln^2(x_i^*) \equiv G_2$$

v maticovém zápisu $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ volíme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \ln(x_1^*) & \ln(x_2^*) & \dots & \ln(x_m^*) \\ \ln^2(x_1^*) & \ln^2(x_2^*) & \dots & \ln^2(x_m^*) \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

Jedná se rovnost "geometrických" momentů druhého řádu.

Mějme nyní konkrétní datový soubor o rozsahu $n = 100$, jehož roztříděním dostaneme následující tabulku.

Předpokládejme, že tato data vyjadřují koeficienty růstu nějaké veličiny za 100 časových období,

x_i^*	0,8	1	1,2	1,4	1,6
f_i	17	35	27	14	7

např. měsíců. Je tedy věcně správnější pracovat s geometrickým průměrem (příp. obecně s geometrickými momenty vyšších řádů) než aritmetickým průměrem (příp. obecně s aritmetickými momenty vyšších řádů). Vypočítejme a srovnajme tedy odhady pomocí minimalizace Pearsonovy kvazinormy v prvním případě při použití klasických aritmetických momentových podmínek, jejichž použití není pro takovéto data věcně správné a v druhém případě při použití správnějších geometrických momentových podmínek. V obou případech volíme rovnost momentů až do řádu $K = 1$ příp. $K = 2$.

Počet tříd je $m = 5$ rozsah $n = 100$, takže

$$M_1 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 f_i x_i^* = 1,301,$$

$$M_2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 f_i x_i^{*2} = 1,096,$$

$$G_1 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 f_i \ln(x_i^*) = 0,0913,$$

$$G_2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 f_i \ln^2(x_i^*) = 0,0488.$$

Pomocí optimalizačního nástroje Řešitel z Excelu pro určení minima Pearsonovy kvazinormy jsme získali výsledky v následujících tabulkách. První tabulka odpovídá omezením ve tvaru momentových podmínek pro $K = 1$, příp. $K = 2$ a druhá odpovídá omezením ve tvaru "geometrických" momentových podmínek, popsanych výše.

Tabulka 1: Výsledky pro aritmetické momentové podmínky

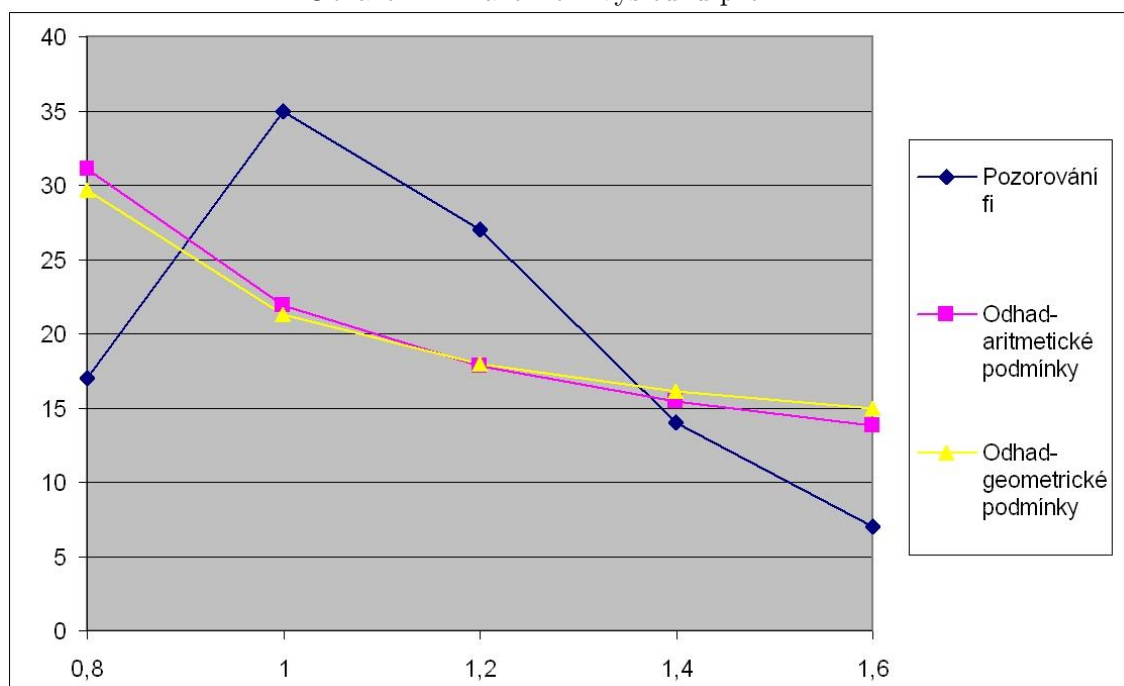
x_i	0,8	1	1,2	1,4	1,6
f_i	17	35	27	14	7
odhad $K = 1$	31,1	21,9	17,8	15,4	13,8
odhad $K = 2$	15,6	38,1	25,9	12,4	8,0

Tabulka 2: Výsledky pro geometrické momentové podmínky

x_i	0,8	1	1,2	1,4	1,6
f_i	17	35	27	14	7
odhad 1	29,6	21,3	18,0	16,2	15,0
odhad 2	15,0	41,2	22,4	12,5	8,9

Pro přehled uvedme ještě grafické znázornění výsledků. V prvním grafu je srovnáno pozorování s odhady při použití aritmetických a geometrických momentových podmínek pro $K = 1$ (rovnost průměrů). V druhém grafu je srovnání téhož pro $K = 2$ (rovnost průměrů a druhých momentů).

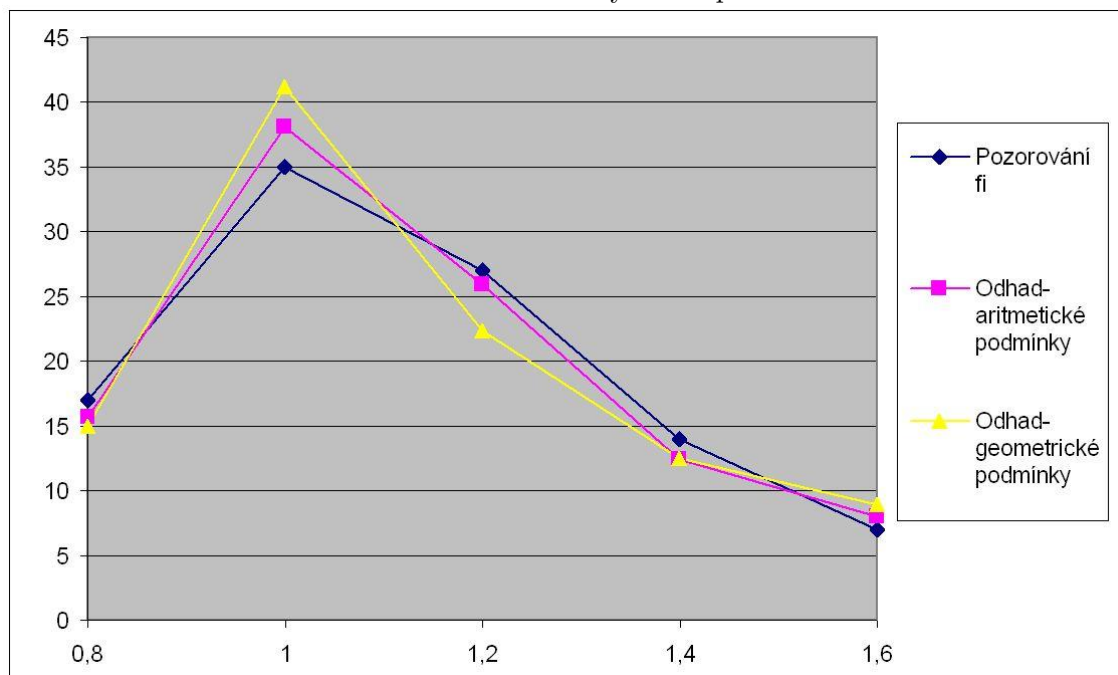
Obrázek 1: znázornění výsledků pro $K = 1$



8. Závěr

Empirický přístup k odhadům rozdělení pravděpodobnosti vyžaduje při řešení konkrétních úloh dostatečnou dávku zkušeností a nelze přitom spoléhat na profesionální statistické softwarové produkty, které navíc obsahují pouze nevelké množství různých typů rozdělení. V tomto článku je ukázáno zobecnění momentových podmínek na obecné lineární podmínky, které mají širší možnost použití. Jak je ukázáno v příkladě, hodí se např. pro data, u kterých je smysluplnější pracovat s geometrickým průměrem oproti aritmetickému.

Obrázek 2: znázornění výsledků pro $K = 2$



Reference

- [1] Vajda, I. *Teória informácie a štatistického rozhodovania*. Bratislava: Alfa, 1982.
- [2] Anděl, J. *Statistické metody*. Praha: Matfyzpress, 1993.
- [3] Karpíšek, Z. *Statistical Properties of Discrete Probability Distributions with Maximum Entropy*. In Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 9, Brno, 2001, pp. 21-32, ISBN 80-210-2544-1.
- [4] Karpíšek, Z., Jurák, P. *Modeling of Probability Distribution with Maximum Entropy*. MENDEL '01. 7th In International Conference on Soft Computing. Brno, 2001, pp. 232-239, ISBN 80-214-1894-X.
- [5] Karpíšek, Z., Jurák, P. *Estimate of Discrete Probability Distribution by Means of Hellinger Distance*. MENDEL'02. 8th In International Conference on Soft Computing. Brno, 2002, pp. 301-306, ISBN 80-214-2135-5.
- [6] Jurák, P., Karpíšek, Z. *Hellinger Quasi-norm and Shannon Quasi-norm in N-dimensional space*. MENDEL '04. 10th In International Conference on Soft Computing. Brno, 2004, pp. 210-215, ISBN 80-214-2676-4.
- [7] Karpíšek, Z., Sadovský, Z., Šácha, J. *Pitman - Hellinger Test of Fit*. In 4th International Conference APLIMAT 2005 (part II). Bratislava, 2005, pp. 471- 478, ISBN 80-969264-2-X.
- [8] Karpíšek, Z., Sadovský, Z.: *Fitování diskrétních rozdělení pravděpodobnosti*. In Celostátní seminář Analýza dat 2005/II. Lázně Bohdaneč 2005, pp. 43-52, ISBN 80-239-6552-2.
- [9] Karpíšek, Z., Jurák, P. *Estimate of Discrete Probability Distribution by Means of Pearson Quasi-norm*. In MENDEL '05. 11th International Conference on Soft Computing. Brno, 2005, pp. 202-206, ISBN 80-214-2961-5.

THE USE OF MAPLE SYSTEM IN TEACHING CALCULUS

VYUŽITÍ SYSTÉMU MAPLE VE VÝUCE MATEMATICKÉ ANALÝZY

Jaroslav Urbánek¹, Václav Pink², Jiří Hřebíček³

¹Centrum pro výzkum toxických látek v prostředí, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Brno
Kamenice 126/3, 625 00 Brno
urbanek@recetox.muni.cz

²Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
pink@mail.muni.cz

³Institut biostatistiky a analýz, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
hrebicek@iba.muni.cz

Abstract: *The paper presents how the computer algebra system Maple is used in teaching Calculus to the students of Mathematical biology at Faculty of Science of Masaryk University in Brno.*

Keywords: *Calculus, Maple 14.*

Abstrakt: *Příspěvek pojednává o využití systému počítačové algebry Maple ve výuce Matematické analýzy pro obor Matematická biologie na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně.*

Klíčová slova: *matematická analýza, Maple 14.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/200

1 Úvod

Matematická analýza je jedním ze základních matematických předmětů vyučovaných na mnoha fakultách různých vysokých škol v prvním roce studia. Znalost matematické analýzy je nutná ve všech přírodních, inženýrských i ekonomických vědách, a tak je nezbytné její správné pochopení a využití. K tomuto pomáhají studentům moderní informační a komunikační technologie (ICT), jako například systémy počítačové algebry Maple¹, Mathematica², MuPAD³, MAXIMA⁴ a další. Velkou výhodou těchto systémů je jejich schopnost provádět symbolické výpočty. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity (MU) v Brně nabízí studentům předmět s názvem *Matematická analýza – cvičení s použitím Maple* jako doplňující cvičení ke standardnímu předmětu *Matematická analýza*. Primárně je tento kurz určen studentům oboru Matematická biologie, kteří jej mají dokonce povinný, nicméně si cvičení může zapsat každý student MU. Od verze 10 systém Maple poskytuje snadno ovladatelné a přehledné grafické rozhraní, s nímž se naučí začátečník pracovat během několika minut. Studenti si tak názorným způsobem v průběhu dvou semestrů ozřejmí pojmy diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné i více proměnných, které na vhodných příkladech procvičí.

¹ <http://www.maplesoft.com>, <http://www.maplesoft.cz>

² <http://www.wolfram.com>

³ <http://research.mupad.de/>

⁴ <http://maxima.sourceforge.net/>

2 Matematická analýza – cvičení s použitím Maple

Matematická analýza s použitím Maple reflektuje současný vývoj v oblasti aplikací ICT v matematickém modelování, [1], [2], a umožňuje studentům pracovat vždy s nejnovějšími výukovými vlastnostmi systému Maple. Současná verze Maple 14⁵ (vydaná v květnu 2010 společností Maplesoft), poskytuje oproti předchozí verzi navíc tzv. „MapleCloud“ umožňující sdílení dokumentů mezi více uživateli a dále přináší oproti Maple 13 několik výkonostních a grafických vylepšení, nové šablony úloh a další „drobné“ úpravy usnadňující studentům (uživatelům) práci se systémem Maple při tvorbě interaktivních dokumentů.

The screenshot shows the Maple 14 website with the headline "Maple 14 The Essential Tool for Mathematics and Modeling". Navigation links include "Pricing & Purchase", "Upgrade", "Evaluate", and "Request Quote". A banner for "What's New in Maple 14?" features a 15% discount on upgrading to Maple 14, valid until June 30, 2010. Below this, a table lists new features for three user groups:

Professionals	Academic Engineering	Academic Math
• Linearization Tools • Solvers for Algebraic Riccati Equations (CARE/DARE) • Control Design Tools • Connectivity with MATLAB® • Improved Search Capabilities • and more...	• MapleCloud • More Math for Engineering Applications • Connectivity with MATLAB® • Improved Search Capabilities • New Task Templates • and more...	• MapleCloud • Performance Enhancements • Improved Search Capabilities • Plotting Enhancements • New Task Templates • and more...

Illustrative images include a mechanical system diagram, a 3D cone plot, and a MapleCloud interface showing document sharing.

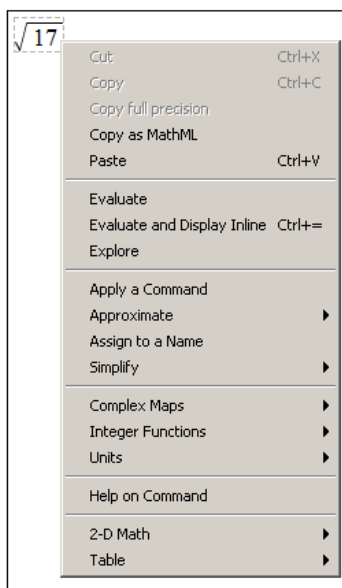
Obr. 1: Novinky v systému Maple 14

Výuka předmětu *Matematická analýza – cvičení s použitím Maple* probíhá ve dvou semestrech. V prvním semestru se studenti učí základnímu ovládání systému Maple a procvičují na příkladech matematické pojmy definované na přednáškách předmětu *Matematická analýza* jako jsou limita, diferenciál, derivace, primitivní funkce, vlastní a nevlastní integrál a další. Všechny matematické pojmy a příklady se týkají funkcí jedné proměnné. Ve druhém semestru je náplň předmětu obdobná, rozdíl tvoří přechod k funkcím více proměnných. Při výuce je výhradně využíváno grafické uživatelské rozhraní *Standard Worksheet* systému Maple.

Jak již bylo zmíněno, výhodou systému Maple je jeho schopnost práce se symboly. Uživatelé (studenti) se snáze orientují již v pouhém zápisu matematického výrazu, v němž se mohou objevovat symboly jako je zlomek, exponent, odmocnina, řecká písmena, dolní indexy, případně derivace, integrály a mnohé další. Grafické rozhraní *Standard Worksheet* obsahuje tzv. palety nabízející předdefinované symboly, zápisy a výrazy. Dále poskytuje kontextovou nabídku dostupných operací, které je možné se zapsaným výrazem provést. Tuto nabídku vyvolá kliknutí pravým tlačítkem myši na daný výraz.

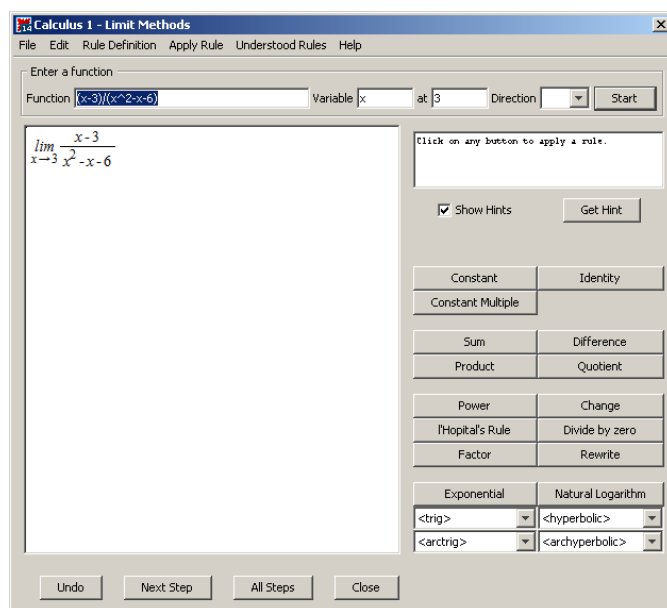
⁵ <http://www.maplesoft.com/products/maple/>

Ukázku kontextové nabídky po kliknutí na výraz $\sqrt{17}$ je možné vidět na obrázku 2. To vše spolu s propracovanou nápovědou s příklady použití přispívá k jednoduché ovladatelnosti a použitelnosti systému při řešení problémů (nejen) matematické analýzy.



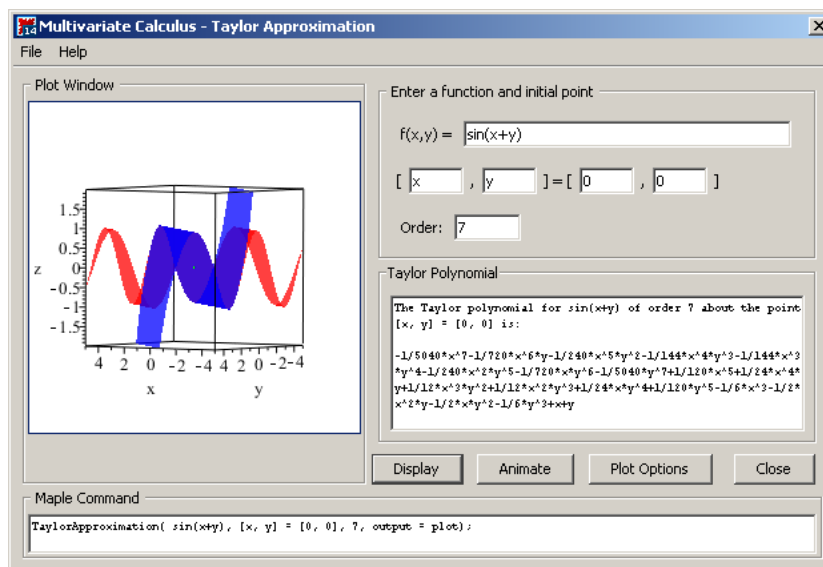
Obr. 2: Kontextová nabídka v systému Maple 14

Systém Maple také obsahuje pomocné nástroje při řešení obvyklých problémů. Jedná se o tzv. *Pomocníky* (Assistants), *Instruktory* (Tutors) a *Úlohy* (Tasks). Pro matematickou analýzu je velmi užitečný zejména nástroj zvaný *Tutors*. Instruktori provádí uživatele řešením zvoleného problému po jednotlivých krocích. Například pomocník pro určování limit funkcí umožňuje zadat libovolnou funkci a procházet vzorový výpočet limity v daném bodě krok po kroku, zobrazit řešení „najednou“, aplikovat obecná pravidla na upravování výrazů (při výpočtech limit), či si nechat poradit (tlačítko *Get Hint*), jaké pravidlo zvolit v aktuálním kroku výpočtu. Okno pomocníka pro výpočet limit funkcí jedné proměnné je na obrázku 3.



Obr. 3: Pomocník pro výpočet limit funkcí jedné proměnné.

Stejné nástroje jsou k dispozici také pro určování derivací a integrálů funkcí jedné proměnné. V případě funkcí dvou proměnných zmíníme například nástroje pro výpočet a zobrazení Taylorova polynomu (ukázka na obr. 4), přibližný výpočet určitého integrálu pomocí numerických metod, či určení a vykreslení směrové derivace funkce.



Obr. 4: Pomocník pro výpočet a zobrazení Taylorova polynomu.

3 Závěr

Studium matematické teorie na vysoké škole je pro mnoho studentů obtížné, pojmy z přednášek se učí zpaměti stejně jako postupy při řešení příkladů na cvičeních, aniž by tomu rozuměli. Použití moderních ICT nástrojů jako je Maple pomůže studentům matematické pojmy a zákonitosti názorně ukázat a přiblížit. Konkrétně v případě výuky matematické analýzy systém Maple pomáhá studentům graficky znázornit funkce jedné a více proměnných, dále postupy řešení základních úloh jako je výpočet limit, derivací i integrálů. Jeho předností je jednoduchost (a intuitivnost) zadávání příkazů k provedení matematických úloh a řešení praktických příkladů, kde nedochází k chybám, které dříve studenty zdržovaly. Studenti, kteří absolvovali kurz *Matematická analýza – cvičení s použitím Maple*, si jej pochvalovali a díky němu lépe zvládali problematiku matematické analýzy a její aplikaci ve studijním oboru Matematické biologie.

Literatura:

- [1] HŘEBÍČEK J., POSPÍŠIL Z., URBÁNEK J. *Úvod do matematického modelování s využitím Maple*. CERM, Brno 2010, 120 s. ISBN 978-80-7204-691-1.
- [2] HŘEBÍČEK J., ŠKRDLA M. *Úvod do matematického modelování*. Masarykova univerzita, Brno, 2006, 83 s. [online]. Dostupný z: <https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Bi3101/um/skripta.pdf>

Poděkování: Tento článek vznikl za podpory projektu FRVŠ MŠMT České republiky 2785/2010 na rozvoj výuky předmětu Matematická analýza – cvičení s použitím Maple.

IMPLEMENTATION OF COMPUTER SIMULATION IN INDUSTRY

IMPLEMENTACE POČÍTAČOVÉ SIMULACE DO STROJÍRENSKÉ VÝROBY

Luděk Volf, Libor Beránek**

* Centrum pro jakost a spolehlivost výroby (CQR), Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Technická 4, 166 07 Praha
ludek.volf@fs.cvut.cz, libor.beranek@fs.cvut.cz

Abstract: *Computer simulation is one of the tools of the virtual factory. In manufacturing engineering simulation can be used for design and optimization of production processes and systems, mainly the reduction of production and investment costs, the ability to fulfill production plans, examining the effects of the proposed innovation, etc., generally for increasing the competitiveness of fully globalized field of mechanical engineering. In order to actually prove that these benefits be quantified and must be computer simulations of conceptual and successfully implemented into the manufacturing process. Experiences from this process are described in this paper.*

Keywords: *virtual factory, simulation, optimization, digital model, manufacturing process*

Abstrakt: *Počítačová simulace je jedním z nástrojů tzv. digitální továrny. Ve strojírenské výrobě můžeme simulaci využít jako jednoho z prostředků návrhu a optimalizace výrobních procesů a systémů, tedy především snižování výrobních a investičních nákladů, splnitelnosti výrobních plánů, prověřování vlivů zamýšlených inovací atd., obecně pro zvýšení konkurenceschopnosti podniků v již plně globalizované oblasti strojírenské výroby. Aby bylo možné uvedené přínosy skutečně prokázat a kvantifikovat, musí být počítačová simulace koncepčně a úspěšně implementována do výrobního procesu, čímž se zabývá tento příspěvek.*

Klíčová slova: *počítačová simulace, implementace, optimalizace, výrobní proces.*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/204

1. Úvod

V současnosti se problematika řízení a plánování výroby zaměřuje především na kusovou a malosériovou (případně sériovou) výrobu, která tvoří 60 – 70% celkového objemu výroby, kde je specifikem široký výrobní program s velkým počtem souběžně běžících zakázek. Že se jedná o nadmíru aktuální záležitost, potvrzuje široce se rozvíjející spolupráce průmyslové sféry s akademickou na intenzifikaci implementace principů a nástrojů konceptu digitální továrny do svých výrobních procesů a systémů, kteréžto nástroje mají samotné řízení a plánování výroby v jeho novém pojetí vůbec efektivně umožnit.

2. Simulace

Simulaci (z latinského simulō, napodobit) můžeme pro potřeby řešení úloh technologického projektování chápat jako proces inženýrského modelování systému (= výrobní proces nebo výrobní systém). Podle jedné z definic je **simulace** výzkumnou metodou,

jejíž podstata spočívá v nahrazení zkoumaného systému simulačním modelem, se kterým provádíme pokusy s cílem získat informace o původním zkoumaném systému.

Některé z důvodů užívání simulace:

- zkoumaný systém je natolik složitý, že neexistuje vhodná matematická metoda i formulace úlohy
- zkoumaný systém mění své vlastnosti příliš pomalu nebo příliš rychle
- zkoumaný systém by mohl při špatně zvoleném experimentu způsobit katastrofu sám sobě nebo svému okolí, přičemž nebezpečí takového experimentu nelze předem odhadnout
- se zkoumaným systémem lze těžko nebo vůbec manipulovat (ekonomické systémy), nelze s ním tedy experimentovat nebo jsou takové experimenty příliš nákladné

Pro využití simulačních metod mluví možnost komplexně zachytit **dynamické** (s časem proměnné) a **stochastické** (náhodné) **vady v systému**, možnost experimentovat tak, jak by to v realitě nebylo možné z různých důvodů (nákladnost, nebezpečnost, zdoluhavost, neexistence reálného systému) a možnost experimentovat v kontrolovatelně se měnících podmínkách.

Širší praktické nasazení simulace do výrobního procesu bylo možné až s rozvojem výpočetní techniky v devadesátých letech minulého století z důvodu potřeby pracovat s velkými objemy 2D a 3D dat, nejlépe v reálném čase a to jak při tvorbě simulačních modelů, přípravě experimentů, tak jejich běhu a následném vyhodnocování.

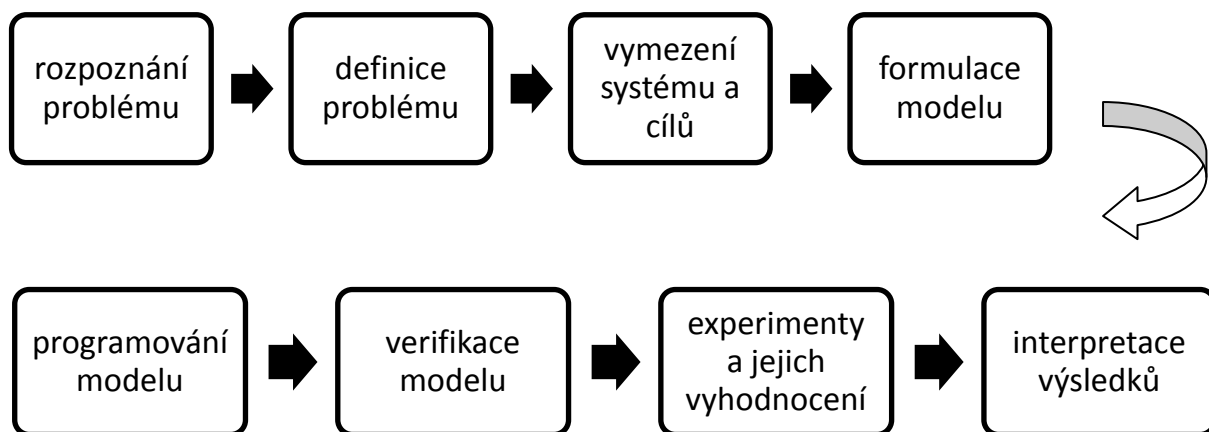
3. Simulační model

Simulační model je dynamický systém, v němž nastávají události a stavy jako ve zkoumaném (simulovaném) systému, a to ve stejném pořadí, avšak v jiných časových okamžicích. Ve strojírenské výrobě využíváme nejčastěji diskrétní modely, ve kterých se hodnoty proměnných mění nespojitě, po skocích v určitých časových intervalech.

Z hlediska vlastností dynamického systému dále rozlišujeme modely deterministické (hodnoty proměnných jsou v každém okamžiku přesně definovány, při stejných podmínkách jsou výsledky simulace stejné, do modelu nejsou zahrnuty náhodné veličiny) a stochastické (zkoumaný problém nebo metoda řešení mají náhodný charakter, proměnné se chovají náhodně podle určené pravděpodobnosti).

4. Tvorba simulačního modelu

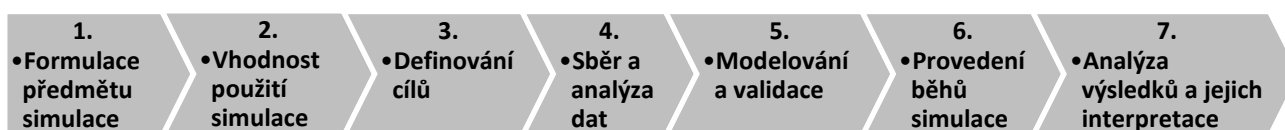
Postup tvorby simulačního modelu nazýváme modelováním (Obr. 1). Simulační model tvoříme (modelujeme) pro dosažení určitých cílů, kterými může být zodpovězení otázek z oblastí prověřování vlivu zamýšlených inovací, hledání vhodných pravidel řízení, posuzování a nalézání vhodné sortimentní struktury výrobků, prověřování splnitelnosti výrobních plánů, zvyšování průchodnosti výroby s minimálním stavem zásob a provozními náklady, plánování reorganizací, odstávek, údržby, výměn strojů a využití pracovních sil, rozhodování o investicích atd.



Obr. 1. Postup tvorby simulačního modelu

5. Implementace počítačové simulace

Implementací chápeme zapojení počítačové simulace a simulačního modelu do rozhodovacích strategických, taktických i operativních rozhodovacích procesů výrobní společnosti. Hlavním cílem implementace by obecně mělo být poskytování informací pro kvalifikovaný zásah do výrobního procesu.



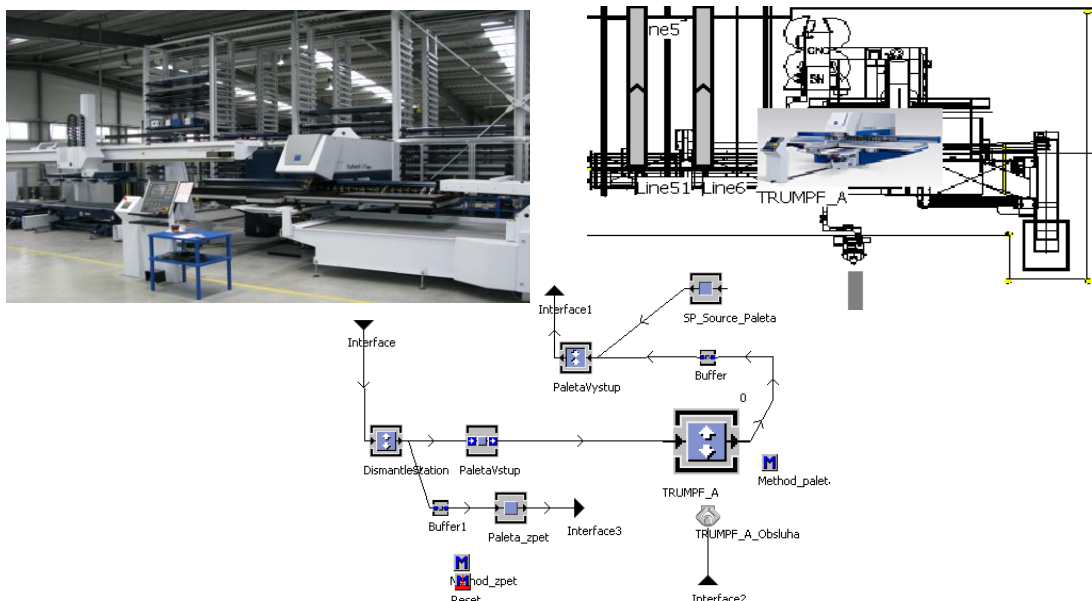
Obr. 2 Fáze postupu implementace počítačové simulace

Na Obr. 2 jsou znázorněny jednotlivé fáze postupu implementace, jejichž nesprávné pořadí nebo vypuštění vede vždy k rozpadu implementačního procesu a nesprávným výsledkům.

- 1. Formulace předmětu simulace = vymezení výrobního profilu (stroje) a výrobního programu (výrobní představitelé), obecné zmapování výrobních postupů a toku materiálu
- 2. Vhodnost použití simulace = pokud nelze pro popis výrobního systému použít exaktního analytického matematického modelu, např. vzhledem ke stupni složitosti výrobního procesu, šířce výrobního programu a vysokému stupni proměnných, volíme simulační modelování
- 3. Definování cílů = kritická fáze modelování, při které nesmí dojít k rozdrobení cílů na velký počet detailů. Každá společnost má svůj vlastní soubor cílů, kterých chce dosahovat. Obvykle se tento soubor sestává z hlavního cíle (například ziskovost), a dále z množství dílčích cílů, které se navzájem ovlivňují. Hlavními cíli mohou být minimalizace výrobních (procesních) časů a objemu rozpracované výroby, maximalizace využití strojního vybavení a jejich obsluhy.

- 4. Sběr a analýza dat = fáze implementace, která je časově nejnáročnější (až 60% celkového času implementace). Na rozdíl od uklidněné a jasně popsané velkosériové výroby je u kusového a malosériového typu výroby značná nejistota u získaných dat společností, které jim sami mnohdy ne zcela nedůvěřují. Běžně je velká část informací zcela nedostupná (přeseřizovací časy strojů, poruchovost, doba transportu, počet palet, počet výrobků na paletách). Tato fáze přináší společnosti užitek už svým průběhem bez návaznosti na implementaci, čistě pro pořádek v technologických postupech, pracovních povinnostech obsluhy strojů a logistice.
- 5. Modelování a validace = na základě analýzy hmotného, časového a procesního toku výrobním systémem společnosti je ve vhodném softwaru vytvořen hierarchicky strukturovaný digitální model stávajícího stavu výrobního systému. Digitální model je naplněn reálnými údaji výrobních podmínek, plně obsahuje procesní vazby mezi jednotlivými částmi výrobního systému, vycházející z výrobních postupů zvolených výrobních představitelů, pro které je následně validován například porovnáním směnových výkonových parametrů (výrobnost).
- 6. Provedení běhů simulace = konstrukce řady experimentů, zaměřených na cíle implementace z fáze č. 3. Při simulačním běhu je nutné brát na zřetel stav rozpracované výroby (ne vždy začíná experiment se zcela prázdným výrobním systémem) a především dobu náběhu výroby, tedy počkat na stabilizování sledovaných parametrů vhodně zvolenou dobu (v krajních časech běhu simulace jsou některé nástroje, jako je např. sledování spotřeby směnového času, zcela nepoužitelné).
- 7. Analýza výsledků a jejich interpretace = fáze implementace, ve které zástupci jednotlivých výrobních oddělení zhodnotí výsledky simulačních experimentů, zpětnovazebně provedou návrhy optimalizace modelu a po jejich ověření pozitivní výsledky přenesou do reálného výrobního systému a ověří.

Teprve fyzickým přenesením výsledů simulačních experimentů do reálného výrobního systému a zafixování tohoto postupu jako běžné praxe při řízení výroby můžeme prohlásit implementaci počítačové simulace za ukončenou. Jakmile se podaří přijmout simulaci zamýšlených zásahů do výrobního systému jako automatické ověření těchto zásahů před jejich realizací, stává se počítačová simulace integrovanou součástí řídicích procesů společnosti a teprve tehdy můžeme její implementaci označit jako úspěšně ukončenou.



Obr. 3 Ukázka hierarchické tvorby modelu (vlevo nahoře reálné pracoviště, vpravo nahoře vizualizace pracoviště v modelu, dole detail modelu pracoviště)

6. Závěr

Implementace počítačové simulace do kusové a malosériové strojírenské výroby je složitý proces skládající se z několika fází, jehož věrohodné přínosy jsou závislé především na věrohodnosti vstupních dat. Po úspěšné validaci digitálního modelu a přenesení výsledků optimalizačních experimentů do reálného výrobního procesu se počítačová simulace může stát velmi mocným nástrojem pro efektivní výkon řídicích procesů společnosti.

Literatura

- [1] KIMURA, Fumihiko ; MITSUISHI, Mamoru ; UEDA, Kanji . *Manufacturing Systems and Technologies for the New Frontier : The 41st CIRP Conference on Manufacturing Systems May 26-28, 2008, Tokyo, Japan* [online]. London: Springer, 2008 [cit. 2010-10-24]
- [2] Digitov [online]. 2008 [cit. 2010-09-22]. Digitální továrna. Dostupné z WWW: <http://www.digitov.zcu.cz/digitalni_tovarna.php>.
- [3] Designtech [online]. 2006 [cit. 2010-09-22]. Navrh-robotizovanych-pracovist. Dostupné z WWW: <<http://www.designtech.cz/c/plm/navrh-robotizovanych-pracovist-1-dil.htm>>
- [4] BRAZ, José; ARAÚJO, Helder; VIEIRA, Alves. *Informatics in control, automation and robotics I* [online]. Dordrecht, The Netherlands : Springer, 2006 [cit. 2010-10-21].
- [5] Cameron, I.T., Ingram, G.D.: *A survey of industrial process modelling across the product and process lifecycle*. Computers and Chemical Engineering, Volume 32, 2008. p. 420-438

FUZZY REGRESSION

FUZZY REGRESE

Libor Žák

Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické Brno
Technická 2896/2, 616 69 Brno
zak.l@fme.vutbr.cz

Abstract: *This article deals with using the fuzzy expert system to describe dependence of measured values. The reason of such approach is the possibility of use of vague notions which can better describe process (it can be too complex internally or the human aspect exercises here). A properly defined and trained fuzzy expert system can estimate resulting dependences among measured values. This dependence can be the other dependence searching initial solution.*

Keywords: *regrese, fuzzy set, Fuzzy Inference System*

Abstrakt: *Článek se zabývá možností využití fuzzy expertního systému pro popis závislosti naměřených hodnot. Důvodem tohoto přístupu je možnost využití vágních pojmů, které lépe vystihují průběh procesu, jehož popis může být příliš složitý, nebo se v procesu výrazně uplatňuje lidský aspekt. Správně definovaný a odladěný fuzzy expertní systém může odhadnout výsledné závislosti mezi naměřenými daty. Tato závislost může být počátečním řešením pro další hledání závislosti.*

Klíčová slova: *regrese, fuzzy množina, Fuzzy Inference Systém*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/209

1. Úvod

Fuzzy Inference System (FIS) jsou jednou z častých aplikací fuzzy množin v praxi. Jejich využití je vhodné zejména při modelování neurčitých systémů, kde se předpokládá vliv veličiny, kterou nelze přesně definovat pomocí klasické matematické logiky a konvenčních prostředků systémové analýzy, tj. například diferenciálních nebo diferenčních rovnic nebo nástroji matematické statistiky. Takovým systémem může být i výrobní proces. Výroba může být ovlivňována množstvím parametrů, které nelze jednoznačně vyjádřit. Pro zkoumání kvality výrobku je potřeba najít vztah mezi parametry ovlivňujícími výrobu a konečnými vlastnostmi výrobku. Kromě analytických metod se v poslední době využívají také neuronové sítě a metody založené na fuzzy množinách. Tento článek se zabývá aplikací fuzzy množin a zvláště pak FIS. Pomocí odladěného FIS nad naměřenými daty lze odhadnout jejich závislosti, které mohou být výchozím řešením pro podrobnější vyšetřování buď nástroji regresní analýzy nebo jinými metodami.

2. Proč právě Fuzzy Inference System

Důvodem je pojem fuzzy. V řadě případů jsou parametry, které ovlivňují vlastnosti procesu a tím i vlastnosti výsledného výrobku, popsány pomocí přibližných nebo zjednodušených pojmů. Při výrobě předpokládáme, že materiál do ní vstupující má předepsanou kvalitu. V mnoha případech ale nelze v různých etapách výroby dodržet přesně daný parametr. Příkladem může být tloušťka vlákna, která kolísá v určitém rozmezí, nebo hrubost šterku u betonových směsí. Tedy parametry materiálu vstupujícího do výroby nelze (v těchto

případech) popsat číselně, ale musíme použít vágnější popis. Právě užití fuzzy množin je pro popis a práce s těmito vágními výrazy výhodné. Máme-li nezávislé i závislé veličiny popsány vágními výrazy, lze využít těchto výrazů a najít vztah mezi nimi ve formě přibližného uvažování. Právě Fuzzy Inference System je uvažován jako systém pravidel přibližného uvažování. Pokud máme k dispozici pouze data a nemáme další informace o procesu, lze nad daty najít pomocí iteračního procesu vhodné tvary pravidel popisujících vztah mezi vstupními a výstupními veličinami.

3. Fuzzy množina, fuzzy relace, Fuzzy Inference System

Použitý fuzzy přístup vychází z Fuzzy Inference Systemu (dále jen FIS), který je založen na pojmech fuzzy množina a fuzzy relace, jež byly definovány Lotfi A. Zadehem v roce 1965 (viz [7]). Pro nalezení závislosti naměřených dat využijeme FIS, který pracuje na základě znalostních pravidel. Tato pravidla jsou definována kombinací vzorových vstupů a výstupů. Vzorové vstupy a výstupy se definují pomocí tzv. jazykových proměnných a jejich hodnot. U jazykových hodnot se definuje jejich význam, který je popsán fuzzy množinou. Vhodné kombinace vstupních a výstupních jazykových hodnot definují znalostní pravidla, podle kterých FIS počítá. V teorii fuzzy množin lze FIS považovat za fuzzy relaci.

Při hledání vhodného FIS jsme použili typ **Mamdani** (viz [5]). (který odpovídá předcházejícímu popisu) a také typ **Sugeno** (viz [6]), který má výstupní veličiny ve tvaru konstant nebo lineárních funkcí.

3.1. Fuzzy množina, fuzzy relace

Fuzzy množinou A se rozumí dvojice (U, μ_A) , kde U je univerzum a $\mu_A: U \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je funkce popisující příslušnost prvků z U do fuzzy množiny A . Tuto příslušnost označíme $\mu_A(x)$. Fuzzy množina je zobecněním „klasické“ množiny, neboť pro příslušnost v případě „klasické“ množiny A platí $\mu_A: U \rightarrow \{0,1\}$ a $x \in A \Leftrightarrow \mu_A(x) = 1$ a $x \notin A \Leftrightarrow \mu_A(x) = 0$. Fuzzy množina se nazývá **normální**, pokud existuje $\underline{x} \in U$, pro který platí $\mu_A(\underline{x}) = 1$. $\text{Hgt}(A) = \sup\{\mu_A(x), x \in U\}$ se nazývá výška fuzzy množiny.

Nechť $U_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou univerza. Pak **fuzzy relací** R na $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ (kde $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ je kartézský součin množin) se rozumí fuzzy množina R nad univerzem U . (viz [1], [3], [7]).

V některých aplikacích se požaduje nahrazení fuzzy množiny číslem z příslušného univerza. Tento proces se nazývá defuzzikace. Existuje více metod určení tohoto čísla. Nejčastěji používané metody jsou podobné určování charakteristiky spojitě náhodné proměnné. Nechť $A = (U, \mu_A)$ je fuzzy množina, příslušnou defuzzikační hodnotu označíme $\text{defuzz}(A)$ ($\text{defuzz}(A) \in U$).

3.2 Fuzzy Inference System (FIS)

Každý FIS se skládá ze vstupních a výstupních proměnných a z pravidel FIS. U FIS zadáváme

- počet vstupních a výstupních proměnných,
- pro každý vstup a výstup počet předdefinovaných hodnot (jazykových hodnot) a jejich význam ve tvaru fuzzy množiny,
- pravidla FIS popsaná s pomocí předdefinovaných hodnot.

Při použití FIS porovnáváme libovolný vstup do FIS s předdefinovanými vstupními hodnotami. Na základě tohoto porovnání a pomocí pravidel FIS dostaneme výstup FIS ve tvaru fuzzy množiny. Pokud má být výstupem reálná hodnota, provede se defuzzikace.

Pro hledání závislosti výstupních veličin na vstupních u neznámého procesu se častěji používá FIS Sugeno, který je modifikací FIS Mamdani. K nalezení příslušného FIS využíváme data, která tvoří vstupní a výstupní hodnoty procesu. Ve většině případů tyto hodnoty tvoří podmnožinu reálných čísel a tedy vstupy a výstupy jsou v číselném tvaru.

3.2.1. Fuzzy Inference System typu Mamdani

FIS Mamdani lze uvažovat jako fuzzy relaci, která po složení se vstupními hodnotami dává výsledné hodnoty. Necht' $U_i = (U_i, T(U_i), U_i, G, M)$, $i = 1, \dots, n$ jsou vstupní jazykové proměnné a $V = (V, T(V), V, G, M)$ výstupní jazyková proměnná, kde U_i, V jsou názvy proměnných, $T(U_i), T(V)$ množina jazykových hodnot, U_i, V příslušná univerza, G gramatika a M význam jazykových hodnot (funkce, která každé jazykové hodnotě přiřadí fuzzy množinu). FIS uvažujeme jako výrok typu:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \text{ jinak } \mathfrak{R}_2 \text{ jinak } \dots, \text{ jinak } \mathfrak{R}_p,$$

kde $\mathfrak{R}_k$, $k = 1, \dots, p$ jsou pravidla ve tvaru:

$$\mathfrak{R}_k = \text{jestliže } U_1 \text{ je } X_{U_1,k} \text{ a } U_2 \text{ je } X_{U_2,k} \text{ a } \dots \text{ a } U_n \text{ je } X_{U_n,k}, \text{ pak } V \text{ je } Y_{V,k},$$

kde $X_{U_i,k} \in T(U_i)$, $Y_{V,k} \in T(V)$ $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall k = 1, \dots, p$ jsou příslušné jazykové hodnoty.

Význam výroku $\mathfrak{R}$ označíme R : $R = M(\mathfrak{R})$. $M(\mathfrak{R})$ je fuzzy relace nad $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times V$ definovaná:

$$R = M(\mathfrak{R}) = \bigcup_{k=1}^p M(\mathfrak{R}_k),$$

kde *jinak* je uvažováno jako sjednocení a $M(\mathfrak{R}_k)$ je definováno ve tvaru kartézského součinu fuzzy množin:

$$M(\mathfrak{R}_k) = M(X_{U_1,k}) \times M(X_{U_2,k}) \times \dots \times M(X_{U_n,k}) \times M(Y_{V,k}),$$

kde $M(X_{U_i,k})$, $M(Y_{V,k})$ $\forall i = 1, \dots, n$ jsou významy příslušných jazykových hodnot - fuzzy množiny nad univerzou U_i , $\forall i = 1, \dots, n$ a V s funkcí příslušnosti $\mu_{U_i,k}(x)$ a $\mu_{V,k}(y)$.

Jako vstupy do FIS budeme uvažovat libovolnou fuzzy množinu A_{U_i} nad univerzem U_i . Pak velikost akční veličiny B_V je dána výrazem $B_V = (A_{U_1} \times A_{U_2} \times \dots \times A_{U_n}) \circ R$. Výsledná fuzzy množina B_V je složení fuzzy relace $(A_{U_1} \times A_{U_2} \times \dots \times A_{U_n})$ nad univerzem $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ s relací R definovanou nad univerzem $U_1 \times \dots \times U_n \times V$ a tedy výsledkem tohoto složení je fuzzy množina nad univerzem V .

3.2.2 Fuzzy Inference System typu Sugeno (Takani – Sugeno)

Pokud nemáme dostatek znalostí o fungování zkoumaném procesu (tj. nelze sestavit pravidla FIS), ale máme k dispozici větší počet vstupních a výstupních dat procesu, můžeme použít modifikaci FIS Mamdani - FIS Sugeno (FIS Takani-Sugeno). Tento FIS je popsán pomocí vhodných parametrů, které jsou nastaveny v průběhu ladění na známých datech.

Necht' $U_i = (U_i, T(U_i), U_i, G, M)$, $i = 1, \dots, n$ jsou vstupní jazykové proměnné. V je název výstupní jazykové proměnné definované nad univerzem V . Nejsou zde zadány jazykové hodnoty. FIS uvažujeme jako výrok typu:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \text{ jinak } \mathfrak{R}_2 \text{ jinak } \dots, \text{ jinak } \mathfrak{R}_p,$$

kde $\mathfrak{R}_k$, $k = 1, \dots, p$ jsou pravidla ve tvaru:

$$\mathfrak{R}_k = \text{jestliže } U_1 \text{ je } X_{U_1,k} \text{ a } U_2 \text{ je } X_{U_2,k} \text{ a } \dots \text{ a } U_n \text{ je } X_{U_n,k}, \text{ pak } V = f_k,$$

kde f_k je předem zvolená fuzzy funkce pro n nezávislých proměnných ($f_k: F(U_1) \times \dots \times F(U_n) \rightarrow F(V)$, $F(U_i)$, $F(V)$ jsou množina všech fuzzy množin nad univerzou U_i a V). Ve většině FIS typu Sugeno se funkce f_k definují v konstantním tvaru:

$$f_k(A_1, \dots, A_n) = \alpha_k,$$

nebo v lineárním tvaru:

$$f_k(A_1, \dots, A_n) = \alpha_k + \beta_{k,1}A_1 + \beta_{k,2}A_2 + \dots + \beta_{k,n}A_n.$$

kde α_j , β_{ij} $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ jsou vhodné konstanty. Tyto konstanty se často upřesňují až v procesu ladění FIS nad ladicími daty.

Jako vstupy do FIS budeme uvažovat libovolnou fuzzy množinu A_{U_i} nad univerzem U_i . Pak reakce k -tého pravidla FIS na vstup $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ (akční veličina) je fuzzy množina nad univerzem V , kterou získáme z fuzzy množiny $f_k(A_{U_1}, \dots, A_{U_n})$, která je ohraničená výškou, jež vyjadřuje míru shody vstupu $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ s předdefinovanými hodnotami v k -tém pravidle $(X_{U_1,k}, X_{U_2,k}, \dots, X_{U_n,k})$. Tuto míru shody označíme w_k :

$$w_k = \min\{\text{Hgt}(A_{U_1} \cap M(X_{U_1,k})), \dots, \text{Hgt}(A_{U_n} \cap M(X_{U_n,k}))\}.$$

Označme fuzzy množinu $W_k = (V, \mu_{W_k}(y))$, kde $\mu_{W_k}(y) = w_k \forall y \in V$. Tedy reakce k -tého pravidla FIS na vstup $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ je fuzzy množina $f_k(A_{U_1}, \dots, A_{U_n}) \cap W_k$. Reakce FIS na vstupy $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ je sjednocení fuzzy množin z jednotlivých pravidel.

Ve většině případů je po FIS Sugeno požadován číselný výstup. Necht' univerza U_i a V jsou podmnožinou reálných čísel. Pak reakce k -tého pravidla FIS na vstupy $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ (akční veličina) je **hodnota** z univerza V :

$$y_k = \text{defuzz}(f_k(A_{U_1}, \dots, A_{U_n}) \cap W_k).$$

Pokud je f_k v konstantním nebo lineárním tvaru, lze pro urychlení výpočtu v některých případech použít tvar:

$$y_k = f_k(\text{defuzz}(A_{U_1}), \dots, \text{defuzz}(A_{U_n})),$$

kde f_k je příslušná reálná funkce n reálných proměnných. Reakce FIS na vstupy $(A_{U_1}, A_{U_2}, \dots, A_{U_n})$ je vážený průměr z hodnot y_k s váhou w_k . Váha w_k pro výše popsané pravidlo je ve tvaru:

$$w_k = \min\{\text{Hgt}(A_{U_1} \cap M(X_{U_1,k})), \dots, \text{Hgt}(A_{U_n} \cap M(X_{U_n,k}))\}.$$

Pokud je vstup v číselném tvaru, pak reakce k -tého pravidla FIS na vstupy $(a_1, \dots, a_n)$ (akční veličina) je **hodnota** z univerza V : $y_k = f_k(a_1, \dots, a_n)$ a reakce FIS na vstupy $(a_1, \dots, a_n)$ je vážený průměr z hodnot y_k s váhou $w_k = \min\{\mu_{U_1,k}(a_1), \dots, \mu_{U_n,k}(a_n)\}$.

3.2.3 Hledání vhodných konstant α_j , β_{ij}

Předpokládejme, že počet vstupních a výstupních proměnných, které popisují daný proces, je určen. Každou vstupní a výstupní proměnnou popíšeme jazykovou proměnnou a ke každé jazykové proměnné musíme určit počet jazykových hodnot a jejich význam (fuzzy množiny). Zde se vychází ze zadaných dat. Data je vhodné rozdělit na ladicí a testovací část. Najdeme takový FIS, který co nejlépe odpovídá ladicí části dat. Ladicí část dat se rozdělí do menších částí a ke každé části se přiřadí jazyková hodnota vstupu (u výstupu nemusíme, neboť hledáme FIS Sugeno) a pravidla, která popisují závislost mezi příslušnými vstupy a výstupy. Používají se dva základní způsoby dělení dat:

- rozdělení oblasti (která zahrnuje ladicí data) na menší části, každé části se přiřadí fuzzy množina a jejich kombinací se vytvoří pravidla,
- využití shlukovací metody pro nalezení shluků v datech a pro každý shluk se vytvoří jazykové hodnoty a jedno pravidlo.

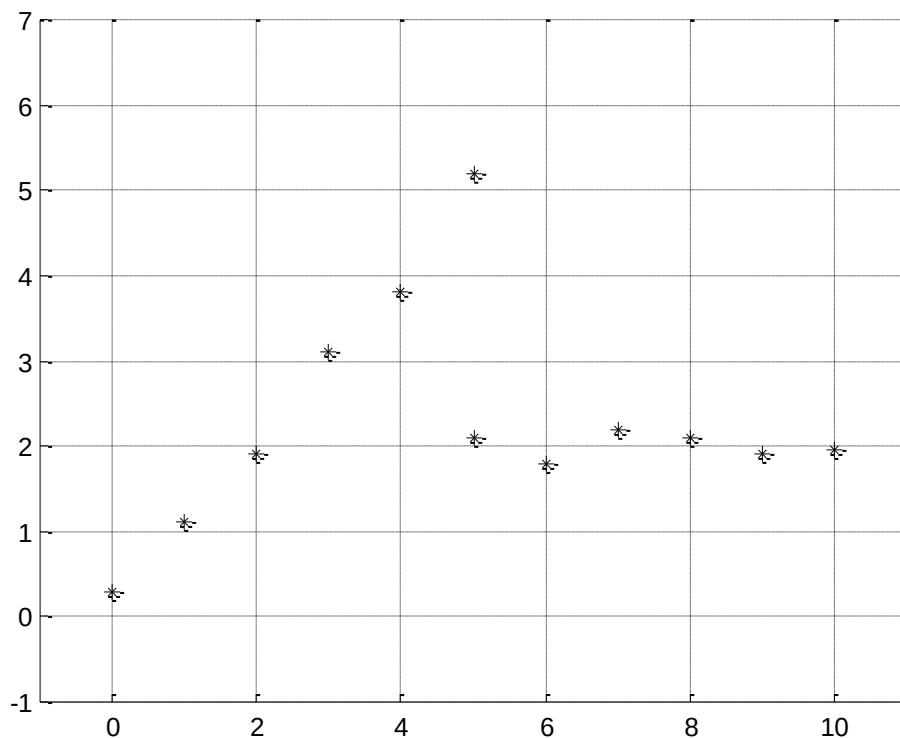
Po zvolení daného počtu jazykových hodnot (fuzzy množin) a po výběru pravidel se hledají vhodné parametry (α_j , β_{ij}) u výstupních veličin V . Tyto parametry se hledají většinou pomocí neuronové sítě (viz [2], [4]). Výsledkem ladění je takové nastavení parametrů, aby FIS co nejlépe popisoval zadaná ladicí data. Správnost se ověří výpočtem výstupních hodnot nad testovacími daty pomocí FIS a jejich porovnáním s původním výstupem testovací části dat. Návrh, odladění a výběr FIS byl prováděn v prostředí MATLAB (verze 5.3) – FuzzyToolbox.

4. Příklady

V následujících dvou příkladech ukážeme, jak se při ladění nastavují konstanty a jaký vliv to má na vypočtenou závislost.

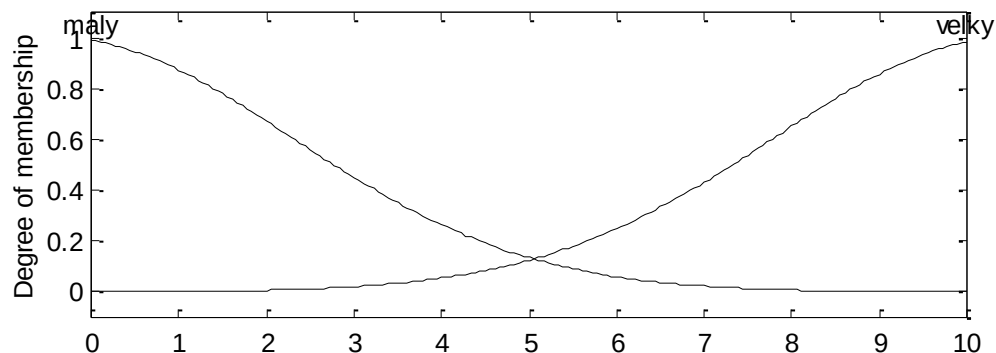
4.1. Příklad s jedním vstupem a jedním výstupem

V prvním příkladě ukážeme hledání závislosti při jednom vstupu (X) a jednom výstupu (Y). Mějme ladicí data zobrazená na obrázku. 1.



Obr. 1. Zadaná data pro příklad 4.1.

Vstupní data rozdělíme na dvě části. Pro vstupy s hodnotou ≤ 5 zvolíme jednu jazykovou hodnotu, kterou nazveme **malý**. Jazykovou hodnotu popisující vstupy s hodnotou >5 nazveme **velký**. Ke každé jazykové hodnotě musíme přiřadit její význam. Pokud nemáme další informace o procesu, ze kterého jsou data, tak význam nejčastěji vyjadřujeme ve tvaru Gaussovy křivky. Zvolme jejich význam ve tvaru fuzzy množin na obrázku 2.



Obr. 2. Zvolené jazykové hodnoty a jejich význam pro příklad 4.1.

Výstupní proměnnou zvolíme v lineárním tvaru. Dostaneme následující pravidla:

$\mathfrak{R}_1 = \text{jestliže } X \text{ je malý, pak } y_1 = f_1(x) = \alpha_1 + \beta_{1,1}x,$

$\mathfrak{R}_2 = \text{jestliže } X \text{ je velký, pak } y_2 = f_2(x) = \alpha_2 + \beta_{2,1}x,$

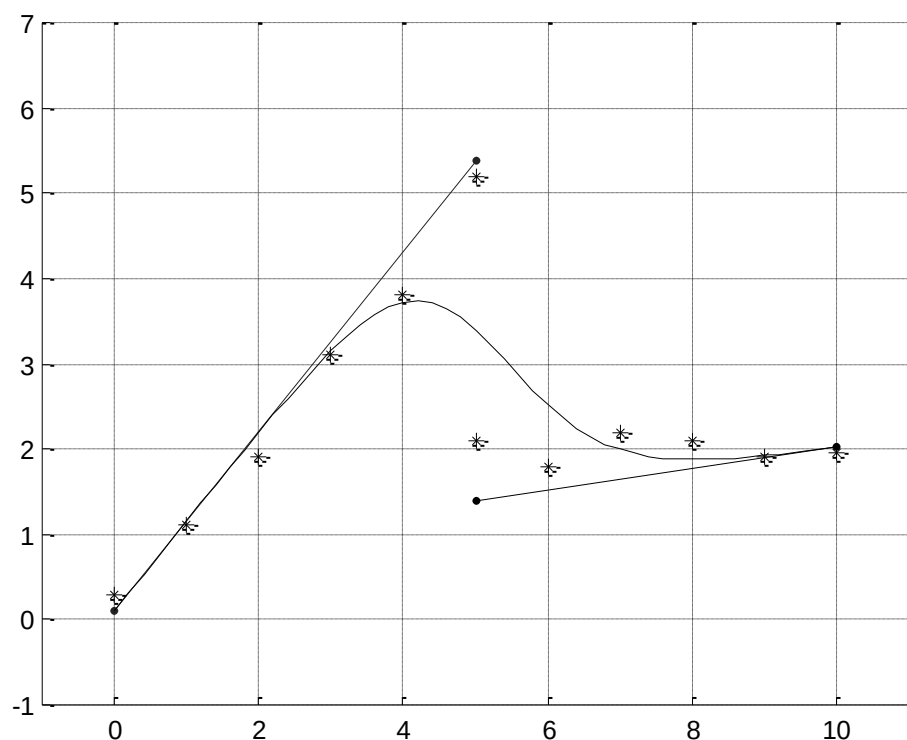
Na počátku ladění jsou konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{1,1}, \beta_{2,1}$ nastaveny na 0.

Po první iteraci dostaneme:

$\alpha_1 = 0.09846, \beta_{1,1} = 1.058,$

$\alpha_2 = 0.7747, \beta_{2,1} = 0.1242.$

Na obrázku 3 jsou zobrazeny lineární tvary (přímky) a výsledná závislost.



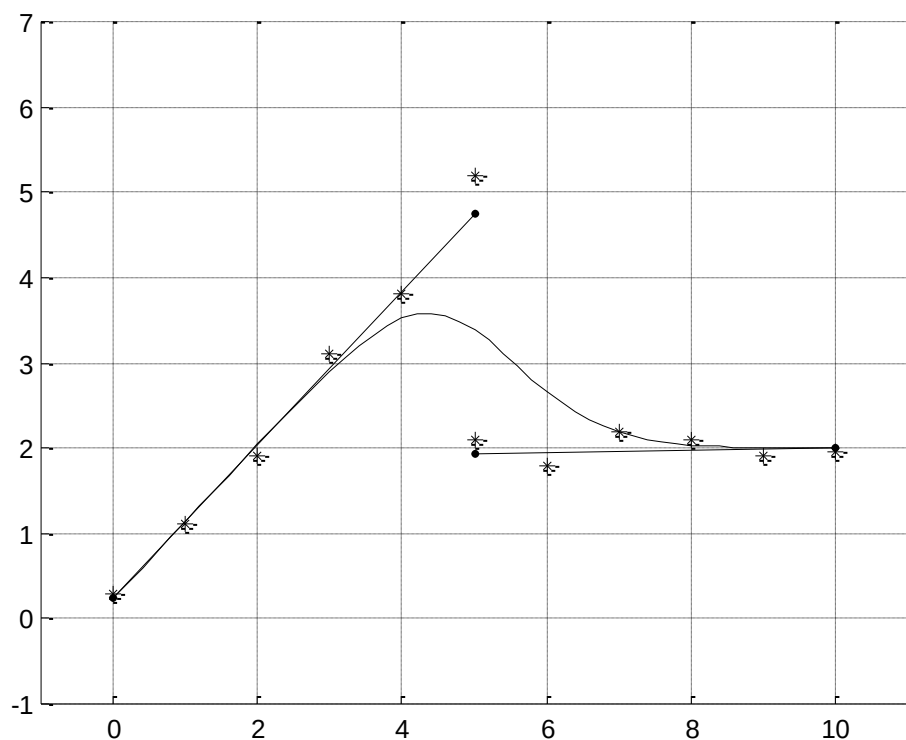
Obr. 3. Nalezená závislost u dat z příkladu 4.1. po první iteraci.

Po 100 iteracích dostaneme:

$$\alpha_1 = 0.2356, \beta_{1,1} = 0.9047,$$

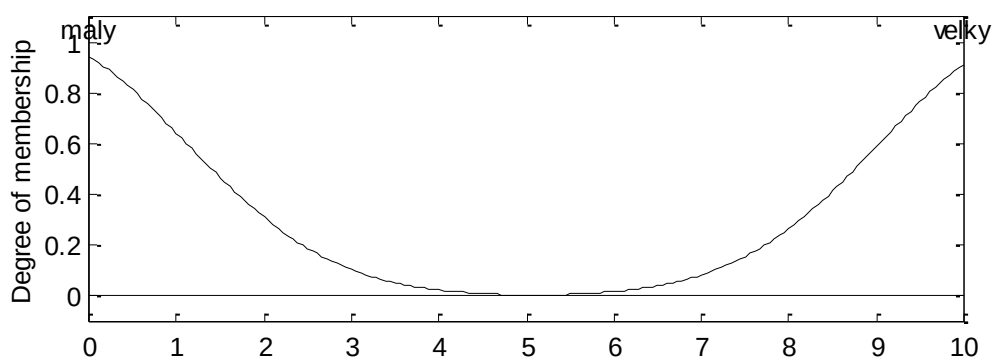
$$\alpha_2 = 1.839, \beta_{2,1} = 0.01671.$$

Na obrázku 4 jsou zobrazeny lineární tvary (přímky) a výsledné proložení.



Obr. 4. Nalezená závislost u dat z příkladu 4.1. po 100 iteracích.

Pokud v ladicím procesu umožníme i modifikaci parametrů, které popisují význam jazykové hodnoty, lze docílit většího přiblížení výsledné křivky k datům. Po 100 iteracích dostaneme význam jazykových hodnot (Obr. 5.)

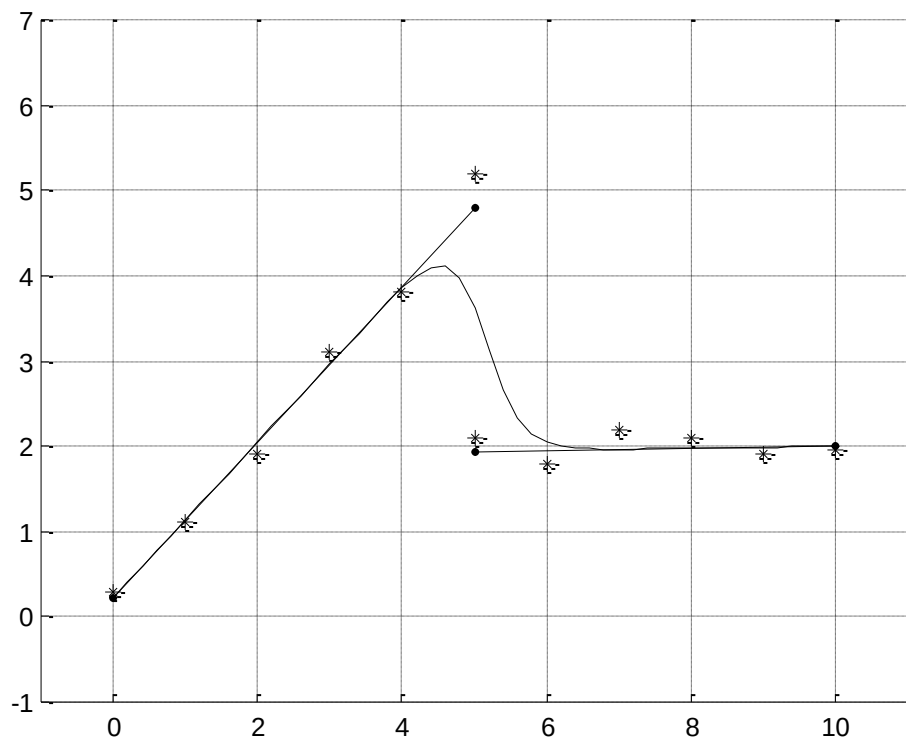


Obr. 5. Modifikace jazykových hodnot během iteračního procesu.

Těmto jazykovým hodnotám odpovídají lineární vztahy

$$\alpha_1 = 0.2373, \beta_{1,1} = 0.9053,$$

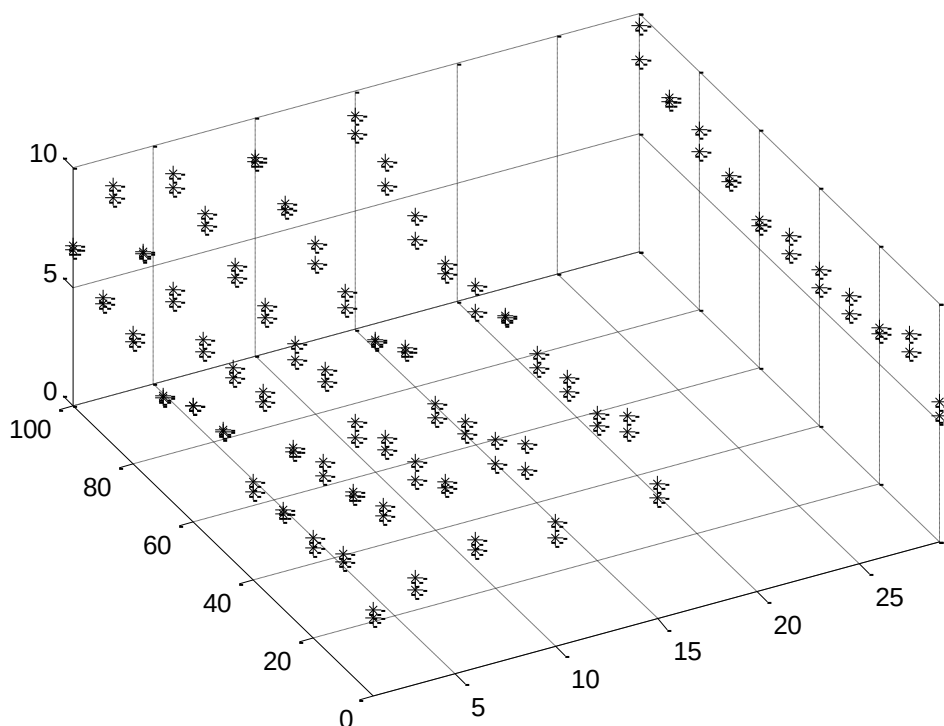
$$\alpha_2 = 1.887, \beta_{2,1} = 0.01621.$$



Obr. 6. Nalezená závislost u dat z příkladu 4.1. po 100 iteracích při modifikaci jazykových hodnot.

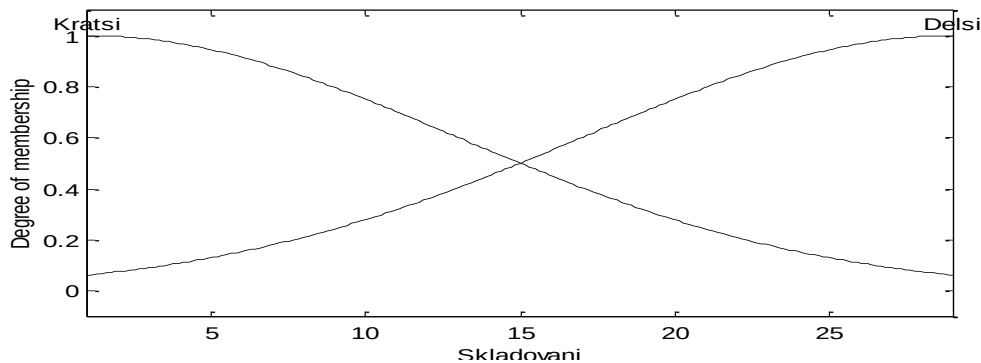
4.2. Příklad s dvěma vstupy a jedním výstupem

Další příklad uvedeme pro dva vstupy a jeden výstup. Data jsou z měření tvrdosti sýrů během zrání. Tvrdost sýrů se zkoumala v závislosti na poměru dvou fosforečnanů (0 -100 až 100 – 0 v procentech) a na době zrání sýrů (0 – 30 dnů). Pro každé nastavení vstupních proměnných se provedla dvě měření tvrdosti. Byla získána následující data (Obr 7.).

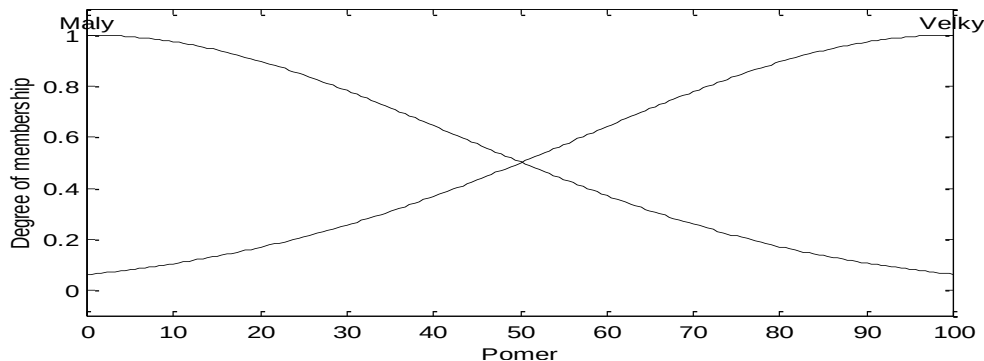


Obr. 7. Naměřená data pro příklad 4.2.

Dvě vstupní jazykové proměnné jsme nazvali *Skladování* a *Poměr* a výstupní proměnnou *Tvrdost*. Při hledání závislosti se data rozdělila na čtyři menší části. *Skladování* bude mít dvě nadefinované hodnoty : *kratší*, *delší* s významem popsáním Gaussovými křivkami (Obr.8) a *Poměr* bude mít také dvě nadefinované hodnoty : *malý*, *velký* (Obr.9.).



Obr. 8. Zvolené jazykové hodnoty pro *Skladování* a jejich význam.



Obr. 9. Zvolené jazykové hodnoty pro *Poměr* a jejich význam.

Výstup volíme opět v lineárním tvaru. Dostáváme tedy 4. pravidla:

$\mathfrak{R}_1 = \text{jestliže Skladování je Kratši a Poměr je Malý pak Tvrdost} = \alpha_1 + \beta_{1,1} x_1 + \beta_{1,2} x_2,$

$\mathfrak{R}_2 = \text{jestliže Skladování je Kratši a Poměr je Velký pak Tvrdost} = \alpha_2 + \beta_{2,1} x_1 + \beta_{2,2} x_2,$

$\mathfrak{R}_3 = \text{jestliže Skladování je Delší a Poměr je Malý pak Tvrdost} = \alpha_3 + \beta_{3,1} x_1 + \beta_{3,2} x_2,$

$\mathfrak{R}_4 = \text{jestliže Skladování je Delší a Poměr je Velký pak Tvrdost} = \alpha_4 + \beta_{4,1} x_1 + \beta_{4,2} x_2,$

Na počátku ladění jsou konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_{1,1}$, až $\beta_{4,2}$ nastaveny na 0.

Po první iteraci dostaneme:

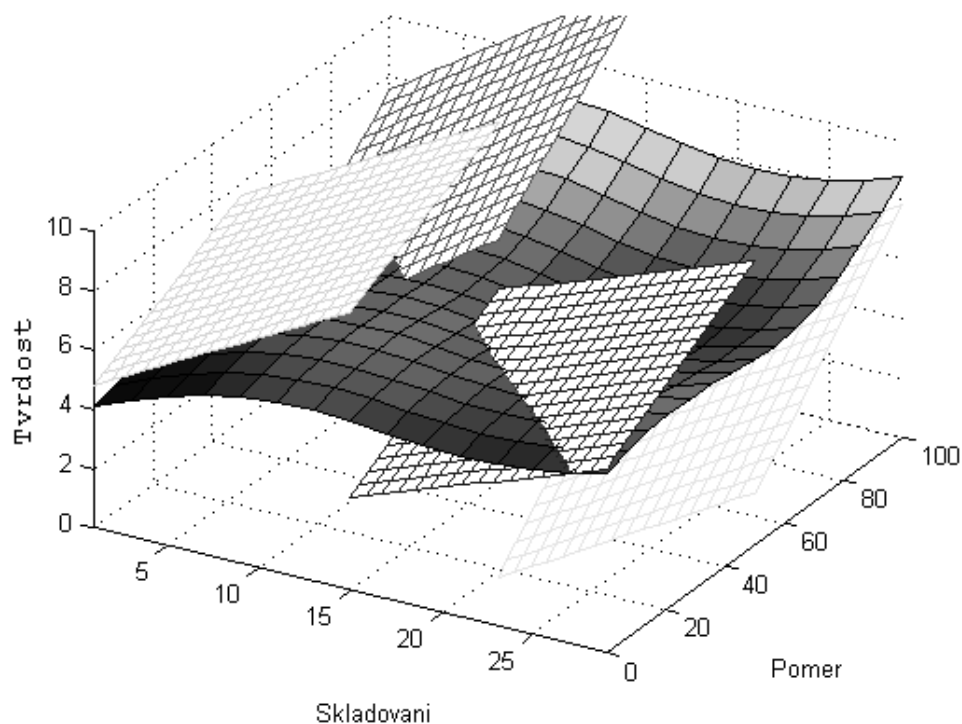
$\alpha_1 = 4.511, \beta_{1,1} = 0.05538, \beta_{1,2} = 0.325$

$\alpha_2 = -3.1, \beta_{2,1} = 0.1021, \beta_{2,2} = 0.4125$

$\alpha_3 = -0.125, \beta_{3,1} = 0.06777, \beta_{3,2} = 0.2171$

$\alpha_4 = -14.65, \beta_{4,1} = 0.1223, \beta_{4,2} = 0.3544$

Příslušné lineární tvary (roviny) a výsledná plocha je zobrazena na obrázku 10.



Obr. 10. Nalezená závislost u dat z příkladu 4.2. po první iteraci.

Po první iteraci dostaneme:

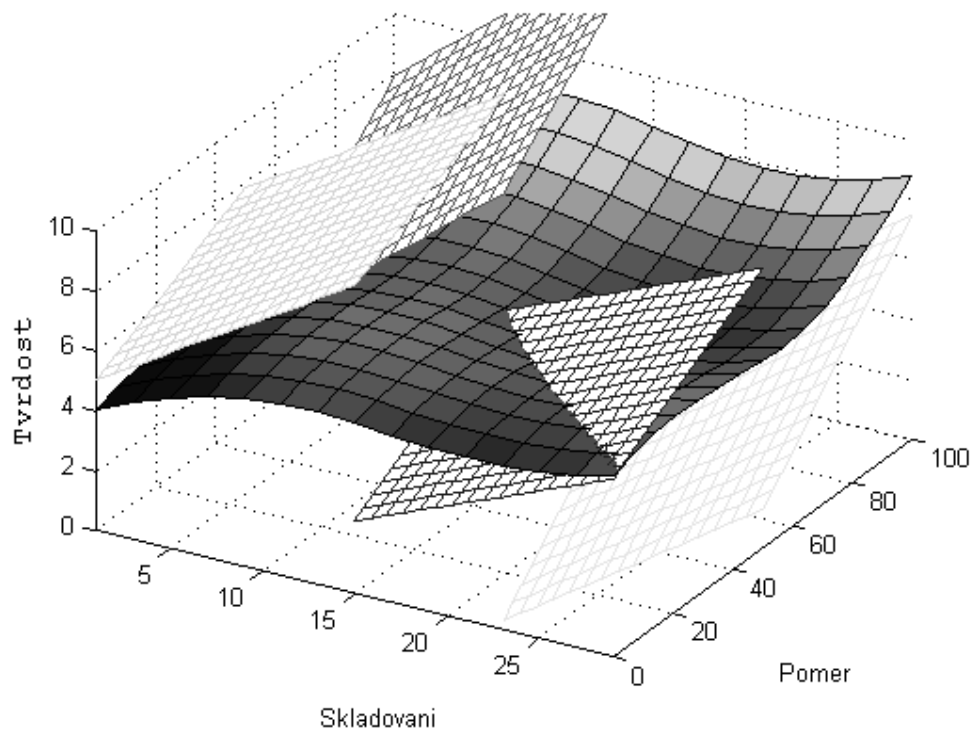
$$\alpha_1 = 4.681, \beta_{1,1} = 0.05542, \beta_{1,2} = 0.3737$$

$$\alpha_2 = -2.761, \beta_{2,1} = 0.102, \beta_{2,2} = 0.4946$$

$$\alpha_3 = -1.311, \beta_{3,1} = 0.06803, \beta_{3,2} = 0.2496$$

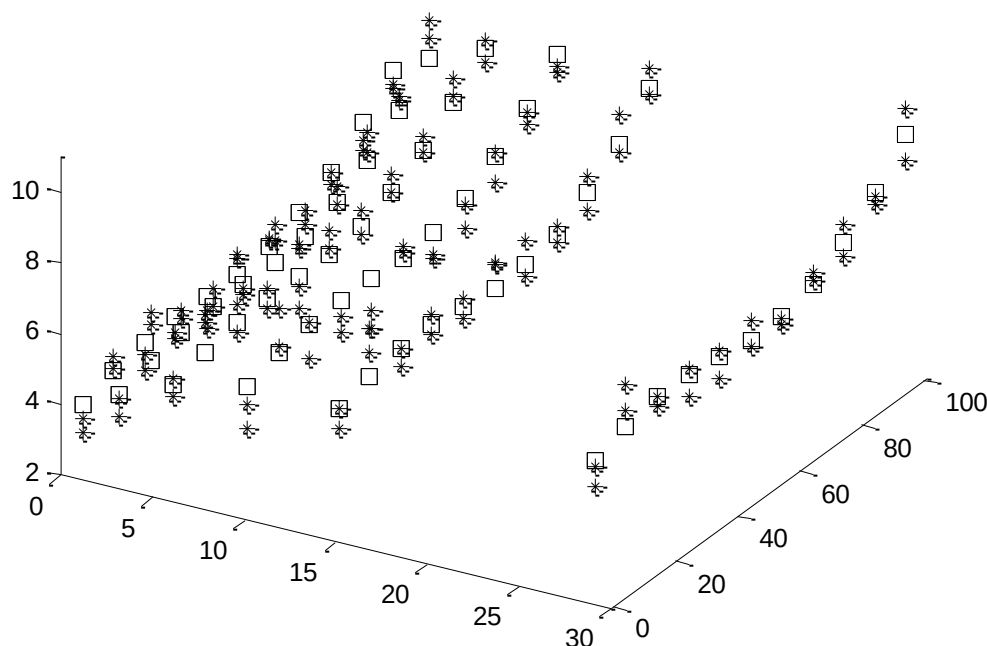
$$\alpha_4 = -16.94, \beta_{4,1} = 0.1234, \beta_{4,2} = 0.4152$$

Příslušné lineární tvary (roviny) a výsledná plocha je zobrazena na obrázku 11.



Obr. 11. Nalezená závislost u dat z příkladu 4.2. po 100 iteracích.

Na následujícím obrázku jsou naměřené hodnoty spolu s počítanými hodnotami tvrdosti (čtvereček)



Obr. 12. Porovnání naměřených (hvězdička) a spočtených (čtvereček) hodnot.

5. Závěr

Použití fuzzy regrese je výhodné v případě procesů (dat), o kterých nemáme žádné další informace. Fuzzy regrese nám ukáže možné závislosti, z kterých je pak vhodné vycházet při podrobnějším zkoumání procesu. Tento přístup má výhodu v tom, že může pracovat s vágními daty. Další výhodou je, že FIS je založen na fuzzy pravidlech a není tak (na rozdíl od neuronových sítí) „černou skříňkou“, tedy při zpětném pohledu na odladěné FIS a jejich pravidla (nalezené konstanty u lineárních tvarů) lze odhadnout možné vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami.

Při hledání je potřeba vhodně zvolit nastavení FIS. Zvláště se jedná o počty jazykových hodnot a tvorbu pravidel. Pokud se zvolí malý počet jazykových hodnot, je FIS hrubý a nevystihuje jemnější závislosti. Pokud se zvolí velký počet jazykových hodnot, je FIS citlivý na malé odchylky a nepřesnosti.

Literatura

- [1] Dubois, D. and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [2] Jang, J.-S. R. and C.-T. Sun, *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*, Prentice Hall, 1997.
- [3] Kaufmann, A. and M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic*, V.N. Reinhold, 1985.
- [4] Lee, C.-C., "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller-parts 1 and 2," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 20, No. 2, pp 404-435, 1990.
- [5] Mamdani, E.H., "Applications of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis," *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 26, No. 12, pp. 1182-1191, 1977.
- [6] Sugeno, M., *Industrial applications of fuzzy control*, Elsevier Science Pub. Co., 1985.
- [7] Zadeh, L.A., "Fuzzy sets," *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.

- [8] Zadeh, L.A., "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, and 3," *Information Sciences*, 1975, 8:199-249, 8:301-357, 9:43-80.
- [9] Žák, L.: *Hledání možné závislosti parametrů procesu pomocí FIS*, Inteligentní systémy pro praxi, Lázně Bohdaleč, 2008, pp. 59-64, abstrakt, fulltext na CD ROM, ISBN 978-80-7399-354-2
- [10] Žák, L.: Odhad možné závislosti vstupních a výstupních veličin procesu s využitím fuzzy logiky, Request 2009, Liberec, 2009, pp. 192-203, ISBN 978-80-7372-619-5

Poděkování:

Článek je součástí řešení projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 Centrum pro jakost a spolehlivost ve výrobě. The paper is supported by project from MSMT of the Czech Republic no. 1M06047 Center of Quality and Reliability of Production.

BEAM DESIGN AND ITS RELIABILITY CHECK VIA STOCHASTIC PROGRAMMING

NÁVRH NOSNÍKU POMOCÍ STOCHASTICKÉ OPTIMALIZACE A POSOUZENÍ SPOLEHLIVOSTI

Eva Žampachová^a, Michal Mrázek^b

^aÚstav matematiky, ^bÚstav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2896/2, 616 69 Brno
zampachova@fme.vutbr.cz, mrazekmichal@gmail.com

Abstract: *Chance constrained stochastic programming is applied to a problem concerning an optimal design of beam dimensions and its reliability. The corresponding mathematical model involves an ODE-type constraint, an uncertain parameter related to the external load and one individual chance constraint. A computational scheme for this type of problems is proposed, including discretization methods for random elements and the ODE constraint. A reformulation of a nonlinear chance constrained stochastic program by an appropriate penalty function is considered. The numerical study is presented and the obtained optimal beam dimensions are used for further analysis. An a posteriori check of reliability of the beam is made using simulation techniques in Probabilistic Design System in ANSYS.*

Keywords: *stochastic programming, chance constraints, penalty function, optimum engineering design, ANSYS*

Abstrakt: *Stochastická optimalizace je použita na úlohu týkající se optimálního návrhu rozměrů nosníku a jeho spolehlivosti. Odpovídající matematický model zahrnuje ODR omezení, náhodné zatížení a jedno pravděpodobnostní omezení. Je navrženo výpočtové schéma zahrnující diskretizaci náhodných elementů a ODR omezení. Pro řešení nelineární stochastické úlohy s pravděpodobnostním omezením je použita reformulace pomocí vhodné penalizační funkce. Získané optimální rozměry nosníku z numerické studie jsou použity pro posouzení jeho spolehlivosti, které je provedeno pomocí simulačních metod v modulu Probabilistic Design System programu ANSYS.*

Klíčová slova: *stochastické programování, pravděpodobnostní omezení, penalizační funkce, návrh nosníku, ANSYS*

DOI: 10.5300/IB/2011-2/221

1. Úvod

Optimalizace je nepochybně nepostradatelná ve všech inženýrských oblastech. My se zaměřujeme na oblast úloh optimálního návrhu vedoucích k optimalizačním modelům s neurčitostí s omezeními ve tvaru obyčejných (ODR) nebo parciálních (PDR) diferenciálních rovnic [9], [10], [11]. Tento typ úloh se může vyskytnout v různých inženýrských oblastech jako je např. pozemní stavitelství, kde hraje neurčitost významnou roli např. kvůli variabilitě vnějšího zatížení. Praxe vyžaduje stále častěji nahrazení tradičních deterministických modelů modely lépe čelícími riziku, např. [6] pro plně pravděpodobnostní přístup nebo [8] pro přístup stochastického programování.

2. Formulace problému

Článek se zabývá úlohou týkající se optimalizačního problému s ODR omezením popisujícím průhyb nosníku. Cílem optimalizace je získání optimálních rozměrů příčného průřezu nosníku, přičemž se má minimalizovat hmotnost nosníku. V inženýrské praxi jsou navíc často kladeny požadavky na zvýšení spolehlivosti studovaného objektu. Proto je do modelu k zajištění vyšší

spolehlivosti přidáno jedno pravděpodobnostní omezení (viz nerovnost (2)). Matematický model ve tvaru nelineární stochastické úlohy s pravděpodobnostním omezením je následující.

$$\min_{a,b,v(\omega)} \rho abl \quad (1)$$

$$\text{s. t. } P\left(\max_x v(\omega, x) \leq A\right) \geq 1 - \varepsilon, \quad (2)$$

$$E \frac{ab^3}{12} \frac{d^4 v}{dx^4}(\omega, x) = h(\omega, x), \quad x \in \langle 0, l \rangle, \quad \omega \in \Omega, \quad (3)$$

$$v(\omega, 0) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(\omega, 0) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

$$v(\omega, l) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(\omega, l) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (5)$$

$$\left| E \frac{d^2 v}{dx^2}(\omega, x) \frac{b}{2} \right| \leq \sigma_{limit}, \quad x \in \langle 0, l \rangle, \quad \omega \in \Omega, \quad (6)$$

$$a_{min} \leq a \leq a_{max}, \quad (7)$$

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}, \quad (8)$$

kde ρ je hustota nosníku, l je délka nosníku, x je prostorová souřadnice, A je daná limitní hodnota pro maximální průhyb, $1 - \varepsilon$ je daná úroveň spolehlivosti, ω je náhodný element, Ω je základní prostor, E je Youngův modul, $h(\omega, x)$ je náhodné statické zatížení, a, b jsou rozhodovací proměnné (rozměry příčného průřezu) a $v(\omega, x)$ je průhyb. Příčný průhyb nosníku je popsán ODR (3), okrajové podmínky pro vetknuté konce jsou dány (4) a (5) a znamenají nulové průhyby a pootočení. Maximální napětí σ_{max} dáno jako $\sigma_{max}(x) = \pm E \frac{d^2 v}{dx^2}(x) \frac{b}{2}$ musí být z bezpečnostních důvodů omezeno. Limitní hodnota σ_{limit} souvisí s mezí úměrnosti, která značí konec oblasti elastického chování popsaného Hookeovým zákonem [4], viz omezení (6). Také rozměry příčného průřezu musí být omezeny, viz (7) a (8).

3. Penalizační reformulace stochastické úlohy s pravděpodobnostním omezením

Výše uvedená nelineární stochastická úloha s pravděpodobnostním omezením je reformulována pomocí vhodné penalizační funkce ν , t. j. pravděpodobnostní omezení (2) je do účelové funkce (1) začleněno následovně.

$$\min_{a,b,v(\omega)} \left[\rho abl + M_{pen} \mathbb{E} \left(\nu \left(\max_x v(\omega, x) - A \right) \right) \right], \quad (9)$$

kde $\mathbb{E}$ značí střední hodnotu, $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je spojitá neklesající funkce rovna nule na $\mathbb{R}_0^-$ a kladná jinde [3] a M_{pen} je penalizační koeficient. Často používaná penalizační funkce je [2]: $\nu(s) = (\max(0, s))^2$.

Aproximace modelu s účelovou funkcí (9) a s omezeními (3)-(8) je provedena ve dvou krocích. Nejprve je použit scénárový přístup [7] k aproximaci náhodné proměnné. Předpokládá se, že náhodné zatížení $h(\omega, x)$ má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti s konečným počtem R stejně pravděpodobných scénářů $h(\omega_s, x)$ s pravděpodobnostmi $p_s = P(\{\omega_s\}) = \frac{1}{R}$. Druhý krok spočívá v diskretizaci prostorové souřadnice x v omezeních. Zde je použita jednoduchá metoda konečných diferencí [5] s rovnoměrným dělením: $x_i = id$, $i = 0, \dots, N$, $d = \frac{l}{N}$. Derivace jsou nahrazeny centrálními diferencemi a jsou odvozeny diferenční rovnice.

Aproximace nelineární stochastické úlohy s pravděpodobnostním omezením je tedy dána

deterministickou nelineární úlohou s účelovou funkcí (10) a s omezeními (11)-(15).

$$\min_{a,b,\mathbf{V}_s} \left[\rho_{abl} + M_{pen} \sum_{s=1}^R p_s \left(\max \left(0, \max_i V_{s,i} - A \right) \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$\text{s. t. } ab^3 \mathbb{K} E \mathbf{V}_s = \mathbf{f}_s, \quad s = 1, \dots, R, \quad (11)$$

$$V_{s,0} = 0, \quad V_{s,N} = 0, \quad s = 1, \dots, R, \quad (12)$$

$$|b \mathbb{C} E \mathbf{V}_s| \leq d^2 \sigma_{limit} \mathbf{g}, \quad s = 1, \dots, R, \quad (13)$$

$$a_{min} \leq a \leq a_{max}, \quad (14)$$

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}, \quad (15)$$

$$\text{kde } \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{f} = (12d^4 h_{s,1}, \dots, 12d^4 h_{s,N-1})^T$, $\mathbf{g} = (1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1)^T$, $\mathbf{V}_s = (V_{s,1}, \dots, V_{s,N-1})^T$ je aproximace $v(\omega, x)$, $h_{s,i} = h(\omega_s, x)$, $s = 1, \dots, R$, $i = 0, \dots, N$.

4. Numerická studie

Výsledky jsou prezentovány pro následující vstupní data. Náhodné zatížení je kvadratické: $h(\omega, x) = -4h_0(\omega) \frac{x^2}{l^2} + 4h_0(\omega) \frac{x}{l}$, $h_0(\omega) \sim U(5, 50) \text{ Nmm}^{-1}$. Délka ocelového nosníku je $l = 1000 \text{ mm}$ s hustotou $\rho = 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ tmm}^{-3}$ a Youngovým modulem $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Limitní hodnota pro napětí je $\sigma_{limit} = 100 \text{ MPa}$. Počet diskretizačních bodů je $N = 50$, počet scénářů je $R = 100$ a hraniční hodnoty pro rozměry nosníku jsou $a_{min} = b_{min} = 10 \text{ mm}$, $a_{max} = b_{max} = 100 \text{ mm}$. Penalizační koeficient je zvolen jako $M_{pen} = 100\,000$ a limitní hodnota pro maximální průhyb je $A = 0,1 \text{ mm}$.

Úloha (10)-(15) je implementována v programu GAMS s řešičem CONOPT a výpočty byly realizovány na notebooku s Intel Core 2Duo 2GHz a 2GB RAM, přičemž výpočetní čas je zanedbatelný. Nalezené optimální rozměry jsou $a = 64,4 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$. Maximální průhyb $0,1003 \text{ mm}$ nastává uprostřed nosníku a klesá směrem k jeho koncům. Maximální tahové napětí 31 MPa je na koncích nosníku, zatímco maximální tlakové napětí -18 MPa je uprostřed. Minimalizovaná hmotnost má hodnotu $\rho_{abl} = 0,051 \text{ t}$ a penalizační část účelové funkce je $M_{pen} \sum_{s=1}^R p_s \left(\max \left(0, \max_i V_{s,i} - A \right) \right)^2 = 6,4 \cdot 10^{-5}$. Další analýza je z praktických důvodů provedena pro mírně modifikované rozměry. Nosníky jsou totiž obvykle vyráběny pouze v určitých rozměrech, proto je hodnota $64,4 \text{ mm}$ zaokrouhlena na 64 mm .

5. Posouzení spolehlivosti

Nevýhodou penalizační reformulace je to, že úroveň spolehlivosti $1 - \varepsilon$ (viz omezení (2)) není v reformulovaném modelu žádným způsobem zohledněna. Proto by bylo velmi užitečné provést zpětnou kontrolu splnění pravděpodobnostního omezení. Výše nalezené rozměry příčného průřezu nosníku jsou tedy zafixovány a je spočtena nebo alespoň odhadnuta pravděpodobnost ve zmiňovaném omezení. V našem případě jsme schopni spočítat tuto pravděpodobnost analyticky následujícím způsobem.

Pro dané vnější náhodné zatížení $h(\omega, x) = -4h_0(\omega) \frac{x^2}{l^2} + 4h_0(\omega) \frac{x}{l}$ lze pro maximální průhyb odvodit následující vztah:

$$v_{max}(\omega) = Bh_0(\omega), \quad (16)$$

kde $B = \frac{13l^4}{480ab^3E}$. To znamená, že v_{max} je transformovaná náhodná veličina. Označme $h_0(\omega) \sim U(h_{min}, h_{max})$, kde numerické hodnoty h_{min}, h_{max} jsou zmíněny v předchozí části. Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení je dobře známa a proto lze získat následující distribuční funkci náhodné veličiny v_{max} :

$$F_{v_{max}}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq Bh_{min} \\ \frac{1}{h_{max}-h_{min}} \left(\frac{y}{B} - h_{min} \right), & Bh_{min} \leq y \leq Bh_{max} \\ 1, & y \geq Bh_{max}. \end{cases} \quad (17)$$

Levá strana nerovnice v pravděpodobnostním omezení (2) je rovna určité hodnotě odpovídající distribuční funkci: $P\left(\max_x v(\omega, x) \leq A\right) = F_{v_{max}}(A)$. Proto jsme schopni vypočítat přesnou hodnotu této pravděpodobnosti. Pro výše určené rozměry $a = 64$ mm, $b = 100$ mm a $A = 0,1$ mm je spočtená pravděpodobnost $P\left(\max_x v(\omega, x) \leq 0,1\right) = 0,991658$. To znamená, že spolehlivost nosníku s navrženými rozměry je 99,1658%. V případě, že by tato spolehlivost byla pro praxi příliš nízká, je nutné zvětšit rozměr a .

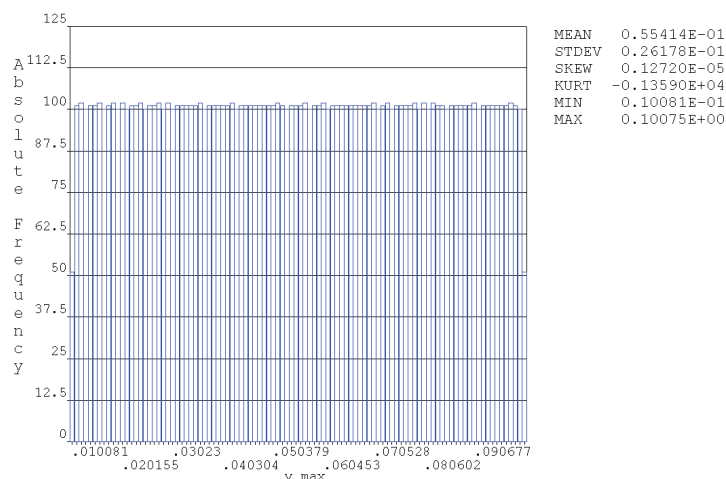
Tento analytický přístup lze ale obvykle použít pouze pro jednoduché úlohy, kdy jsme schopni odvodit odpovídající distribuční funkci. Pro složitější případy je nutné k odhadu pravděpodobnosti v pravděpodobnostním omezení použít simulační techniky. V tomto článku je pro odhad pravděpodobnosti a další analýzu použit výpočtový systém ANSYS 11.0 s modulem "Probabilistic Design System (PDS)". Je vytvořen konečnoprvkový model, dále je definován náhodný vstup (vnější zatížení) a zvolen náhodný výstup (maximální průhyb). Poté je vygenerován náhodný výběr z náhodného zatížení o rozsahu 10 000 pomocí simulační metody Monte Carlo s tzv. Latin Hypercube Sampling (LHS). LHS technika je zvolena, protože se jedná o pokročilejší a účinnější formu Monte Carlo simulace. Vyhýbá se shlukování vzorků a vyžaduje méně simulací k zajištění stejné přesnosti než tzv. Direct Sampling metoda [1]. Bodový odhad pravděpodobnosti, že je maximální průhyb menší než 0,1 mm je 0,991651, což je ve výborné shodě s výše spočtenou přesnou hodnotou. 0,99-interval spolehlivosti je [0,9891; 0,9938].

Rozsah možných hodnot maximálního průhybu je omezen (viz histogram na Obrázku 1), což je ve shodě s hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny v_{max} :

$$f_{v_{max}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(h_{max}-h_{min})}, & Bh_{min} \leq y \leq Bh_{max} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (18)$$

6. Závěr

Byla diskutována použitelnost stochastické optimalizace s pravděpodobnostním omezením na inženýrskou úlohu týkající se optimálního návrhu rozměrů nosníku s náhodným vnějším zatížením. Matematický model vedl na stochastickou nelineární úlohu s ODR omezením a s jedním pravděpodobnostním omezením. Byla použita reformulace pomocí vhodné penalizační funkce. Dále bylo navrženo výpočtové schéma za použití scénářového přístupu a metody konečných diferencí. Spolehlivost získaného řešení byla zpětně posouzena pomocí simulačních nástrojů v modulu "Probabilistic Design System" výpočtového systému ANSYS. Poměrně velký rozsah náhodného výběru umožnil získání velmi přesných výsledků, které byly ve výborné shodě s analyticky spočtenou hodnotou.



Obrázek 1: Histogram absolutních četností v_{max} .

Reference

- [1] ANSYS, Inc. *ANSYS Advanced Analysis Techniques Guide*. Canonsburg: ANSYS, Inc., 2005.
- [2] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. New York: Wiley and Sons, 1993.
- [3] BRANDA, M., DUPAČOVÁ, J. Approximations and Contamination Bounds for Probabilistic Programs. *Stochastic Programming E-Print Series (SPEPS) 13* (2008), 1–25.
- [4] CHOBOT, K. et al. *Statika stavebních konstrukcí II*. Praha: SNTL, 1983.
- [5] MATHEWS, J. H., FINK, K. D. *Numerical Methods Using Matlab*. 4th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004.
- [6] PLŠEK, J., ŠTĚPÁNEK, P., POPELA, P. Deterministic and Reliability Based Structural Optimization of Concrete Cross-section. *Journal of Advanced Concrete Technology* 5, 1 (2007), 63–74.
- [7] RUSZCZYŃSKI, A., SHAPIRO, A. (ed.) *Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming*. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [8] ŠTĚPÁNEK, P., POPELA, P., PLŠEK, J. Structural Optimization Of Concrete Structures By Stochastic Programming. In *SimTecT 2008 Conference Proceedings*. Melbourne: SIAA, 2008.
- [9] ŽAMPACHOVÁ, E. *Approximations in Stochastic Optimization and Their Applications*. [PhD Thesis], Brno: Brno University of Technology, 2010.
- [10] ŽAMPACHOVÁ, E., POPELA, P. Different reformulations of stochastic optimization of the transverse vibrations. *Engineering mechanics*, 2010, vol.17, no.5/6, pp.339-350.
- [11] ŽAMPACHOVÁ, E., POPELA, P., MRÁZEK, M. Optimum Beam Design via Stochastic Programming. *Kybernetika*, 2010, vol.46, no.3, pp.571-582.

Poděkování: Článek byl podpořen projektem MŠMT ČR č. 1M06047, grantem GAČR reg. č. 103/08/1658 a výzkumným plánem MŠMT ČR č. MSM0021630519.

Seznam autorů

B

Bajzík, Vladimír 3
Bednář, Josef 11
Beran, Theodor 124
Beránek, Libor 16, 204

C

Cézová, Eliška 26

Č

Černá, Dana 20

D

Dohnal, Gejza *iii*, 26
Dvořák, Jiří 63

F

Finěk, Václav 20
Flegl, Radim 35
Fusek, Michal 47

G

Gajdůková, Lucie 52

H

Haugen, Kjetil 170
Hrabec, Dušan 170
Hřebíček, Jiří 200

Ch

Chajdiak, Jozef *viii*
Chvátalová, Zuzana 52

J

Jančík, Stanislav 63
Jedelský, Jan 156
Jícha, Miroslav 156

K

Karpíšek, Zdeněk ... *iii*, 71, 80, 89, 138, 192
Koucky, Miroslav 98
Král, Jan 108, 124
Král, Otakar 124

L

Lacinová, Veronika 138
Laníková, Ivana 146

Lízal, František 156
Luha, Ján *v*

M

Martišek, Karel 71
Matoušek, Radomil 80
Mauder, Tomáš 156
Mrázek, Michal 221

N

Novotný, Jan 170

P

Pink, Václav 200
Popela, Pavel 164, 170
Pospíšil, Tomáš 174

S

Sadovský, Zdeněk 80, 138
Stárek, Ivo 63

Š

Šafářová, Veronika 184
Šácha, Jakub 192
Šimůnek, Petr 146
Šomplák, Radovan 164
Štarha, Pavel 89
Štěpánek, Petr 146

U

Ulverová, Michaela 164
Urbánek, Jaroslav 200

V

Vališ, David 98
Volf, Luděk 16, 204

Z

Zobel, Sabrina 184

Ž

Žák, Libor 209
Žampachová, Eva 221

The Bulletin of the Czech Statistical Society is published quarterly. Most of the contributions are published in Czech and Slovak languages. Next to those, we also accept papers written in main world languages.

Informační Bulletin České statistické společnosti vychází čtyřikrát do roka. Příležitostně vychází i mimořádné české a anglické číslo.

Časopis je zařazen na seznamu Rady pro výzkum, vývoj a inovace, více viz server <http://www.vyzkum.cz/>

Předseda společnosti: doc. RNDr. Gejza DOHNAL, CSc.
ÚTM FS ČVUT v Praze, Karlovo náměstí 13, 121 35 Praha 2
E-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

Redakční rada: prof. Ing. Václav ČERMÁK, DrSc. (předseda), prof. RNDr. Jaromír ANTOCH, CSc., doc. Ing. Josef TVRDÍK, CSc., RNDr. Marek MALÝ, CSc., doc. RNDr. Jiří MICHÁLEK, CSc., doc. RNDr. Zdeněk KARPÍŠEK, CSc., prof. Ing. Jiří MILITKÝ, CSc., doc. RNDr. Gejza DOHNAL, CSc.

Technický redaktor: Ing. Pavel STŘÍŽ, Ph.D., striz@fame.utb.cz
Informace pro autory jsou na stránkách <http://www.statspol.cz/>

DOI: 10.5300/IB, <http://dx.doi.org/10.5300/IB>
ISSN 1210–8022 (Print), ISSN 1804–8617 (Online)

DOI je přiřazováno ve spolupráci s Čs. sdružením uživatelů T_EXu.
Toto číslo bylo vytištěno s laskavou podporou Českého statistického úřadu.