Logaritmicko-lineární modely v pedagogickém výzkumu

Marie Budíková
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU Brno
Eva Nováková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU Brno

Statistické dny 2023, 19. – 21. 5. 2023

Osnova

Informace o výzkumném šetření

Popis datového souboru

Zavedení kategoriálních proměnných

Zkoumání vztahů mezi dvojicemi kategoriálních proměnných

Logaritmicko-lineární model pro tři kategoriální proměnné

Výsledky modelování

Závěr

Informace o výzkumném šetření

V roce 2022 bylo na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity uskutečněno rozsáhlé výzkumné šetření, jehož se zúčastnilo celkem 311 žáků z 18 tříd 5. ročníku základních škol v Jihomoravském kraji. Jeho cílem bylo zjistit, jaká je úroveň „off-line“ metakognice (tj. míra predikce a úroveň sebehodnocení) žáků při řešení rutinních a nerutinních (nestandardních) slovních úloh.
Žáci dostali zadání následujících pěti slovních úloh, z nichž dvě byly rutinní a tři nerutinní.

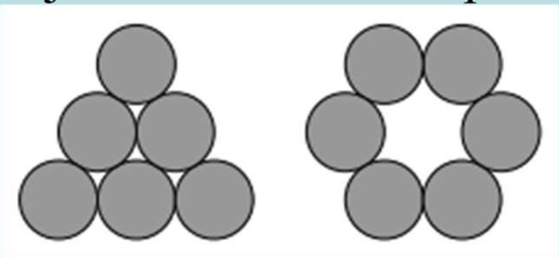
Př.1 (R): Jirka koupil 5 dvoumetrových prken. Kolik metrových prken z nich může nařezat?

Př. 2 (NR): Hosté přijížděli na slavnost v barevných kočárech. Barvy kočárů se pravidelně střídaly: černá, bílá, černá, bílá, . . . Každý černý kočár byl tažen černým koněm, každý bílý kočár táhli dva bílí koně. Celkem všechny kočáry táhlo 15 koní. Kolik z nich mělo bílou barvu?

Př. 3 (R): Jana chodí ráda na výlety. Ráno ušla 12 km, což bylo o 3 km více než odpoledne. Kolik kilometrů Jana ten den ušla?

Př. 4 (NR): V kouzelné zahradě rostou dva druhy kouzelných stromů. Na stromech jednoho druhu roste 6 hrušek a 3 jablka, na stromech druhého druhu 8 hrušek a 4 jablka. V zahradě je celkem 25 jablek. Kolik je tam hrušek?

Př. 5 (NR): Filip položil 6 stejných mincí do tvaru trojúhelníka (jako je na obrázku). Kolik nejméně mincí musel přemístit, aby mince tvořily kruh jako na druhém obrázku?



Dle pokynů si žáci vždy přečetli zadání všech pěti úloh. Poté měli odhadnout, zda úlohu:

a) určitě vyřeší správně
b) asi vyřeší správně
c) asi nevyřeší správně
d) určitě nevyřeší správně.

Po vyřešení všech pěti úloh měli žáci odhadnout, zda úlohu:

a) určitě vyřešili správně
b) asi vyřešili správně
c) asi nevyřešili správně
d) určitě nevyřešili správně.

Ke každé úloze tedy byla přiřazena jedna otázka na predikci a jedna otázka na sebehodnocení, tj. celkem 5 otázek zkoumajících míru predikce a 5 otázek zkoumajících úroveň sebehodnocení.

Při vyhodnocování míry predikce a úrovně sebehodnocení se postupovalo podle následujících dvou tabulek:

předpověď (predikce) žáka	**úspěšnost řešení úlohy**	
	vyřešil správně	nevyřešil správně nebo neřešil
vím jistě, že úlohu vyřeším správně	2	0
asi úlohu vyřeším správně	1	0
asi úlohu nevyřeším správně	0	1
vím jistě, že úlohu nevyřeším správně	0	2

Vztah mezi předpovědí žáka a úspěšností řešení úlohy

sebehodnocení žáka	**úspěšnost řešení úlohy**	
	vyřešil/a správně	nevyřešil/a správně nebo neřešil/a
vím jistě, že jsem úlohu vyřešil(a) správně	2	0
asi jsem úlohu vyřešil(a) správně	1	0
asi jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	1
vím jistě, že jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	2

Vztah mezi sebehodnocením žáka a úspěšností řešení úlohy

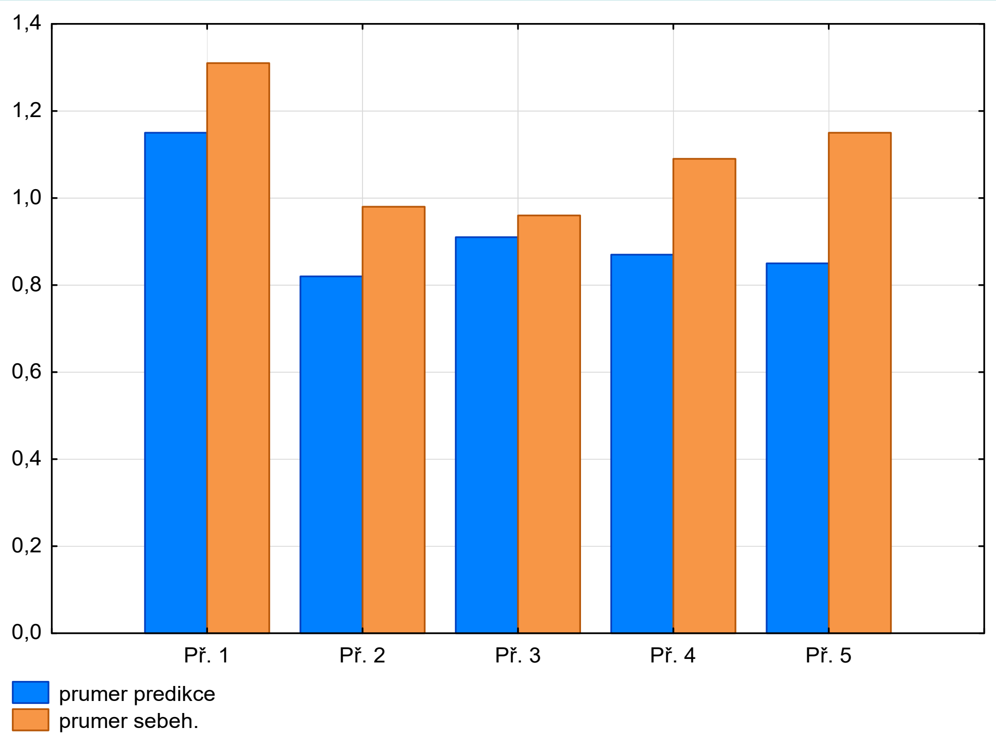
Popis datového souboru

Úplné údaje o míře predikce, správnosti řešení a úrovni sebehodnocení jsou známy u 298 žáků.

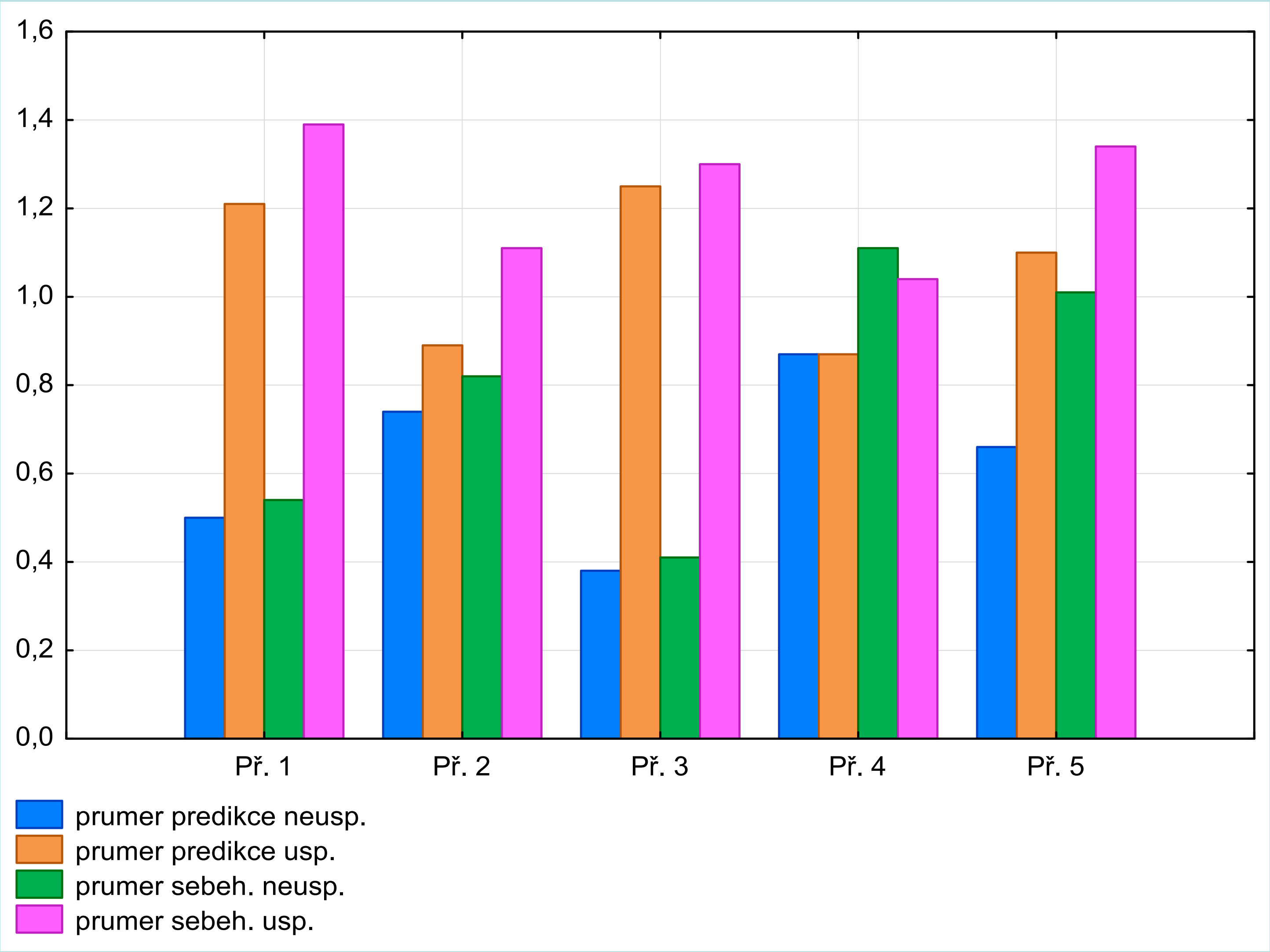
Relativní četnost správného řešení:

Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5
90,6 %	56,4 %	61,6 %	30,2 %	41,9 %

Průměrná míra predikce a průměrná úroveň sebehodnocení



Průměrná míra predikce a průměrná úroveň sebehodnocení pro neúspěšné a úspěšné řešitele:



Zavedení kategoriálních proměnných

Proměnná X_1 … míra predikce
Varianta 0 – „vím jistě, že úlohu nevyřeším správně“ nebo „asi úlohu nevyřeším správně“
Varianta 1 – „asi úlohu vyřeším správně“
Varianta 2 – „vím jistě, že úlohu vyřeším správně“

Proměnná X_2 … řešení příkladu
Varianta 0 – příklad neřešen nebo nevyřešen správně
Varianta 1 – příklad vyřešen správně

Proměnná X_3 … úroveň sebehodnocení
Varianta 0 – „vím jistě, že jsem úlohu nevyřešil(a) správně“ nebo „asi jsem úlohu nevyřešil(a) správně“
Varianta 1 – „asi jsem úlohu vyřešil(a) správně“
Varianta 2 – „vím jistě, že jsem úlohu vyřešil(a) správně“

Zkoumání vztahů mezi dvojicemi kategoriálních proměnných

Kontingenční tabulky pro příklad 1:

predikce	reseni 0	reseni 1	Řádk. součty
0	17	43	60
1	8	126	134
2	3	101	104
Vš.skup.	28	270	298

predikce	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	30	22	8	60
1	8	83	43	134
2	1	23	80	104
Vš.skup.	39	128	131	298

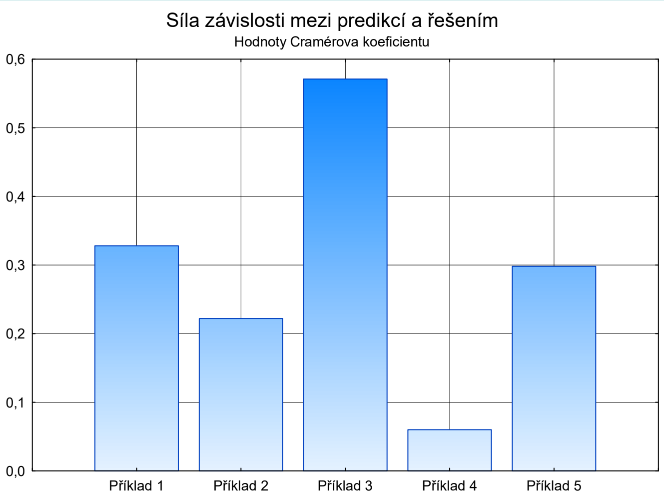
reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	15	11	2	28
1	24	117	129	270
Vš.skup.	39	128	131	298

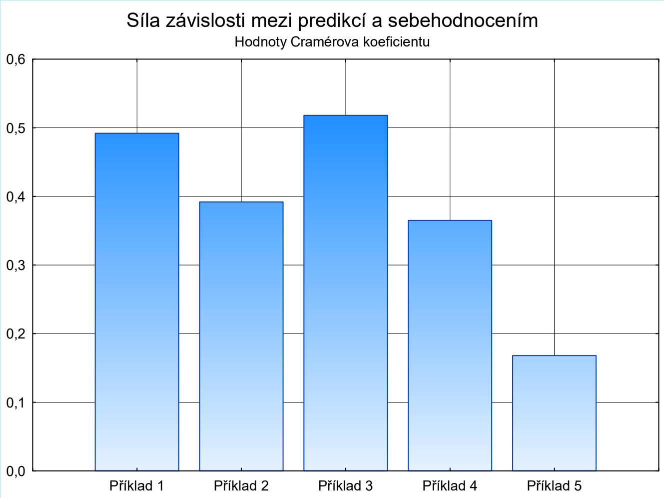
Predikce, řešení	Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5
Pearsonův χ^2	32,3024	14,7489	96,9941	1,0800	26,5066
St. volnosti	2	2	2	2	2
p-hodnota	$<0,0001$	0,0006	$<0,0001$	0,5827	$<0,0001$
Cramérovo V	0,328	0,222	0,571	0,060	0,298

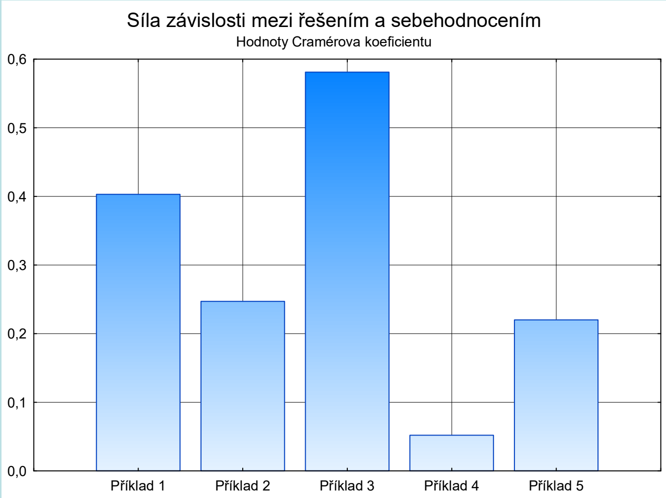
Predikce, sebehodnocení	Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5
Pearsonův χ^2	144,454	91,4211	160,055	79,5927	16,9145
St. volnosti	4	4	4	4	4
p-hodnota	$<0,0001$	$<0,0001$	$<0,0001$	$<0,0001$	0,0020
Cramérovo V	0,492	0,392	0,518	0,365	0,168

Řešení, sebehodnocení	Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5
Pearsonův χ^2	48,3278	18,1322	100,557	0,7960	14,4558
St. volnosti	2	2	2	2	2
p-hodnota	$<0,0001$	$<0,0001$	$<0,0001$	0,6717	0,0007
Cramérovo V	0,403	0,247	0,581	0,052	0,220

Grafické znázornění Cramérových koeficientů







Interpretace: Závislost mezi mírou predikce a řešením se u všech pěti příkladů jeví velmi podobná závislosti mezi řešením a úrovní sebehodnocení. Závislost mezi mírou predikce a úrovní sebehodnocení je vesměs vyšší než závislost mezi mírou predikce a řešením resp. mezi řešením a úrovní sebehodnocení, výjimkou jsou nerutinní příklady 3 a 5. Je také vidět, že u rutinních příkladů 1 a 3 jsou závislosti mezi dvojicemi proměnných silnější než u nerutinních příkladů 2, 4, 5.

Logaritmicko-lineární model (pro tři kategoriální proměnné)

Log – lineární model:

- Je speciálním případem zobecněného lineárního modelu, kde linkovací funkcí je logaritmus.
- Slouží k systematické analýze vztahů mezi dvěma a více kategoriálními proměnnými.
- Umožňuje modelovat četnosti v kontingenční tabulce způsobem, který je podobný vícefaktorové analýze rozptylu.
- Logaritmy četností jsou modelovány jako lineární kombinace množiny parametrů, tedy parametry reprezentují logaritmy teoretických četností jako důsledek působení tzv. efektů a jejich interakcí.
- Nejčastěji se používají hierarchické modely: každá složitější interakce obsahuje všechny jednodušší interakce.

Zakladatelem této metody je americký statistik Leo Goodman (1928 – 2020).

Popis situace

Na n objektech sledujeme hodnoty tří kategoriálních náhodných veličin X_1, X_2, X_3.
Veličina X_1 má r_1 variant, X_2 má r_2 variant a X_3 má r_3 variant.
Simultánní absolutní četnosti
$n_{ijk} = N(X_1=i \wedge X_2=j \wedge X_3=k)$, $i = 1, 2, \ldots, r_1$, $j = 1, 2, \ldots, r_2$, $k = 1, 2, \ldots, r_3$
uspořádáme do třírozměrné kontingenční tabulky.
Předpokládáme, že četnost n_{ijk} je realizace náhodné veličiny Y_{ijk}, která se řídí Poissonovým rozložením. Označme
$\pi_{ijk} = P(Y_{ijk}= n_{ijk})$,
$\mu_{ijk} = n\pi_{ijk} = E(Y_{ijk})$ – teoretická četnost trojice variant (i, j, k).
Přirozený logaritmus této střední hodnoty modelujeme pomocí lineární kombinace příspěvků zvolených variant proměnných X_1, X_2, X_3 a jejich interakcí.

Saturovaný model

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_2} + \lambda_{ik}^{X_1X_3} + \lambda_{jk}^{X_2X_3} + \lambda_{ijk}^{X_1X_2X_3}$$

λ - průměrný efekt políčka v kontingenční tabulce

$\lambda_i^{X_1}$ - efekt i-tého řádku

$\lambda_j^{X_2}$ - efekt j-tého sloupce

$\lambda_k^{X_3}$ - efekt k-té vrstvy

$\lambda_{ij}^{X_1X_2}, \lambda_{ik}^{X_1X_3}, \lambda_{jk}^{X_2X_3}$ - efekty interakce libovolné dvojice proměnných

$\lambda_{ijk}^{X_1X_2X_3}$ - efekt interakce všech tří proměnných

Saturovaný model obsahuje všechny interakce mezi proměnnými, což nemusí odpovídat realitě. Je obtížné interpretovat jeho parametry. Hledáme jednodušší model, který dostatečně dobře popisuje skutečnost. Přitom je zapotřebí poznat vzájemné vztahy mezi proměnnými.

(Upozornění: X v horním indexu neznamená mocninu, ale označuje proměnnou resp. interakci proměnných.)

Hierarchické typy vztahů mezi třemi proměnnými

Vzájemná nezávislost:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3}$$

Sdružená nezávislost: předpokládáme např., že X_1, X_3 a X_2, X_3 jsou nezávislé, ale X_1, X_2 jsou závislé.

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1 X_2}$$

Podmíněná nezávislost: předpokládáme, že X_1, X_2 jsou nezávislé, pokud je zafixovaná jedna hodnota X_3.

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ik}^{X_1 X_3} + \lambda_{jk}^{X_2 X_3}$$

(Vzájemná nezávislost implikuje sdruženou nezávislost a ta implikuje podmíněnou nezávislost.)

Homogenní asociace: všechny tři páry proměnných jsou podmíněně nezávislé.

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1 X_2} + \lambda_{ik}^{X_1 X_3} + \lambda_{jk}^{X_2 X_3}$$

Ostatní modely

Má-li např. proměnná X_3 rovnoměrné diskrétní rozložení, pak

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2}$$

Mají-li proměnné X_2, X_3 rovnoměrné diskrétní rozložení, pak

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1}$$

Mají-li všechny tři proměnné X_1, X_2, X_3 rovnoměrné diskrétní rozložení, pak

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda$$

Odhady parametrů lze pro některé modely získat přímým výpočtem, v ostatních případech se používají iterační algoritmy nebo metoda maximální věrohodnosti. Parametry, které jsou záporné, snižují teoretickou četnost, kladné naopak zvyšují. Větší vliv mají parametry s větší absolutní hodnotou.
Pro interpretaci odhadů parametrů v log-lineárním modelu se volí referenční kategorie sledovaných kategoriálních proměnných.

Kritéria pro výběr vhodného modelu

Test shody pozorovaných a teoretických četností

H_0: Pozorované četnosti n_{ijk} a teoretické četnosti μ_{ijk} se neliší.
H_1: Pozorované četnosti n_{ijk} a teoretické četnosti μ_{ijk} se liší.

Pearsonova χ^2- statistika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3}\frac{\left(n_{ijk}-\mu_{ijk}\right)^2}{\mu_{ijk}}$$

Statistika založená na věrohodnostním poměru:

$$G^2 = 2\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3} n_{ijk}\ln\frac{n_{ijk}}{\mu_{ijk}}$$

Za platnosti H_0 se obě testové statistiky asymptoticky řídí Pearsonovým χ^2-rozložením s ν stupni volnosti.

Počty stupňů volnosti ν pro nejpoužívanější modely
Model vzájemné nezávislosti: $\nu = r_1r_2r_3-r_1-r_2-r_3+2$
Model sdružené nezávislosti: $\nu = (r_3-1)(r_1r_2-1)$
Model podmíněné nezávislosti: $\nu = r_3(r_1-1)(r_2-1)$
Model homogenní asociace: $\nu = (r_1-1)(r_2-1)(r_3-1)$

Test pro porovnání dvou modelů M_1, M_2 (model M_1 stojí výše v hierarchii modelů)

H_0: Modely M_1 a M_2 se neliší.
H_1: Modely M_1 a M_2 se liší.

Pearsonova χ^2- statistika: Statistika založená na poměru věrohodnosti:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3}\frac{\left(\mu_{ijk}^{(1)} - \mu_{ijk}^{(2)}\right)^2}{\mu_{ijk}^{(2)}} \qquad G_{M_2}^2 - G_{M_1}^2 = 2\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3} n_{ijk} \ln\frac{\mu_{ijk}^{(1)}}{\mu_{ijk}^{(2)}}$$

Za platnosti H_0 se testové statistiky asymptoticky řídí Pearsonovým χ^2-rozložením s (ν_1- ν_2) stupni volnosti.

Akaikeovo a Bayesovo informační kritérium

AIC = $G^2 - 2\nu$
BIC = $G^2 - \nu \ln n$

Za vhodnější považujeme ten model (vytvořený na stejných datech), pro nějž jsou tato kritéria menší.

Výsledky analýz

Referenční kategorie:
míra predikce = 2, příklad vyřešen = 1, úroveň sebehodnocení = 2.

Příklad 1. (R): Jirka koupil 5 dvoumetrových prken. Kolik metrových prken z nich může nařezat?

predikce	reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	0	13	4	0	17
0	1	17	18	8	43
Celk.		30	22	8	60
1	0	1	6	1	8
1	1	7	77	42	126
Celk.		8	83	43	134
2	0	1	1	1	3
2	1	0	22	79	101
Celk.		1	23	80	104
Sloupce celk		39	128	131	298

Optimální model:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_3} + \lambda_{jk}^{X_2X_3}$$

Jde o model podmíněné nezávislosti – míra predikce a řešení jsou nezávislé, pokud je zafixovaná hodnota úrovně sebehodnocení.

Odhady parametrů

Efekt	cetnost1 - Odhady parametrů (priklady1_5.sta) Rozdělení : POISSONOVO Linkující funkce: LN Úroveň Efekt	Sloupec	kategorie	Odhad	OR =exp(Odha	Wald. Stat.	p
Abs.člen		1		4,36664	78,8	1511,098	0,000000
predikce	0	2	0	-2,30259	0,1	38,559	0,000000
predikce	1	3	1	-0,62083	0,5	10,779	0,001026
reseni	0	4	0	-4,16667	0,0	34,192	0,000000
sebehodnoceni	0	5	0	-4,85215	0,0	22,888	0,000002
sebehodnoceni	1	6	1	-1,32100	0,3	30,706	0,000000
predikce*sebehodnoceni	1	7	0*0	5,70378	300,0	27,786	0,000000
predikce*sebehodnoceni	2	8	0*1	2,25813	9,6	22,520	0,000002
predikce*sebehodnoceni	3	9	1*0	2,70027	14,9	6,282	0,012200
predikce*sebehodnoceni	4	10	1*1	1,90417	6,7	39,722	0,000000
reseni*sebehodnoceni	1	11	0*0	3,69666	40,3	22,181	0,000002
reseni*sebehodnoceni	2	12	0*1	1,80239	6,1	5,350	0,020722
Měřítko				1,00000	2,7		

Největší vliv na teoretické četnosti má interakce (predikce = 0, sebehodnocení = 0) – odhad příslušného parametru je 5,704. Je to kladné číslo, tedy tento parametr teoretickou četnost zvyšuje.

Podíly šancí – souvislost s exponenty odhadu parametrů

Kontingenční tabulka predikce a sebehodnocení

predikce	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	30	22	8	60
1	8	83	43	134
2	1	23	80	104
Vš.skup.	39	128	131	298

Dvojice kategorií predikce = 0, sebehodnocení = 0 (vynecháme řádek predikce = 1, sloupec sebehodnocení = 1): $OR = \frac{30 \cdot 80}{8 \cdot 1} = 300 = \exp(5{,}70378)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 0, má 300x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 0 než žák, který má úroveň sebehodnocení 2.

Dvojice kategorií predikce = 0, sebehodnocení = 1 (vynecháme řádek predikce = 1, sloupec sebehodnocení = 0): $OR = \frac{22 \cdot 80}{8 \cdot 23} = 9{,}6 = \exp(2{,}25313)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 0, má 9,6x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 0 než žák, který má úroveň sebehodnocení 1.

predikce	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	30	22	8	60
1	8	83	43	134
2	1	23	80	104
Vš.skup.	39	128	131	298

Dvojice kategorií predikce = 1, sebehodnocení = 0 (vynecháme řádek predikce = 0, sloupec sebehodnocení = 1): $\mathrm{OR} = \frac{8 \cdot 80}{43 \cdot 1} = 14{,}9 = \exp(2{,}70027)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 0, má 14,9x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 1 než žák, který má úroveň sebehodnocení 2.

Dvojice kategorií predikce = 1, sebehodnocení = 1 (vynecháme řádek predikce = 0, sloupec sebehodnocení = 0): $\mathrm{OR} = \frac{83 \cdot 80}{43 \cdot 23} = 6{,}7 = \exp(1{,}90417)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 1, má 6,7x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 1 než žák, který má úroveň sebehodnocení 2.

Kontingenční tabulka řešení a sebehodnocení

reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	15	11	2	28
1	24	117	129	270
Vš.skup.	39	128	131	298

Dvojice kategorií řešení = 0, sebehodnocení = 0 (vynecháme sloupec sebehodnocení = 1): $OR = \frac{15 \cdot 129}{2 \cdot 24} = 40{,}3 = \exp(3{,}69666)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 0, má 40,3x vyšší šanci, že příklad 1 nevyřešil než žák, který má úroveň sebehodnocení 2.

Dvojice kategorií řešení = 0, sebehodnocení = 1 (vynecháme sloupec sebehodnocení = 0): $OR = \frac{11 \cdot 129}{2 \cdot 117} = 6{,}1 = \exp(1{,}80239)$

Interpretace: Žák, který má úroveň sebehodnocení 1, má 6,1x vyšší šanci, že příklad 1 nevyřešil než žák, který má úroveň sebehodnocení 2.

Předpovězené hodnoty

	Odezva Hodnota	Před. Hodnota
1	13	11,5
2	4	1,9
3	0	0,1
4	17	18,5
5	18	20,1
6	8	7,9
7	1	3,1
8	6	7,1
9	1	0,7
10	7	4,9
11	77	75,9
12	42	42,3
13	1	0,4
14	1	2,0
15	1	1,2
16	0	0,6
17	22	21,0
18	79	78,8

Výsledek Pearsonova chí-kvadrát testu dobré shody:
$\chi^2 = 7{,}8256$, st. volnosti = 6, p-hodnota = 0,2516

Výpočet teoretických četností pomocí odhadů parametrů

000 =exp(4,36664-2,30259-4,16667-4,85215+5,70378+3,69666) = 11,5
001 =exp(4,36664-2,30259-4,16667-1,321+2,25813+1,80239) = 1,9
002 =exp(4,36664-2,30259-4,16667) = 0,1
010 =exp(4,36664-2,30259-4,85215+5,70378) = 18,5
011 =exp(4,36664-2,30259-1,321+2,25813) = 20,1
012 =exp(4,36664-2,30259) = 7,9
100 =exp(4,36664-0,62083-4,16667-4,85215+2,70027+3,69666) = 3,1
101 =exp(4,36664-0,62083-4,16667-1,321+1,90417+1,80239) = 7,1
102 =exp(4,36664-0,62083-4,16667) = 0,7
110 =exp(4,36664-0,62083-4,85215+2,70027) = 4,9
111 =exp(4,36664-0,62083-1,321+1,90417) = 75,9
112 =exp(4,36664-0,62083) = 42,3
200 =exp(4,36664-4,16667-4,85215+3,69666) =0,4
201 =exp(4,36664-4,16667-1,321+1,80239) = 2,0
202 =exp(4,36664-4,16667) = 1,2
210 =exp(4,36664-4,85215) = 0,6
211 =exp(4,36664-1,321) = 21,0
212 =exp(4,36664) = 78,8

Příklad 2. (NR): Hosté přijížděli na slavnost v barevných kočárech. Barvy kočárů se pravidelně střídaly: černá, bílá, černá, bílá, . . . Každý černý kočár byl tažen černým koněm, každý bílý kočár táhli dva bílí koně. Celkem všechny kočáry táhlo 15 koní. Kolik z nich mělo bílou barvu?

predikce	reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	0	39	21	2	62
0	1	19	26	5	50
Celk.		58	47	7	112
1	0	9	19	12	40
1	1	13	51	24	88
Celk.		22	70	36	128
2	0	6	6	16	28
2	1	0	8	22	30
Celk.		6	14	38	58
Sloupce celk		86	131	81	298

Optimální model:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_2} + \lambda_{ik}^{X_1X_3} + \lambda_{jk}^{X_2X_3}$$

Jde o model homogenní asociace – všechny tři páry proměnných jsou podmíněně nezávislé.

Odhady parametrů

Efekt	cetnost2 - Odhady parametrů (priklady1_5.sta) Rozdělení : POISSONOVO Linkující funkce: LN						
	Úroveň Efekt	Sloupec	kategorie	Odhad	OR	Wald. Stat.	p
Abs.člen		1		3,02847	20,7	211,5865	0,000000
predikce	0	2	0	-1,63438	0,2	13,5283	0,000235
predikce	1	3	1	0,24121	1,3	0,8114	0,367709
reseni	0	4	0	-0,17579	0,8	0,3775	0,538922
sebehodnoceni	0	5	0	-2,42953	0,1	23,0506	0,000002
sebehodnoceni	1	6	1	-1,01169	0,4	8,4554	0,003640
predikce*reseni	1	7	0*0	-0,13019	0,9	0,1137	0,736003
predikce*reseni	2	8	1*0	-0,82208	0,4	5,4436	0,019640
predikce*sebehodnoceni	1	9	0*0	3,99194	54,2	43,8971	0,000000
predikce*sebehodnoceni	2	10	0*1	2,90369	18,2	32,1780	0,000000
predikce*sebehodnoceni	3	11	1*0	1,55311	4,7	8,5529	0,003450
predikce*sebehodnoceni	4	12	1*1	1,66887	5,3	19,3729	0,000011
reseni*sebehodnoceni	1	13	0*0	1,00710	2,7	7,1037	0,007693
reseni*sebehodnoceni	2	14	0*1	0,02863	1,0	0,0075	0,931096
Měřítko				1,00000	2,7		

Největší vliv na teoretické četnosti má interakce (predikce = 0, sebehodnocení = 0) – odhad příslušného parametru je 3,992. Je to kladné číslo, tedy tento parametr teoretickou četnost zvyšuje. Podíl šancí pro tuto interakci je 54,2, což znamená, že žák, který má míru sebehodnocení 0, má 54x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 0 než žák, který má míru sebehodnocení 2.

Předpovězené hodnoty

	Odezva Hodnota	Před. Hodnota
1	39	38,8
2	21	20,3
3	2	3,0
4	19	19,2
5	26	26,7
6	5	4,0
7	9	11,1
8	19	19,3
9	12	9,7
10	13	10,9
11	51	50,7
12	24	26,3
13	6	4,2
14	6	6,5
15	16	17,3
16	0	1,8
17	8	7,5
18	22	20,7

Výsledek Pearsonova chí-kvadrát testu dobré shody:
$\chi^2 = 4{,}9872$, st. volnosti = 4, p-hodnota = 0,2886

Příklad 3. (R): Jana chodí ráda na výlety. Ráno ušla 12 km, což bylo o 3 km více než odpoledne. Kolik kilometrů Jana ten den ušla?

predikce	reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	0	60	17	1	78
0	1	9	12	4	25
Celk.		69	29	5	103
1	0	15	15	2	32
1	1	9	56	21	86
Celk.		24	71	23	118
2	0	1	0	5	6
2	1	3	17	51	71
Celk.		4	17	56	77
Sloupce celk		97	117	84	298

Optimální model:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_2} + \lambda_{ik}^{X_1X_3} + \lambda_{jk}^{X_2X_3}$$

Jde o model homogenní asociace – všechny tři dvojice proměnných jsou podmíněně nezávislé.

Odhady parametrů

Efekt	cetnost3 - Odhady parametrů (priklady1_5.sta) Rozdělení : POISSONOVO Linkující funkce: LN						
	Úroveň Efekt	Sloupec	kategorie	Odhad	OR	Wald. Stat.	p
Abs.člen		1		3,97017	53,0	850,1680	0,000000
predikce	0	2	0	-2,87953	0,1	32,4820	0,000000
predikce	1	3	1	-0,97291	0,4	14,6958	0,000126
reseni	0	4	0	-2,86932	0,1	34,7506	0,000000
sebehodnoceni	0	5	0	-3,03493	0,0	30,3928	0,000000
sebehodnoceni	1	6	1	-1,23198	0,3	19,3887	0,000011
predikce*reseni	1	7	0*0	2,48367	12,0	20,1795	0,000007
predikce*reseni	2	8	1*0	0,96044	2,6	3,2724	0,070453
predikce*sebehodnoceni	1	9	0*0	4,12027	61,6	31,8798	0,000000
predikce*sebehodnoceni	2	10	0*1	2,72255	15,2	21,6519	0,000003
predikce*sebehodnoceni	3	11	1*0	2,30374	10,0	13,7403	0,000210
predikce*sebehodnoceni	4	12	1*1	2,26591	9,6	37,7718	0,000000
reseni*sebehodnoceni	1	13	0*0	2,30716	10,0	20,4519	0,000006
reseni*sebehodnoceni	2	14	0*1	0,56362	1,8	1,3559	0,244241
Měřítko				1,00000	2,7		

Největší vliv na teoretické četnosti má interakce (predikce = 0, sebehodnocení = 0) – odhad příslušného parametru je 4,12. Je to kladné číslo, tedy tento parametr teoretickou četnost zvyšuje. Podíl šancí pro tuto interakci je 61,6, což znamená, že žák, který má míru sebehodnocení 0, má 61,6x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 0 než žák, který má míru sebehodnocení 2.

Předpovězené hodnoty

	Odezva Hodnota	Před. Hodnota
1	39	38,8
2	21	20,3
3	2	3,0
4	19	19,2
5	26	26,7
6	5	4,0
7	9	11,1
8	19	19,3
9	12	9,7
10	13	10,9
11	51	50,7
12	24	26,3
13	6	4,2
14	6	6,5
15	16	17,3
16	0	1,8
17	8	7,5
18	22	20,7

Výsledek Pearsonova chí-kvadrát testu dobré shody:
$\chi^2 = 4{,}8356$, st. volnosti = 4, p-hodnota = 0,3046

Příklad 4. (NR): V kouzelné zahradě rostou dva druhy kouzelných stromů. Na stromech jednoho druhu roste 6 hrušek a 3 jablka, na stromech druhého druhu 8 hrušek a 4 jablka. V zahradě je celkem 25 jablek. Kolik je tam hrušek?

predikce	reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	0	28	33	10	71
0	1	13	12	3	28
Celk.		41	45	13	99
1	0	18	48	27	93
1	1	9	25	12	46
Celk.		27	73	39	139
2	0	2	8	34	44
2	1	0	5	11	16
Celk.		2	13	45	60
Sloupce celk		70	131	97	298

Optimální model:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_3}$$

Jde o model sdružené nezávislosti – proměnné ve dvojici (predikce, sebehodnocení) jsou závislé, avšak proměnné ve dvojicích (predikce, řešení) a (řešení, sebehodnocení) jsou nezávislé.

Odhady parametrů

Efekt	cetnost4 - Odhady parametrů (priklady1_5.sta) Rozdělení : POISSONOVO Linkující funkce: LN						
	Úroveň Efekt	Sloupec	kategorie	Odhad	OR	Wald. Stat.	p
Abs.člen		1		2,60938	13,6	227,1313	0,000000
predikce	0	2	0	-1,24171	0,3	15,5514	0,000080
predikce	1	3	1	-0,14310	0,9	0,4278	0,513050
reseni	0	4	0	0,83773	2,3	44,0855	0,000000
sebehodnoceni	0	5	0	-3,11352	0,0	18,5629	0,000016
sebehodnoceni	1	6	1	-1,24171	0,3	15,5514	0,000080
predikce*sebehodnoceni	1	7	0*0	4,26214	71,0	29,1336	0,000000
predikce*sebehodnoceni	2	8	0*1	2,48343	12,0	31,1029	0,000000
predikce*sebehodnoceni	3	9	1*0	2,74579	15,6	12,8900	0,000330
predikce*sebehodnoceni	4	10	1*1	1,86861	6,5	25,2136	0,000001
Měřítko				1,00000	2,7		

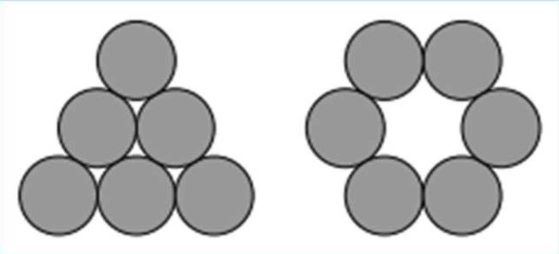
Největší vliv na teoretické četnosti má interakce (predikce = 0, sebehodnocení = 0) – odhad příslušného parametru je 4,262. Je to kladné číslo, tedy tento parametr teoretickou četnost zvyšuje. Podíl šancí pro tuto interakci je 71, což znamená, že žák, který má míru sebehodnocení 0, má 71x vyšší šanci, že bude mít míru predikce 0 než žák, který má míru sebehodnocení 2.

Předpovězené hodnoty

	Odezva Hodnota	Před. Hodnota
1	28	28,6
2	33	31,4
3	10	9,1
4	13	12,4
5	12	13,6
6	3	3,9
7	18	18,8
8	48	51,0
9	27	27,2
10	9	8,2
11	25	22,0
12	12	11,8
13	2	1,4
14	8	9,1
15	34	31,4
16	0	0,6
17	5	3,9
18	11	13,6

Výsledek Pearsonova chí-kvadrát testu dobré shody:
$\chi^2 = 3{,}3158$, st. volnosti = 4, p-hodnota = 0,9130

Příklad 5. (NR): Filip položil 6 stejných mincí do tvaru trojúhelníka (jako je na obrázku). Kolik nejméně mincí musel přemístit, aby mince tvořily kruh jako na druhém obrázku?



predikce	reseni	sebehodnoceni 0	sebehodnoceni 1	sebehodnoceni 2	Řádk. součty
0	0	17	41	27	85
0	1	6	11	9	26
Celk.		23	52	36	111
1	0	15	31	15	61
1	1	6	35	19	60
Celk.		21	66	34	121
2	0	13	9	5	27
2	1	3	7	29	39
Celk.		16	16	34	66
Sloupce celk		60	134	104	298

Optimální model:

$$\ln \mu_{ijk} = \lambda + \lambda_i^{X_1} + \lambda_j^{X_2} + \lambda_k^{X_3} + \lambda_{ij}^{X_1X_2} + \lambda_{ik}^{X_1X_3} + \lambda_{jk}^{X_2X_3} + \lambda_{ijk}^{X_1X_2X_3}$$

Jde o saturovaný model, který obsahuje všechny možné interakce všech tří proměnných.

Odhady parametrů

Efekt	cetnost5 - Odhady parametrů (priklady1_5.sta) Rozdělení : POISSONOVO Linkující funkce: LN Úroveň Efekt	Sloupec	kategorie	Odhad	OR =exp(Odha	Wald. Stat.	p
Abs.člen		1		3,36730	29,00	328,8218	0,000000
predikce	0	2	0	-1,17007	0,31	9,4033	0,002166
predikce	1	3	1	-0,42286	0,66	2,0526	0,151950
reseni	0	4	0	-1,75786	0,17	13,1782	0,000283
sebehodnoceni	0	5	0	-2,26868	0,10	13,9932	0,000183
sebehodnoceni	1	6	1	-1,42139	0,24	11,3925	0,000737
predikce*reseni	1	7	0*0	2,85647	17,40	21,3245	0,000004
predikce*reseni	2	8	1*0	1,52147	4,58	6,5432	0,010528
predikce*sebehodnoceni	1	9	0*0	1,86322	6,44	5,3773	0,020400
predikce*sebehodnoceni	2	10	0*1	1,62206	5,06	6,9355	0,008450
predikce*sebehodnoceni	3	11	1*0	1,11600	3,05	2,1213	0,145260
predikce*sebehodnoceni	4	12	1*1	2,03229	7,63	15,9750	0,000064
reseni*sebehodnoceni	1	13	0*0	3,22419	25,13	16,1235	0,000059
reseni*sebehodnoceni	2	14	0*1	2,00917	7,46	8,2644	0,004043
1*2*3	1	15	0*0*0	-3,28135	0,04	10,5730	0,001148
1*2*3	2	16	0*0*1	-1,79211	0,17	4,2714	0,038759
1*2*3	3	17	1*0*0	-2,07152	0,13	4,3025	0,038057
1*2*3	4	18	1*0*1	-1,89414	0,15	5,3663	0,020530
Měřítko				1,00000	2,72		

Největší vliv na teoretické četnosti má interakce (predikce = 0, řešení = 0, sebehodnocení = 0) – odhad příslušného parametru je -3,281. Je to záporné číslo, tedy tento parametr teoretickou četnost snižuje. Podíl šancí pro trojnásobnou interakci se však interpretuje obtížně. Druhý nejvyšší vliv má interakce (řešení = 0, sebehodnocení = 0), odhad parametru je 3,224. Podíl šancí pro tuto interakci je 25,1, což znamená, že žák, který má míru sebehodnocení 0, má 25,1x vyšší šanci, že příklad nevyřešil než žák, který příklad míru sebehodnocení 2.

Předpovězené hodnoty se v saturovaném modelu shodují s pozorovanými četnostmi.

	Odezva Hodnota	Před. Hodnota
1	17	17
2	41	41
3	27	27
4	6	6
5	11	11
6	9	9
7	15	15
8	31	31
9	15	15
10	6	6
11	35	35
12	19	19
13	13	13
14	9	9
15	5	5
16	3	3
17	7	7
18	29	29

Závěr

Všechny příklady vyřešilo správně 2,9 % žáků, ani jeden příklad nevyřešilo správně 4,4 % žáků.

Úspěšnost řešení byla vyšší u rutinních příkladů 1, 3 než u nerutinních příkladů 2, 4, 5.

Průměrná míra predikce byla u všech příkladů nižší než průměrná úroveň sebehodnocení.

U úspěšných řešitelů byla průměrná míra predikce vyšší než u neúspěšných řešitelů. Totéž platí i pro průměrnou úroveň sebehodnocení s výjimkou př. 4.

Na hladině významnosti 0,05 se prokázala existence závislosti mezi dvojicemi (míra predikce, řešení) - s výjimkou př. 4, (míra predikce, úroveň sebehodnocení) a také (řešení, úroveň sebehodnocení) – s výjimkou př. 4. U rutinních příkladů 1, 3 jsou tyto závislosti silnější než u nerutinních příkladů 2, 4, 5.

Při log-lineárním modelování se jako optimální jeví u př. 1 model podmíněné nezávislosti, u př. 2 a 3 model homogenní asociace, u př. 4 model sdružené nezávislosti a u př. 5 dokonce saturovaný model.

U všech příkladů má velký vliv na teoretické četnosti interakce dvojice (míra predikce = 0, úroveň sebehodnocení = 0). Podíl šancí pro tuto interakci nabývá u jednotlivých příkladů postupně hodnot 300; 54,2; 61,6; 71; 25,1.

Reference

AGRESTI, Alan. Categorical data analysis. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 2002. ISBN 04-713-6093-7.

HEBÁK, Petr. Statistické myšlení a nástroje analýzy dat. Praha: Informatorium, 2013. ISBN 978-80-7333-105-4.

StatSoft, Inc. (2013). STATISTICA (data analysis software system), version 12. www.statsoft.com.