Kvantily v autoregresním modelu

Andrea Karlová

karlova@karlin.mff.cuni.cz

KPMS, MFF UK, Praha

Příspěvek ukazuje použití regresních kvantilů při zjišťování asymetrie v časové řadě burzovního indexu zachycujícího vývoj ceny ropy na New Yorkské burze.

KVANTILOVÝ AUTOREGRESNÍ MODEL

Mějme $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ p-dimenzionální Euklidovský prostor. Nechť $\boldsymbol{\theta}(\cdot)$ je monotonní funkce na $[0,1]^{p+1}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^{p+1}$, $U_1, \ldots, U_n$ je náhodný výběr z $R[0,1]$ a $\{X_t; t \in T \subset \mathbb{Z}\}$ je časová řada. Přirozeně definujme autoregresní model jako:

$$X_t = \theta_0(U_t) + \theta_1(U_t)X_{t-1} + \ldots + \theta_p(U_t)X_{t-p}$$

kde $\boldsymbol{\theta(\cdot)} = (\theta_o(\cdot), \ldots, \theta_p(\cdot))'$ je vektor neznámých funkcí, které chceme odhadnout.

Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je adaptovaný proces k filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Použitím věty o transformaci jednoduše dostáváme podmíněnou kvantilovou funkci:

$$F^{-1}(\alpha|\mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0(\alpha) + \theta_1(\alpha)X_{t-1} + \ldots + \theta_p(\alpha)X_{t-p}$$

Označíme-li $\mathbf{Y_t} = (1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})'$ a zavedeme-li normu $\rho_\alpha(x) = |x|\{(1-\alpha)I(x<0) + \alpha I(x>0)\}$ pro $x \in \mathbb{R}$, získáme autoregresní $\alpha-$kvantil $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\alpha)$ jako $\sum_{t=1}^n \rho_\alpha(X_t - \mathbf{Y_t'}\boldsymbol{\theta}) =: min!$

TEST ASYMETRIE

Popišme test, který je možné použít ke zjišťování asymetrické dynamiky v modelu časové řady, tj. zajímá nás, je-li model, jehož parametry odhadujeme, dostatečně dobře popsán pomocí konstatních parametrů nebo zda-li je nutné zohlednit při konstrukci modelu i toto asymetrické chování.

Označme $R = [\mathbf{0}|\mathbf{I}_p]$ matici o rozměrech $p \times (p+1)$. Nulovou hypotézu můžeme jednoduše formulovat jako

$$H_0 : R\boldsymbol{\theta}(\alpha) = \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^p$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ je vektor odhadnutých hodnot. Alternativa je, že $\boldsymbol{\theta(\cdot)} = (\theta_o(\cdot), \ldots, \theta_p(\cdot))'$ je vektor monotónních funkcí, z nichž alespoň jedna je nekonstantní.

Označme $\Omega_0 = \mathbb{E}(\mathbf{Y_t}\mathbf{Y_t'})$, $F_{t-1}(\cdot) = P[X_t < \cdot|\mathcal{F}_{t-1}(\alpha)]$ a předpokládejme navíc, že existuje derivace $f_{t-1}(\cdot)$ k $F_{t-1}(\cdot)$. $\Omega_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f_{t-1}(F_{t-1}^{-1}(\alpha))\mathbf{Y_t}\mathbf{Y_t'}$. Nechť $\hat{\Omega}_0$ (resp. $\hat{\Omega}_1$) je konzistentní odhah k Ω_0 (resp. Ω_1). Pro zjednodušení označme $\Sigma = \hat{\Omega}_1^{-1}\hat{\Omega}_0\hat{\Omega}_1^{-1}$. Proces $\hat{V}_n(\alpha) = \sqrt{n}\,[R\Sigma R]^{-\frac{1}{2}}(R\hat{\boldsymbol{\theta}}(\alpha) - \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ konverguje slabě k Brownovu můstku s driftem.

Zavedení $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ kazí asymptotické vlastnosti odhadu. Khmaladze v [1] navrhl martingalovou tranformaci $\mathcal{K}$, která tyto vlastnosti testové statistice navrací. Označme $\tilde{V}(\alpha) = \mathcal{K}\hat{V}(\alpha)$. Kolmogorovu-Smirnovovu testovou statistiku můžeme psát ve tvaru:

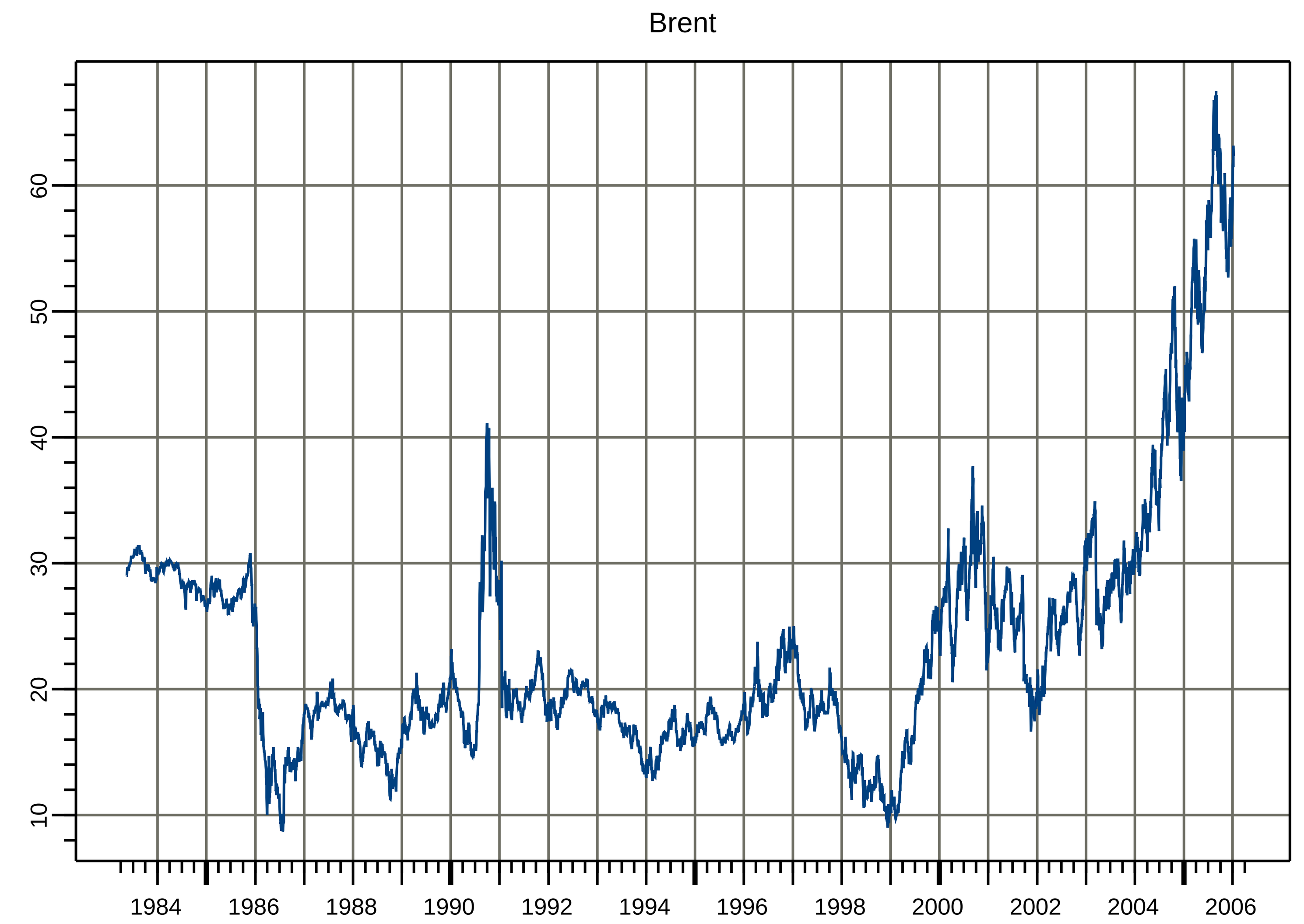
$$T_n = \sup_{\alpha \in \mathcal{I}} \|\tilde{V}(\alpha)\|$$

Kritické hodnoty testu Kh_p jsou tabelovány pro různé hodnoty p a hladiny spolehlivosti α^* v Koenker a Xiao [3]. V případě, že $T_n > Kh_p(\alpha^*)$, zamítáme H_0 na příslušné hladině spolehlivosti α^*.

ASYMETRIE V CENĚ ROPY

Vývoj ceny ropy na světových trzích

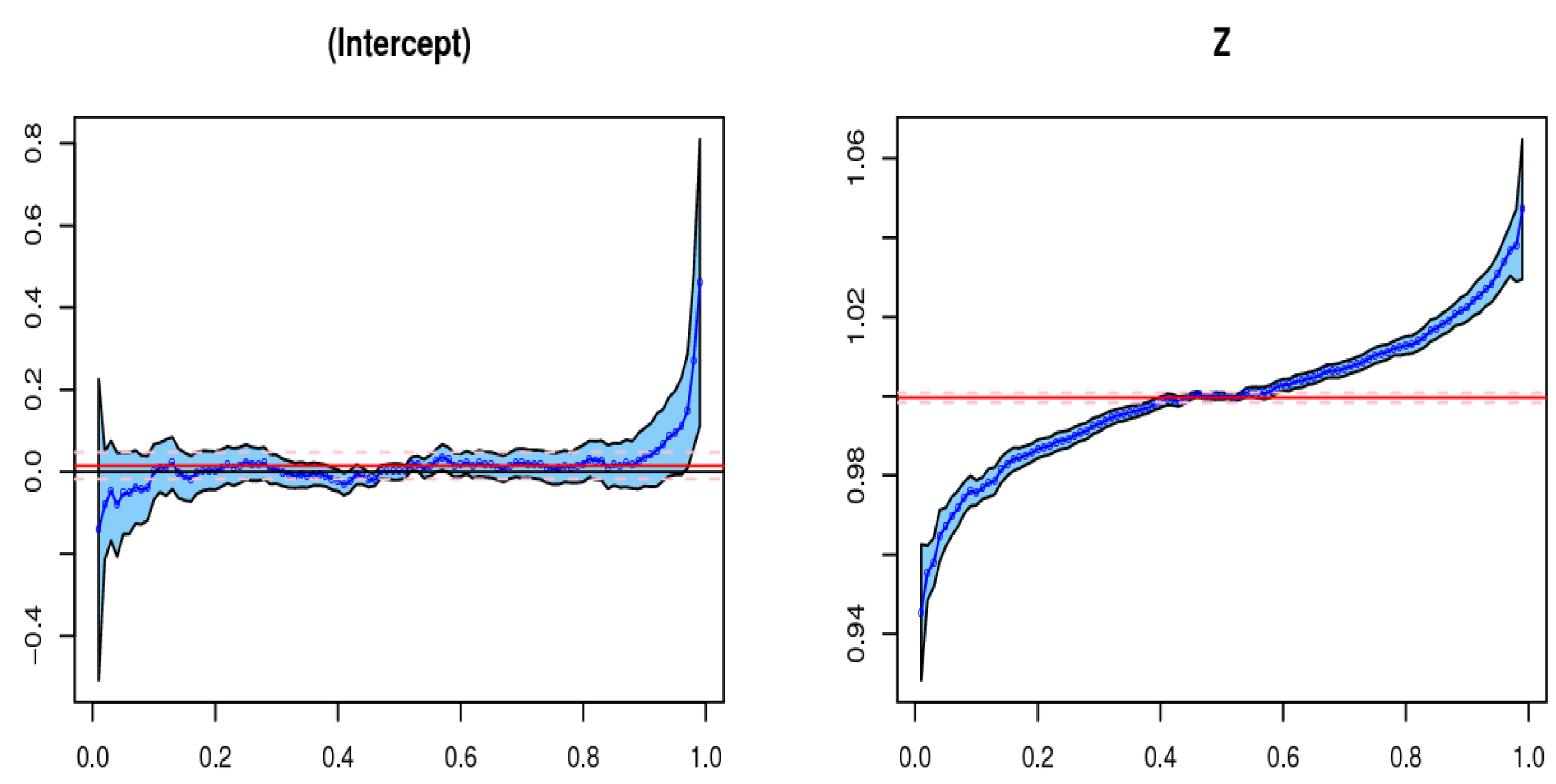
Analyzovaná data vznikají na základě kotací velkých hráčů na světových trzích a vývoj ceny odráží nálady a očekávání účastníků trhu. Asymetrie v těchto řadách charakterizuje skutečnost, že občasné cenové výkyvy jsou díky spekulacím obchodníků často odlehlými pozorováními. Při hledání vhodného modelu, který uspokojivě aproximuje pohyb burzovních dat, je nutné brát tuto skutečnost v úvahu. Testujeme tedy, zda časová řada nevykazuje asymetrické chování systematicky. V takovém případě je nutné zakomponovat tuto skutečnost do navrhovaného modelu.



K dispozici máme denní hodntoty od 16.5.1983 do 16.1.2006 Brent Crude Oil NYMEX, jednoho z indexů ceny ropy New Yorské burzy. Počet pozorování je 5728.

Testování asymetrie

Řád modelu $p = 1$ byl odhadnut AIC kriteriem. Výpočet byl proveden ve výpočetním prostředí R. Hodnota testové statistiky je $T_n = 2,387311$, tabelovaná kritická hodnota testu na hladině spolehlivosti $0,05$ pro p=1 je $2,14$. Konstantnost koeficientů tedy byla zamítnuta na hladině významnosti 5%.



Obrázek znázorňuje chování absolutního členu a autoregresního koeficientu v závislosti na kvantilu. V případě absolutního členu konstantní koeficient dobře vystihuje chování parametru modelu. Podíváme-li se na autoregresní člen, vidíme, že pro nižší kvantily má proces tendenci navracet se ke středu, v případě vyšších kvantilů proces projevuje expolizivní chování. To také indikuje, že rozdělení, ze kterého časová řada pochází, má těžší chvosty než normální.

Poděkování. Děkuji ČSOB za poskytnutí přístupu k tržním datům.

Reference.

[1] Khmaladze E. (1981) *Martingale Approach to the goodness of fit test.* Theory Prob. Appl. **26**, 246 – 265

[2] Koenker R., Xiao Z. (2002) *Inference on the quantile Regression Processes.* Econometrica **70**, 1583 – 1612

[3] Koenker R., Xiao Z. (2001) *Inference on the quantile Regression Processes:Appendices.* `http://www.econ.uiuc.edu/~roger/research/inference`