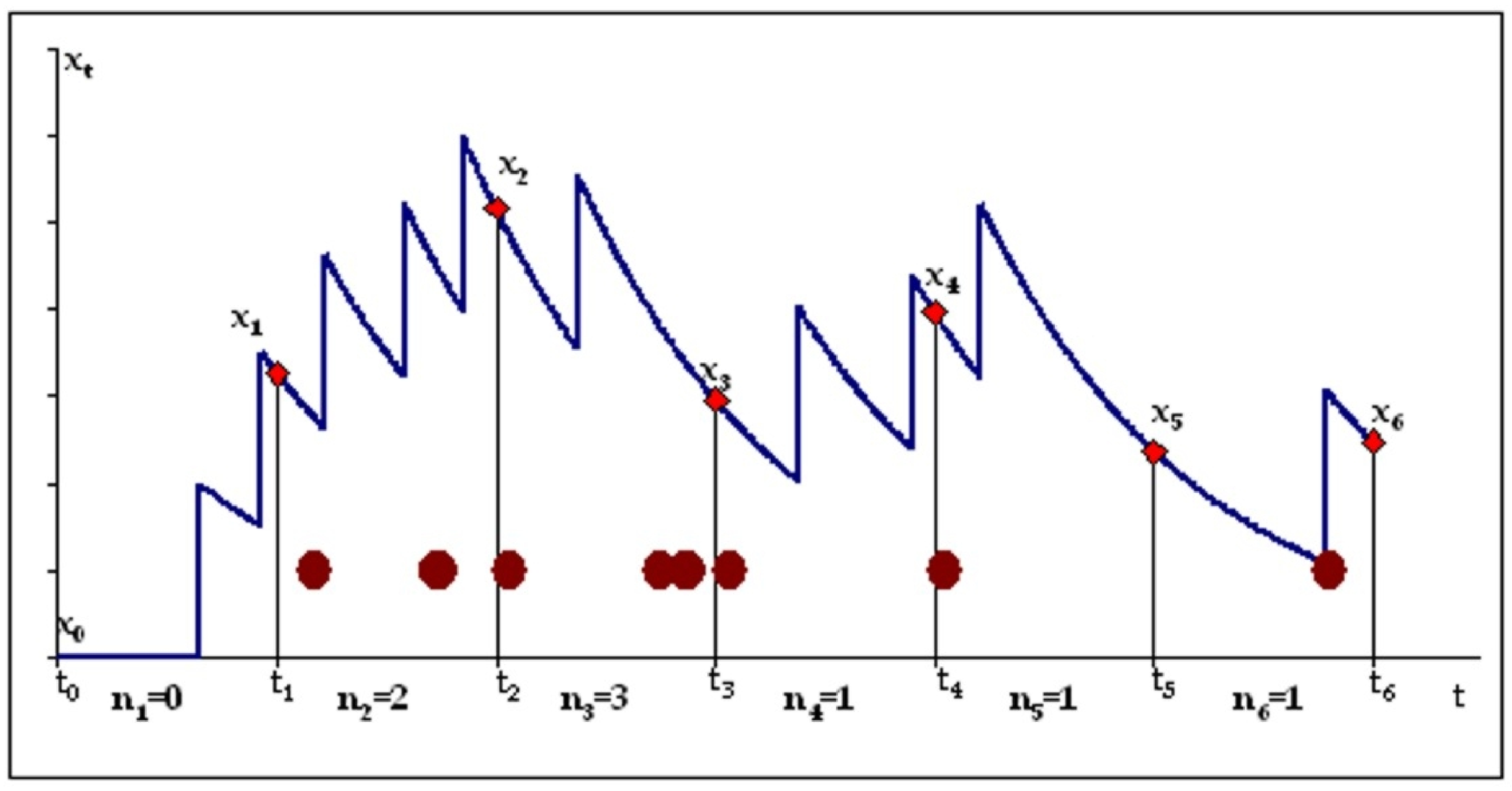
BAYESOVSKÉ MONTE CARLO PŘI FILTROVÁNÍ BODOVÝCH PROCESŮ

Radka Lechnerová[1], Viktor Beneš[2]

[1] Soukromá vysoká škola ekonomických studií, s. r. o., Lindnerova 575, Praha 8
[2] Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Sokolovská 83, Praha 8
e-mail: radka.lechnerova@svses.cz, benesv@karlin.mff.cuni.cz

FILTROVÁNÍ PRO COXŮV BODOVÝ PROCES



. . . Coxův bodový proces N
. . . náhodná intenzita X_t procesu N
. . . filtrovaná hodnota
Odhad . . . podmíněná střední hodnota $E(X_k \mid N_1, \dots, N_k)$

Bayesův přístup – podmíněné rozdělení s hustotou

$$f(x_1, \dots, x_k \mid n_1, \dots, n_k) \propto f(n_1, \dots, n_k \mid x_1, \dots, x_k) f(x_1, \dots, x_k),$$

n_i . . . četnosti bodů procesu N v intervalech $(t_{i-1}; t_i]$, $\triangle = t_i - t_{i-1}$
X_t . . . Markovův proces

$$f(x_1, \dots, x_k \mid n_1, \dots, n_k) \propto \prod_{i=1}^k f(n_i \mid x_i) \prod_{i=1}^k f(x_i \mid x_{i-1})$$

- $f(n_i \mid x_i)$ . . . pravděpodobnost Poissonova rozdělení ($\approx \frac{(x_i \triangle)^{n_i}}{n_i!} e^{-x_i \triangle}$)
- $f(x_i \mid x_{i-1})$ . . . přechodová hustota.

MCMC – Metropolis-Hastingsův algoritmus

- simulace z $f(x_1, \dots, x_k \mid n_1, \dots, n_k)$
- návrhová hustota pro každé x_i – Gaussovská náhodná procházka
- pravděpodobnost přijetí:

$$\alpha(y, x_i) = \min(1, h(y, x_i))$$

kde $h(y, x_i)$ je Metropolis-Hastingsův poměr pro návrh y místo x_i.

MODEL

$$dX(t) = -\gamma X(t) dt + dZ(\gamma t), \; \gamma > 0$$

$Z(t)$ . . . Poissonův bodový proces s intenzitou ν

Přechodová charakteristická funkce

$$M_t(x, y) = \exp\left[ibxy + \nu \int_b^1 \frac{\exp(iyz) - 1}{z} dz \right],$$

kde $b = e^{-\gamma t}$.

Přechodová hustota
diskretizace: $t = \triangle$, $a = b^\nu$

$$f(x_i \mid x_{i-1}) = a p_G(x_i - b x_{i-1}) + \\ +(1 - 2a) p_1(x_i - b x_{i-1}) + a \delta_{(b x_{i-1})}(x_i),$$

kde funkce charakterizují počet skoků v daném intervalu
(0 skoků . . . δ, 1 skok . . . p_G - analyticky, 2 a více . . . p_1 - FFT)

Odhad parametrů modelu – Bayesovské MCMC

parametry: $\theta = (\gamma, \nu)$

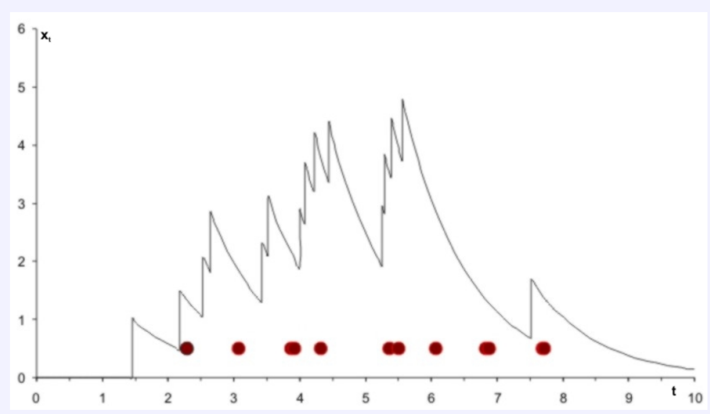
$$f(x_1, \dots, x_k, \theta \mid n_1, \dots, n_k) \propto \\ \propto f(n_1, \dots, n_k \mid x_1, \dots, x_k, \theta) f(x_1, \dots, x_k \mid \theta) f(\theta),$$

kde $f(\theta)$ je apriorní rozdělení θ.

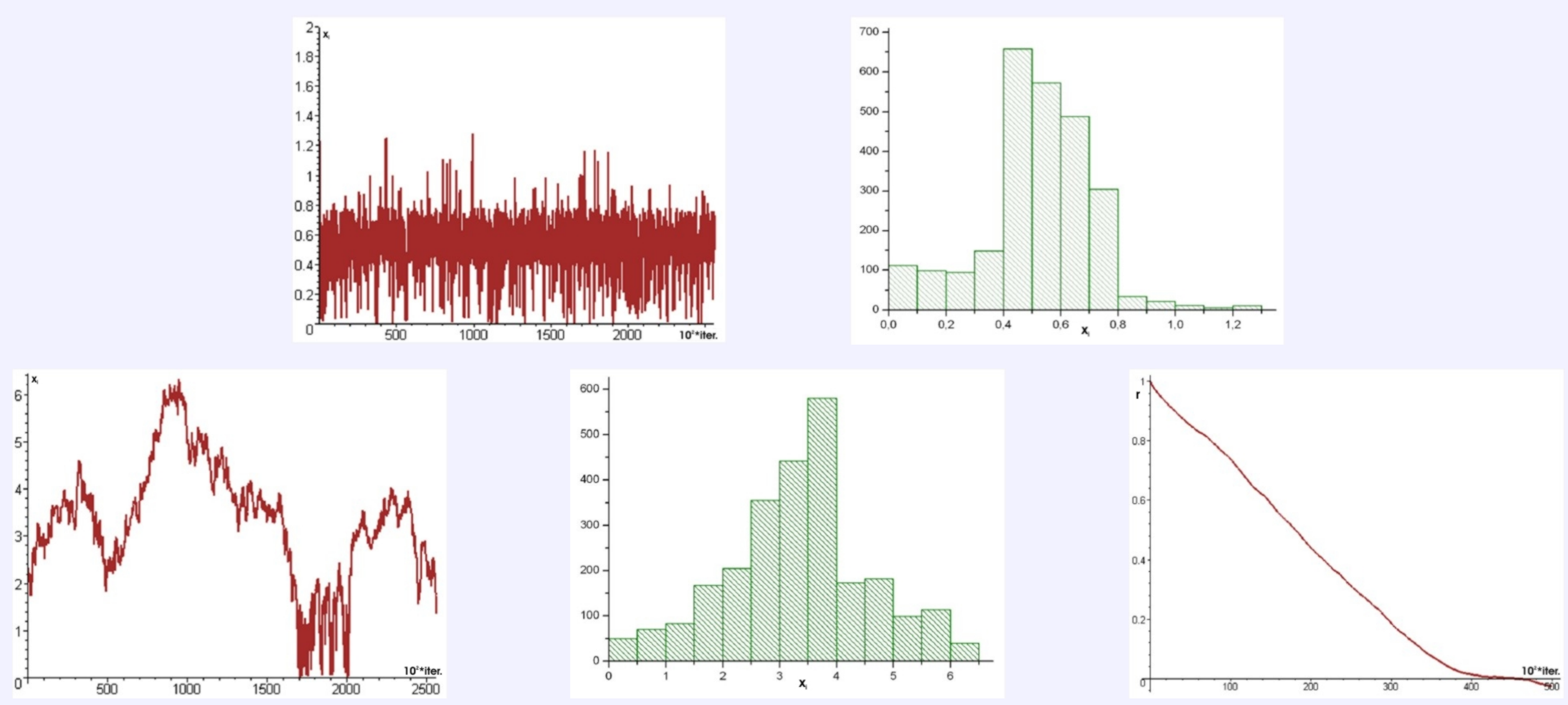
PŘÍKLAD

Známé vstupy: $x_0 = 0, \nu = 2, \gamma = 1, T = 10, k = 20$

$n = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 0]$



Průběh simulace, marginální aposteriorní rozdělení, (výběrová korelace) pro X_{20} a X_{14}:



PODĚKOVÁNÍ

Práce vznikla s přispěním grantů MŠMT 0021620839 a GAČR 201/06/0302.

LITERATURA

[1] Snyder DL: Filtering and detection for doubly stochastic Poisson processes. IEEE Trans. Inform. Theory IT-18, 91-102, 1972.
[2] Brix A, Diggle PJ: Spatio-temporal prediction for log-Gaussian Cox processes. Journal of the Royal Statistical Society Series, 2002. B 63: 823-841.