ZAJIŠTĚNÍ V POJIŠŤOVNICTVÍ A JEHO MATEMATICKÉ ASPEKTY

Tomáš Cipra

Abstrakt: O existenci zajištění v pojišťovnictví a o jeho fungování veřejnost příliš neví, přestože je to jeden z pilířů současného pojišťovnictví. Málokterý pojištěný u nás tuší, že značná část pojistného, které zaplatil české pojišťovně, putuje po převodu na eura nebo švýcarské franky do zahraničních zajišťoven (např. do největších světových zajišťoven Munic Re v Mnichově a Swiss Re v Curychu) a že naopak tyto zajišťovny hradí podstatnou část škody, kterou pojištěný utrpěl při pojistné události. Žádná pojišťovna u nás si nedovolí (zvlášť po povodňových zkušenostech) pracovat bez zajištění, neboť se vlastně jedná o „pojištění pojišťovny". Také výše sazeb, které pojišťovny předepisují svým klientům, se z velké míry odvíjí od situace na zajistných trzích, a to zvlášť v současném světě klimatických změn a narůstajících přírodních a společenských katastrof.

Tento příspěvek nejprve prezentuje základní principy zajištění, které se poněkud liší od principů přímého pojištění (po právní, metodologické i výpočetní stránce). Z hlediska statistiky je zde nutné zdůraznit fakt, že velké zajišťovny disponují velmi rozsáhlými a kvalitními statistickými archivy diverzifikovanými přes rozsáhlá geografická území, které často dávají po příslušném statistickém zpracování (nebo i ve zdrojové podobě) k dispozici zajišťovaným pojišťovnám. Dále se příspěvek soustřeďuje na některé matematické postupy využívané v zajištění, které mají kořeny především v teorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Protože součástí dnešního zajištění je alternativní přenos rizik ART (Alternative Risk Transfer), který se snaží převést pojistná rizika nezvládnutelná pojišťovnami na finanční trhy, referuje příspěvek i o těchto postupech využívajících především finanční matematiku.

1 Základní pojmy a principy zajištění

Zajištění je vlastně "pojištění pojišťovny". Zajišťovná pojišťovna se v tomto kontextu obvykle označuje jako prvopojistitel a zajišťující zajišťovna jako zajistitel. Následující tabulky 1-3 uvádí některé aktuální údaje, které mají souvislost se současným stavem zajištění ve světě:

1.1 Význam zajištění

Význam zajištění spočívá mimo jiné v následujících pozitivních skutečnostech:

- zvýšení kapacity pojistitele
- homogenizace pojistného kmene
- rozprostření a diverzifikace pojistných rizik (viz obrázky 1-3)

- dosažení finančních výhod
- získání profesionálních služeb zajistitele

Událost	Datum	Oblast	Počet obětí	Pojištěná škoda (mil. USD)
Hurikán Andrew	23.08.1992	USA (Bahamy)	38	20 185
Teroristický útok v USA	11.09.2001	USA (New York aj.)	3 122	19 000
Zemětřesení v Northridge	17.01.1994	USA (Kalifornie)	60	16 720
Tajfun Mireille	27.09.1991	Japonsko	51	7 338
Větrná smršť Daria	25.01.1990	Francie, UK aj.	95	6 221
Větrná smršť Lothar	25.12.1999	Francie, Švýcarsko aj.	80	6 164
Hurikán Hugo	15.09.1989	Portoriko, USA aj.	61	5 990
Záplavy a bouře (záp. Evropa)	15.10.1987	Francie, UK aj.	22	4 674
Větrná smršť Vivian	25.02.1990	západní a střední Evropa	64	4 323
Tajfun Bart	22.09.1999	Japonsko	26	4 293

Pramen: Sigma 2002, No. 1

Tabulka 1: Deset celosvětově největších pojištěných škod katastrofického charakteru za období 1970-2001 v mil. USD indexovaných k roku 2001 (s vyloučením odpovědnostních škod).

Typ katastrofy	Počet katastrof	Počet obětí	Pojištěná škoda (mil. USD)
Přírodní katastrofy	111	22 803	10 010
Velké požáry a výbuchy	40	921	3 748
Letecké katastrofy	17	785	1 094
Lodní katastrofy	22	1 609	
Silniční a železniční katastrofy	75	2 061	
Důlní neštěstí	18	959	68
Zřícení budov a mostů	5	156	
Terorismus, sociální nepokoje	4	3 165	19 398
Jiné velké katastrofy	23	591	74
Celkem	315	33 050	34 392

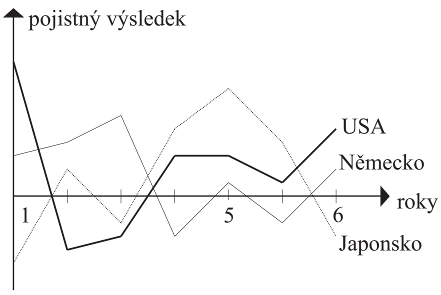
Pramen: Sigma 2002, No. 1

Tabulka 2: Pojištěné škody katastrofického charakteru podle škodních kategorií globálně za rok 2001.

Zajistitel		Předepsané zajistné (mil. USD)	Retrocese (%)	Škodní průběh (%)	Náklad. koeficient (%)
Munich Re	NP	13 072,3	17,0	104,5	30,6
	ŽP	3 882,5	10,0	NA	23,3
Swiss Re	NP	10 265,7	10,2	95,0	29,0
	ŽP	5 428,0	7,5	NA	4,7
General Cologne Re	NP	5 830,0	8,9	133,9	26,4
	ŽP	2 005,0	7,3	81,8	22,3
Lloyd's	NP	5 743,6	9,0	NA	NA
	ŽP				
GE Global	NP	5 551,0	30,2	101,6	38,9
	ŽP	1 841,0	23,8	84,2	32,9
Hannover Re	NP	4 837,9	41,4	99,4	16,3
	ŽP	1 579,6	26,3	NA	NA
Gerling Global Re	NP	3 462,3	13,7	109,2	25,9
	ŽP	1 037,4	18,8	64,2	22,3
AXA Corp.Solutions	NP	3 294,8	35,9	97,5	29,6
	ŽP				
Berkshire Hathaway	NP	2 953,0	1,0	117,0	5,0
	ŽP				
SCOR	NP	2 809,2	18,0	100,0	29,0
	ŽP	493,7	16,0	83,0	27,0

Pramen: Reinsurance 33, 2002, No. 3

Tabulka 3: Deset celosvětově největších zajistitelů za rok 2001 seřazených podle předepsaného zajistného v mil. USD pro neživotní pojištění po odečtení retrocese.

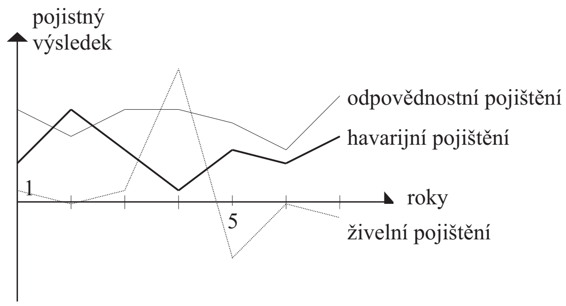


Obrázek 1: Teritoriální diverzifikace pojistných výsledků pomocí zajištění.

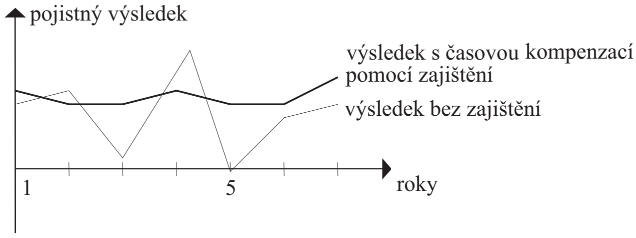
1.2 Právní aspekty zajištění

Jako základní právní principy zajištění se uvádí:

- *princip odškodnění* (indemnity): odškodňuje se jednoznačná finanční ztráta, kterou utrpěl prvopojistitel (tj. zajišťovaná pojišťovna);



Obrázek 2: Produktová diverzifikace pojistných výsledků pomocí zajištění.



Obrázek 3: Časová diverzifikace pojistných výsledků pomocí zajištění.

- *princip dobré víry* (utmost good faith): zajistná smlouva má do jisté míry charakter "džentlmenské dohody" spoléhající na serióznost smluvních partnerů, tj. prvopojistitele (neboli zajišťované pojišťovny) a zajistitele (neboli zajišťující zajišťovny);
- *princip smluvního společenství zájmů* (privity of contract): prvopojistitel zůstává ve vztahu k původnímu pojištěnému za dané riziko plně odpovědný (zajistná smlouva je právně zcela oddělena od původní pojistné smlouvy mezi klientem pojišťovny a pojišťovnou).

Velmi důležitou právní úlohu hrají také tzv. klauzule zajistných smluv, které jsou specialitou zajistných vztahů:

(1) *n-hodinová klauzule* (hour clause; n-Stundenklausel):

   – používá se při potenciálních přírodních nebo společenských katastrofách s delší škodní expozicí a znamená, že u dané škodní události jsou kryty pouze ty škody, které se kumulují nejdéle během intervalu délky n hodin;

   – obvykle je:

      - 48 hodin: pro vichřice a hurikány;

- 72 hodin: pro zemětřesení (včetně mořských), rozsáhlé požáry (např. celých území), vulkanické erupce, politická rizika (např. občanské nepokoje);
- 168 hodin: pro povodně a záplavy;
- 504 hodin: pro záplavy;

– důležitá jsou v této souvislosti také upřesnění, zda
  - pojištěná rizika různého typu budou spadat pod jednu katastrofu (např. záplavy způsobené hurikánem);
  - daná katastrofa je omezena také územně (např. povodím řeky při povodních, územím města při nepokojích apod.).

(2) *Klauzule: věcný rozsah zajistného krytí:*

– *All Risks* zajištění kryje všechna rizika kromě těch, která jsou explicitně uvedena jako výluky (tj. "co není vyloučeno, je automaticky zajištěno");
– *Named Perils* zajištění kryje jen explicitně uvedená rizika (tj. "co není uvedeno, je automaticky ze zajištění vyloučeno").

(3) *Klauzule: indexace:*

– v případech, kdy zajistný vztah trvá delší dobu (několik let), se může během takové doby v důsledku inflace značně zvýšit cenová úroveň škod a při neměnné výši priority by se zvýšilo škodní zatížení zajistitele; proto se provádí indexovaní;
– *výluky ze zajištění:* jejich důvodem může být:
  - stejná výluka v pojistných podmínkách prvopojistitele;
  - problém pojistitelnosti (např. jaderná nebo válečná rizika včetně teroristických činů)
  - potenciální překročení kapacity zajistitele (např. ekologická rizika včetně kontaminace radonem či azbestem).

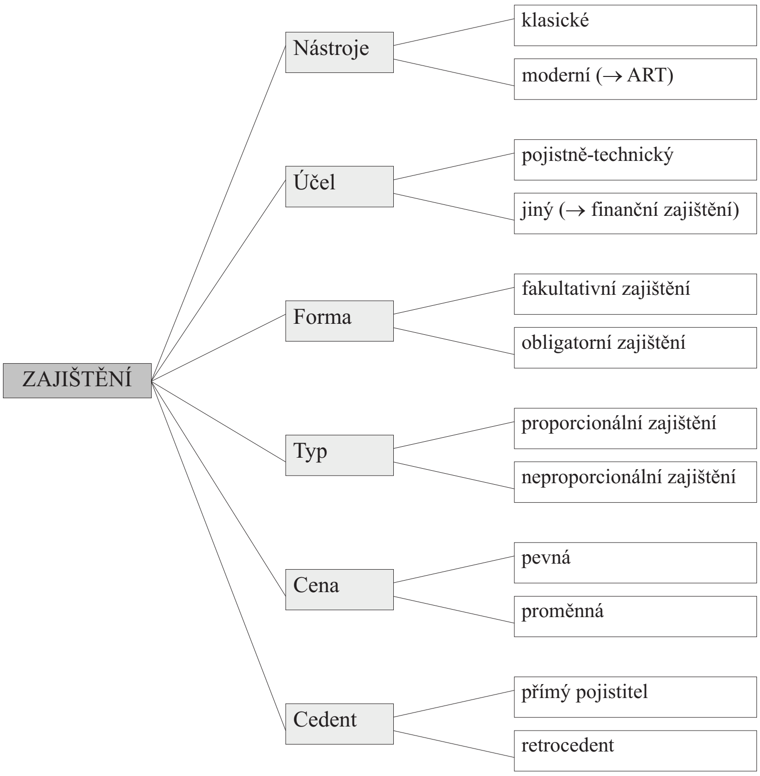
(4) *Klauzule: sdílení osudu a jednání:*

– Zajistitel je podřízen:
  - stejným vnějším podmínkám ovlivňujícím průběh pojištění jako prvopojistitel (např. klimatickým podmínkám);
  - všem rozhodnutím a jednáním, které prvopojistitel v rámci daného pojištění provádí (např. uzavírání, odmítání, změny a výpovědi pojistných smluv, stanovení a změny pojistných podmínek, kalkulace pojistného, správa pojištění, likvidace škod aj.).

(5) *Klauzule: arbitráž:*

– případné spory mezi smluvními stranami v zajištění řeší rozhodčí komise.

2 Klasifikace zajištění



Obrázek 4: Klasifikace zajištění.

2.1 Formy zajištění: fakultativní a obligatorní

Fakultativní zajištění: prvopojistitel a zajistitel zvažují situaci případ od případu, přičemž prvopojistitel není smluvně povinen příslušnou pojistnou smlouvu k zajištění nabídnout a zajistitel není smluvně povinen ji k zajištění přijmout.

Obligatorní zajištění: při splnění podmínek z rámcové zajistné smlouvy (reinsurance treaty) má zajistitel právo a zároveň povinnost převzít příslušné části rizika z jednotlivých pojistných smluv daného portfolia; přitom ve smyslu principu dobré víry: zajistitel věří, že prvopojistitel bude postupovat při uzavírání zajišťovaného pojistného obchodu a jeho správě kvalifikovaně a vůči zajistiteli spravedlivě, zatímco prvopojistitel se spoléhá na promptní plnění zajistitele v případě potřeby.

2.2 Typy zajištění

Proporcionální zajištění: pojistná částka, pojistné plnění a pojistné se zde dělí mezi prvopojistitele a zajistitele ve sjednaném poměru. V praxi se nejčastěji využívají dva typy proporcionálního zajištění:

- *kvótové zajištění:* poměr pro dělení rizika mezi prvopojistitele a zajistitele je pro každou pojistnou smlouvu stejný;
- *surplus* (nebo *excedentní zajištění*): prvopojistitel ceduje v každé pojistné smlouvě jen tu část rizika, která přesahuje pevně sjednanou hodnotu stejnou pro všechny pojistné smlouvy (odtud ovšem plyne, že na rozdíl od kvótového zajištění poměr pro dělení rizika mezi prvopojistitele a zajistitele může být pro každou pojistnou smlouvu jiný).

Ze statistického hlediska je u proporcionálního zajištění pravděpodobnostní rozdělení pojistného plnění ponechaného prvopojistitelem na jeho vlastní vrub stejné jako před cesí až na jiné měřítko:

Jestliže X_P označuje pojistné plnění ponechané prvopojistitelem z původní hodnoty X před cesí na základě proporcionálního vztahu

$$X_P = \alpha \cdot X$$

pak pro odpovídající pravděpodobnostní hustoty f_P a f náhodných veličin X_P a X platí

$$f_P(x) = f(x/\alpha)/\alpha$$

Dojde přitom sice k proporcionálnímu zmenšení střední hodnoty a směrodatné odchylky původního pojistného plnění

$$E(X_P) = \alpha \cdot E(X) \quad \sigma(X_P) = \alpha \cdot \sigma(X)$$

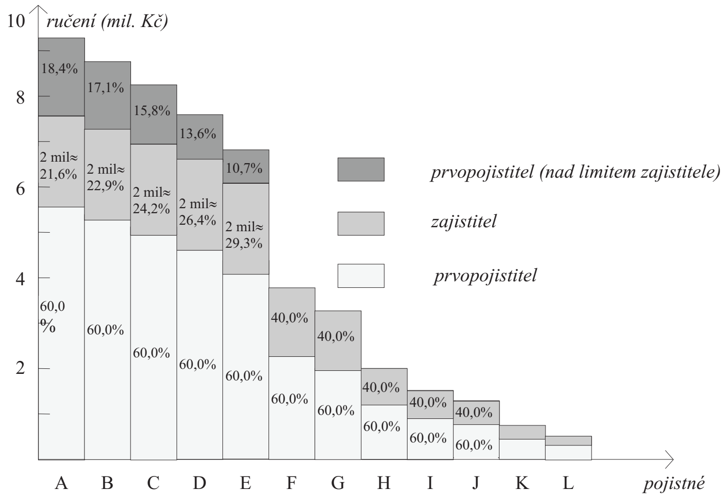
ale nezmění se příslušný variační koeficient

$$\frac{\sigma(X_P)}{E(X_P)} = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

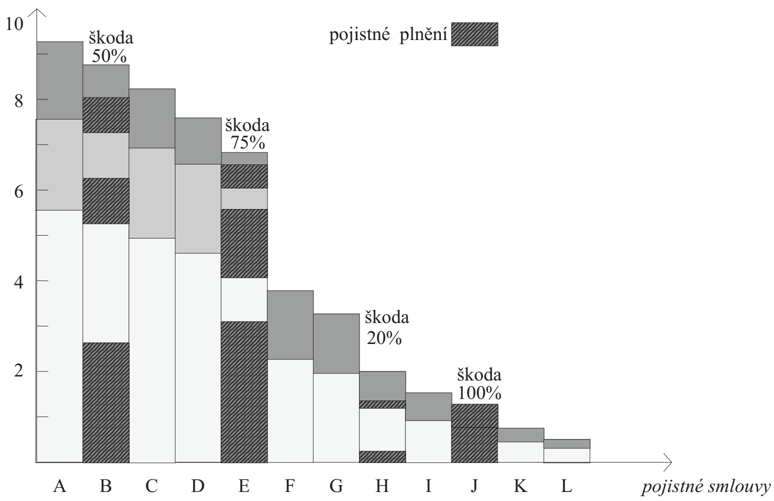
(tj. nezmění se relativní fluktuace pojistného plnění ponechaného na vlastní vrub). Z praktického hlediska se ovšem pro prvopojistitele vylepší jeho solventnostní pozice, neboť v absolutním vyjádření pojistné plnění na jeho vlastní vrub klesne, ale nezmění se jeho volný kapitál důležitý právě pro výkaz solventnosti.

U proporcionálního zajištění není shora omezena výše plnění prvopojistitele, a proto nemusí být dostatečnou ochranou proti vysokým škodám. Z toho důvodu se v takových případech používá neproporcionální zajištění:

Neproporcionální zajištění (nebo *škodové zajištění*): zajistitel za speciálně stanovené zajistné zde přebírá po vzniku škody tu část pojistného plnění prvopojistitele, která přesáhne sjednaný vlastní vrub prvopojistitele nazývaný *priorita:*



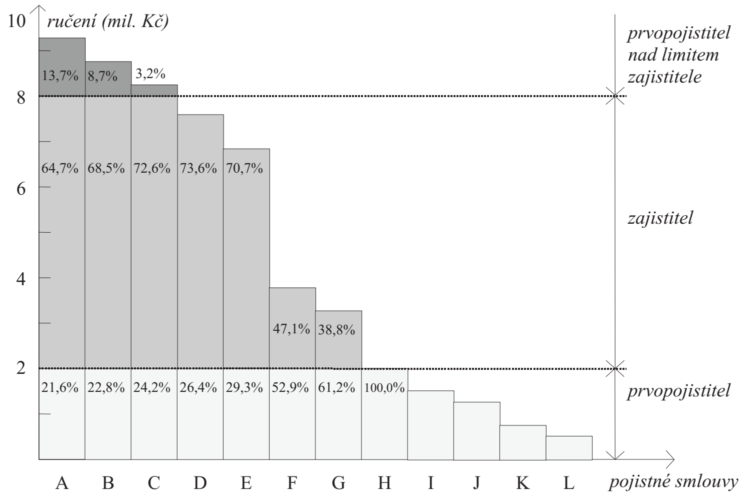
(a)



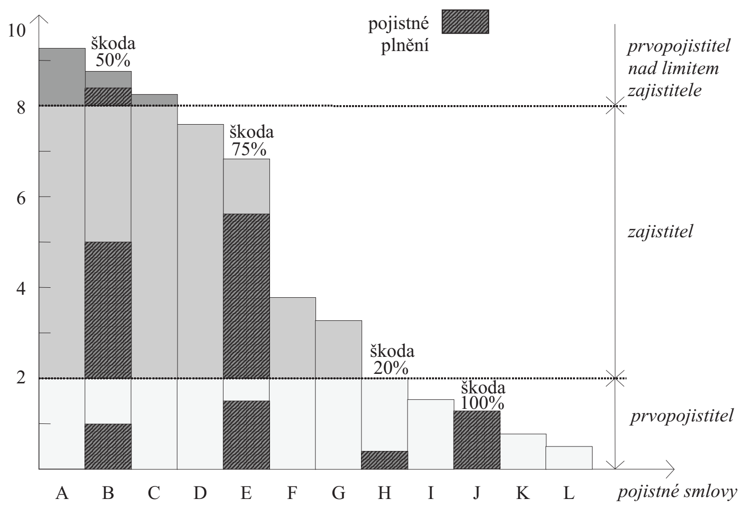
(b)

Obrázek 5: Příklad kvótového zajištění (kvóta zajistitele $q = 40\%$ a limit zajistitele $L = 2$ mil. Kč): (a) ručení; (b) pojistné plnění.

- dochází zde tedy k omezení výše plnění prvopojistitele shora a nikoli ad hoc k proporcionálnímu dělení odpovědnosti mezi prvopojistitele a zajistitele;
- plnění zajistitele je z toho důvodu určováno výhradně výší skutečně vzniklých škod přesahujících prioritu. V praxi se opět nejčastěji využívají dva typy neproporcionálního zajištění;



(a)



(b)

Obrázek 6: Příklad surplusu (vlastní vrub prvopojistitele $s = 2$ mil. Kč a limit zajistitele ve výši tří maxim, tj. $L = 6$ mil. Kč): (a) ručení; (b) pojistné plnění.

- *XL zajištění* (nebo *zajištění škodního nadměrku*): pevně sjednaná priorita se v souvislosti s dalším členěním XL zajištění uplatňuje buď zvlášť pro jednotlivé pojistné smlouvy, nebo souhrnně pro více pojistných smluv zasažených současně nějakou katastrofickou událostí s kumulací škod;

- *SL zajištění* (nebo *zajištění ročního nadměrku*): spoluúčast prvopojistitele se zde uplatňuje v rámci celoročního objemu škod a má často tvar mezní hranice pro škodní průběh, nad níž zajistitel plní.

Ze statistického hlediska dochází u neproporcionálního zajištění k podstatné redukci fluktuací (měřených směrodatnou odchylkou) všech hodnot ponechaných prvopojistitelem na jeho vlastní vrub: jestliže označuje a prioritu prvopojistitele a L limit zajistitele, pak např. střední hodnota pojistného plnění prvopojistitelem má tvar

$$E(X_P) = \int_0^a x \cdot f(x)dx + a \cdot \int_a^{a+L} f(x)dx + \int_{a+L}^{\infty} (x - L) \cdot f(x)dx$$

V praxi se provádí podrobnější členění neproporcionálního zajištění:

(1) *WXL/R zajištění* (nebo *zajištění škodního nadměrku jednotlivých rizik*) zajišťuje prvopojistitele proti jednotlivým (velkým) škodám:

 – je-li nějaká (jednotlivá) pojistná smlouva ze zajišťovaného portfolia postižena pojistnou událostí s pojistnými nároky převyšujícími prioritu prvopojistitele, pak vzniklý nadměrek hradí zajistitel (ale jen do výše jeho vrstvy)

$$X_Z = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad X \leq a\,, \\ X - a & \text{pro} \quad X > a \end{cases}$$

 kde $a (a > 0)$ je priorita prvopojistitele a X_Z označuje pojistné plnění zajistitele (tj. zajistné plnění) z původního pojistného plnění X;

 – v praxi se pak někdy používá zápis typu

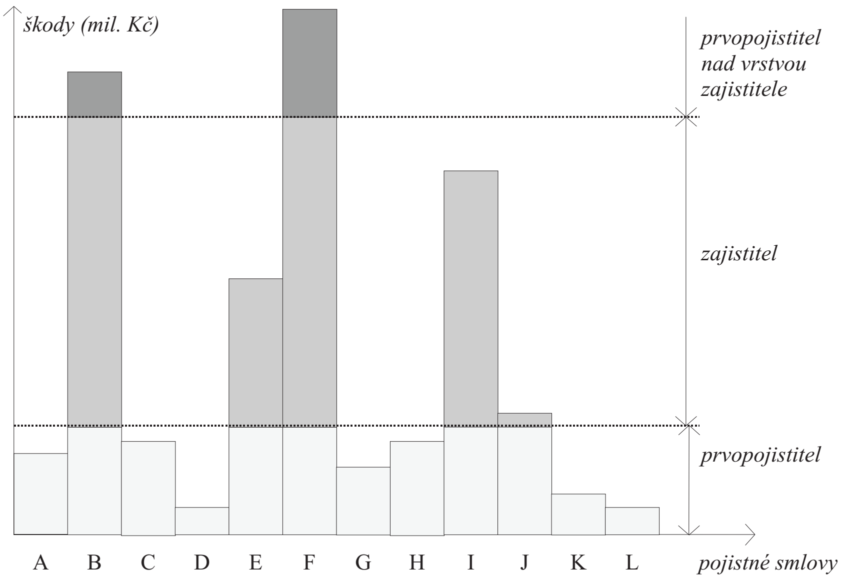
 3 mil. Kč xs $0,5$ mil. Kč

 kde 3 mil. Kč je vrstva zajistitele a 0,5 mil. Kč je priorita prvopojistitele.

(2) *WXL/E zajištění* (nebo *zajištění škodního nadměrku jednotlivých událostí*) zajišťuje prvopojistitele proti kumulaci škod vzniklých vždy v důsledku jedné škodní události, která zde ale ještě nemá charakter přírodní katastrofy (např. úrazové nebo cestovní pojištění účastníků autobusového zájezdu, požární pojištění bytového družstva):

 – je-li několik pojistných smluv ze zajišťovaného portfolia postiženo jednou škodní událostí s celkovými pojistnými nároky převyšujícími prioritu prvopojistitele, pak vzniklý nadměrek hradí zajistitel

$$X_Z = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \leq a\,, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i - a & \text{pro} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i > a \end{cases}$$



Obrázek 7: Příklad WXL/R zajištění (uvedeny jsou jen ty pojistné smlouvy ze zajišťovaného portfolia, ve kterých došlo k pojistným událostem).

kde opět $a (a > 0)$ je priorita prvopojistitele, X_Z je zajistné plnění, $X_1, \ldots, X_n$ je soubor pojistných plnění z dané škodní události v n postižených pojistných smlouvách;

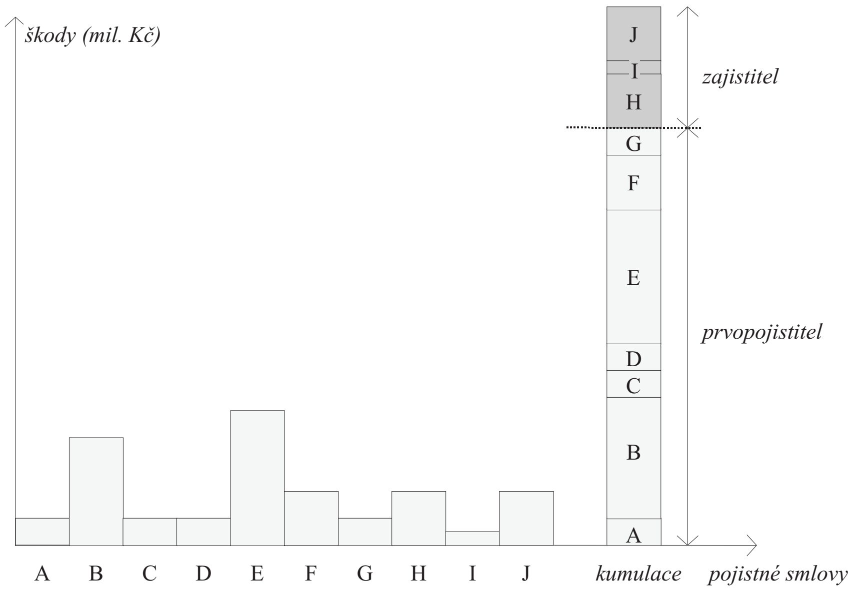
– pro aktivaci WXL/E je nutná expozice jedné škodní události ve více pojistných smlouvách (např. v úrazovém nebo životním pojištění se předepíše minimální počet osob, jejichž postižení danou škodní událostí je pro aktivaci zajištění nutné).

(3) *CatXL zajištění* (nebo *zajištění škodního nadměrku katastrofické události*) se shoduje se zajištěním WXL/E až na katastrofický charakter škodní události, v jejímž důsledku obvykle dochází k podstatné kumulaci škod.

(4) *SL zajištění* (nebo *zajištění ročního nadměrku* nebo *časového nadměrku*): priorita prvopojistitele se zde uplatňuje v rámci celoročního objemu škod a má často tvar mezní hranice pro škodní průběh (tj. pro poměr pojistného plnění vůči pojistnému), nad níž zajistitel plní do sjednaného limitu

$$X_Z = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad X/P \leq p\,, \\ X - p \cdot P & \text{pro} \quad p < X/P \leq l\,, \\ (l-p) \cdot P & \text{pro} \quad l < X/P\,, \end{cases}$$

kde $p (p > 0)$ je priorita prvopojistitele, $l (l > 0)$ je limit zajistitele a X_Z označuje zajistné plnění.



Obrázek 8: Příklad CatXL zajištění (uvedeny jsou jen ty pojistné smlouvy ze zajišťovaného portfolia, které byly postiženy příslušnou katastrofickou událostí).

(5) *Zajištění nejvyšších škod* (*Largest Claims Reinsurance* LCR(p)) znamená, že zajistitel hradí p největších škod (p je dané přirozené číslo, $p < n$), které nastaly během platnosti zajistné smlouvy:

$$X_Z = X_{(1)} + X_{(2)} + \cdots + X_{(p)}$$

kde $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \cdots \geq X_{(p)} \geq \cdots \geq X_{(n)}$ jsou škody $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z daného roku uspořádané podle velikosti a X_Z označuje zajistné plnění.

(6) *ECOMOR zajištění (excédent du cout moyen relatif)* znamená, že zajistitel v daném roce hradí jen ty části škod, které přesáhly p-tou největší škodu (p je opět dané přirozené číslo, $p < n$):

$$\begin{aligned} X_Z &= (X_{(1)} - X_{(p)}) + \cdots + (X_{(p-1)} - X_{(p)}) = \\ &= X_{(1)} + \cdots + X_{(p-1)}) - (p-1) \cdot X_{(p)} \end{aligned}$$

3 Pojistná matematika v zajištění

Budeme používat následující značení:

N_P, S_P, X_P, Z_P počet pojistných událostí v zajišťovaném portfoliu, jednotlivá pojistná částka, jednotlivé pojistné plnění, celkové pojistné plnění v zajišťovaném portfoliu, a to vždy na vrub prvopojistitele

N_Z, S_Z, X_Z, Z_Z	mají stejný význam, ale na vrub zajistitele
${}_XF(x) = P(X \le x)$:	distribuční funkce pojistného plnění X
${}_ZF(z) = P(Z \le z)$:	distribuční funkce celkového poj. plnění Z
${}_SF(s) = P(S \le s)$:	distribuční funkce pojistné částky S
${}_{\check{S}S}F(\chi) = P(\check{S}S \le \chi)$:	distribuční funkce škodního stupně $\check{S}S = X/S$

a podobně pro pravděpodobnostní hustoty: např.

${}_Xf_Z(x)$	pravděpodobnostní hustotu náhodné veličiny X_Z apod.

3.1 Kvótové zajištění (s kvótou q)

$$\begin{aligned} N = N_P \quad &= \quad N_Z \\ X_P = (1-q)\cdot X\,, \quad & \quad X_Z = q\cdot X \\ Z_P = (1-q)\cdot Z\,, \quad & \quad Z_Z = q\cdot Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_P) = (1-q)\cdot E(X)\,, \quad & \quad E(X_Z) = q\cdot E(X) \\ \operatorname{var}(X_P) = (1-q)^2\cdot \operatorname{var}(X)\,, \quad & \quad \operatorname{var}(X_Z) = q^2\cdot \operatorname{var}(X) \\ {}_XF_P(x) = {}_XF(x/(1-q))\,, \quad & \quad {}_XF_Z(x) = {}_XF(x/q) \\ {}_Xf_P(x) = \frac{{}_Xf(x/(1-q))}{1-q}\,, \quad & \quad {}_Xf_Z(x) = \frac{{}_Xf(x/q)}{q} \end{aligned}$$

3.2 Surplus

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad S \le s \\ \dfrac{s}{S} & \text{pro} \quad S > s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_P = \alpha\cdot X\,, \quad & \quad X_Z = (1-\alpha)\cdot X \\ E(X_P) = \alpha\cdot E(X)\,, \quad & \quad E(X_Z) = (1-\alpha)\cdot E(X) \\ \operatorname{var}(X_P) = \alpha^2\cdot \operatorname{var}(X)\,, \quad & \quad \operatorname{var}(X_Z) = (1-\alpha)^2\cdot \operatorname{var}(X) \\ \frac{\sigma(X_P)}{E(X_P)} \quad &= \quad \frac{\sigma(X_z)}{E(X_z)} = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_XF_P(x) = {}_XF(x/\alpha)\,, \quad & \quad {}_XF_Z(x) = {}_XF(x/(1-\alpha)) \\ {}_Xf_P(x) = \frac{{}_Xf(x/\alpha)}{\alpha}\,, \quad & \quad {}_Xf_Z(x) = \frac{{}_Xf(x/(1-\alpha))}{(1-\alpha)} \end{aligned}$$

(je-li $\alpha = 1$, pak zřejmě $X_Z = 0$ a některé předchozí vztahy je nutné modifikovat).

Za předpokladu nezávislosti náhodných veličin S a $\check{S}S$:

$$\begin{aligned}
{}_XF_P(x) &= P(X_P \le x) = \int_0^s {}_{\check{S}S}F\left(\frac{x}{u}\right) d\,{}_SF(u) + {}_{\check{S}S}F\left(\frac{x}{s}\right)(1 - {}_SF(s)) , \\
E(X_P^j) &= E(\check{S}S^j) \cdot \left\{ \int_0^s u^j d\,{}_SF(u) + s^j \cdot (1 - {}_SF(s)) \right\} = \\
&= E(\check{S}S^j) \cdot E(S^j) \cdot {}_SF^{(j)}(s)
\end{aligned}$$

kde

$${}_SF^{(j)}(s) = \frac{\int_0^s u^j d\,{}_SF(u) + s^j \cdot (1 - {}_SF(s))}{E(S^j)}$$

Pokud má navíc náhodná veličina Z složené Poissonovo rozdělení $CP(\lambda, {}_XF)$ (tj. speciálně $N \sim P(\lambda)$):

$$\begin{aligned}
E(Z_P) &= \lambda \cdot E(X_P) = \lambda \cdot E(\check{S}S) \cdot E(S) \cdot {}_SF^{(1)}(s) = E(Z) \cdot {}_SF^{(1)}(s) \\
\mathrm{var}\,(Z_P) &= \lambda \cdot E(X_P^2) = \lambda \cdot E(\check{S}S^2) \cdot E(S^2) \cdot {}_SF^{(2)}(s) = \\
&= \mathrm{var}\,(Z) \cdot {}_SF^{(2)}(s)
\end{aligned}$$

3.3 XL zajištění

Pro jednoduchost uvažujme pouze WXL/R zajištění s prioritou a:

$$N_P = N$$

$$\begin{aligned}
P(N_Z = n) &= \sum_{i=n}^{\infty} P(N = i) \cdot \binom{i}{n} \cdot p_a^n \cdot (1 - p_a)^{i-n} \\
& \ E(N_Z) = p_a \cdot E(N) \\
\mathrm{var}\,(N_Z) &= p_a \cdot (1 - p_a) \cdot E(N) + p_a^2 \cdot \mathrm{var}\,(N)
\end{aligned}$$

kde

$$p_a = P(X > a) = 1 - {}_XF(a)$$

Speciálně při $N \sim P(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
P(N_Z = n) &= e^{-\lambda \cdot p_a} \cdot \frac{(\lambda \cdot p_a)^n}{n!} \\
E(N_Z) &= p_a \cdot \lambda \\
\mathrm{var}\,(N_Z) &= p_a \cdot \lambda
\end{aligned}$$

a při $N \sim NB(\alpha, p)$:

$$
\begin{aligned}
P(N_Z = n) &= \binom{\alpha+n-1}{n}\left(\frac{p}{p+p_a\cdot(1-p)}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{p}{p+p_a\cdot(1-p)}\right)^{n} \\
& \quad X_P = \min(a, X), \quad X_Z = \max(0, X-a) \\
{}_XF_P(x) &= \begin{cases} {}_XF(x) & \text{pro } x < a\,, \\ 1 & \text{pro } x \geq a\,, \end{cases} \qquad {}_XF_Z(x) = {}_XF(a+x) \\
E(X_P) &= \int_0^a x d\, {}_XF(x) + a\cdot(1-\ {}_XF(a)) = \int_0^a (1-\ {}_XF(x))\, dx \\
E(X_Z) &= \int_a^\infty x d\, {}_XF(x) - a\cdot(1-\ {}_XF(a)) = \\
&= \int_a^\infty (1-\ {}_XF(x))\, dx = E(X) - E(X_P) \\
\operatorname{var}(X_P) &= 2\int_0^a x\cdot(1-\ {}_XF(x))\, dx - [E(X_P)]^2 \\
\operatorname{var}(X_Z) &= 2\left\{\int_a^\infty x\,(1-\ {}_XF(x))\, dx - a\int_a^\infty (1-\ {}_XF(x))\, dx\right\} - \\
& \quad -[E(X_Z)]^2
\end{aligned}
$$

Obecně pro j-té momenty náhodných veličin X_P a X_Z platí:

$$
\begin{aligned}
E(X_P^j) &= \int_0^a x^j d\, {}_XF(x) + a^j\cdot(1-\ {}_XF(a)) \\
E(X_Z^j) &= \sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\cdot(-a)^{j-i}\cdot[E(X^i) - E(X_P^i)]
\end{aligned}
$$

$$Z_P = \sum_{i=1}^{N} X_P, \quad Z_Z = \sum_{i=1}^{N} X_Z$$

Při obvyklých předpokladech v kolektivním modelu rizika:

$$
\begin{aligned}
E(Z_P) &= E(N)\cdot E(X_P) \\
\operatorname{var}(Z_P) &= E(N)\cdot \operatorname{var}(X_P) + \operatorname{var}(N)\cdot[E(X_P)]^2
\end{aligned}
$$

a analogicky pro náhodnou veličinu Z_Z.

Pro variační koeficient je obvykle (v nepatologických případech)

$$\frac{\sigma(Z_P)}{E(Z_P)} < \frac{\sigma(Z)}{E(Z)} < \frac{\sigma(Z_Z)}{E(Z_Z)}$$

tj. u prvopojistitele dochází k redukci variačního koeficientu (vlastní vrub ponechaný prvopojistitelem je stabilnější než původní nezajištěné portfolio), u zajistitele je tomu naopak

$$
\begin{aligned}
E(Z_P) &= E(Z)\cdot\ {}_XF^{(1)}(a) \\
\operatorname{var}(Z_P) &= \operatorname{var}(Z)\cdot\ {}_XF^{(2)}(a)
\end{aligned}
$$

kde

$$ {}_X F^{(j)}(a) = \frac{\int_0^a x^j d\, {}_X F(x) + a^j \cdot (1 - {}_X F(a))}{E(X^j)} $$

3.4 SL zajištění

$$ Z_P = \min(p \cdot P, X), \quad Z_Z = \max(0, X - p \cdot P) $$

kde priorita p představuje omezení pro škodní průběh X/P. Dále

$$ \begin{aligned} E(Z_P) &= E(Z) \cdot {}_Z F^{(1)}(p \cdot P) \\ \operatorname{var}(Z_P) &= \operatorname{var}(Z) \cdot {}_Z F^{(2)}(p \cdot P) \end{aligned} $$

kde

$$ {}_Z F^{(j)}(p \cdot P) = \frac{\int_0^{p \cdot P} z^j d\, {}_Z F(z) + (p \cdot P)^j \cdot (1 - {}_Z F(p \cdot P))}{E(Z^j)} $$

4 Výpočet zajistného

4.1 Model založený na Paretově rozdělení

Paretovo rozdělení je vhodné pro modelování výše škod. Přitom v zajišťovací praxi je častá následující situace:

Úkol: stanovit nettozajistné pro neproporcionální zajištění s prioritou prvopojistitele a a vrstvou (limitem) zajistitele L.

Data k dispozici: škody z minulých let překračující vhodně nastavenou hodnotu *OP (observation point)*, kde *OP* je mnohem menší než budoucí priorita a (vzhledem k nízké hodnotě *OP* je statistický vzorek takových škod mnohem bohatší).

Výše škody X_a nad hodnotou a se modeluje Paretovým rozdělením s pravděpodobnostními charakteristikami:

$$ \begin{aligned} f_a(x) &= \frac{b \cdot a^b}{x^{b+1}}, \quad x \geq a \\ F_a(x) &= 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x \geq a \\ E(X_a) &= \frac{a \cdot b}{b-1} \quad \text{pro } b > 1 \\ \operatorname{var}(X_a) &= \frac{a^2 \cdot b}{(b-1)^2(b-2)} \quad \text{pro } b > 2 \end{aligned} $$

($b > 0$ je parametr, který musí být odhadnut z dat). Zajistitel bude v roce zajistné smlouvy plnit nad prioritou a jen do výše vrstvy L, takže střední výše jeho plnění *EXL (expected XL)* bude

$$\begin{aligned} EXL &= \int_a^{a+L} (x-a)\cdot f_a(x)dx + \int_{a+L}^{\infty} L\cdot f_a(x)dx = \\ &= \begin{cases} \dfrac{a}{1-b}\cdot (RL^{1-b}-1) & \text{pro} \quad b \neq 1 \\ a\cdot \ln RL & \text{pro} \quad b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

kde RL je relativní délka vrstvy (*relative layer*)

$$RL = \frac{a+L}{a}$$

Pro výpočet celkové výše plnění zajistitele nutný dále průměrný počet škod $LF(a)$ (*loss frequency*), které v zajišťovaném portfoliu během roku překročí prioritu a (z minulých dat jsme totiž schopni spolehlivě odhadnout jen průměrný počet (aktualizovaných) škod $LF(OP)$ nad hodnotou OP; pro mnohem větší prioritu a je obvykle pozorovaná hodnota $LF(a)$ vzhledem k malému počtu škod překračujících a značně nespolehlivá):

$$LF(a) = LF(OP)\cdot P(X_{OP} > a) = LF(OP)\cdot (1-F_{OP}(a)) = LF(OP)\cdot \left(\frac{OP}{a}\right)$$

Hledané nettozajistné NP_Z by mělo odpovídat zajistnému plnění:

$$NP_Z = LF(a)\cdot EXL = \begin{cases} LF(OP)\cdot OP^b \cdot \dfrac{a^{1-b}}{1-b}\cdot (RL^{1-b}-1) & \text{pro} \quad b\neq 1 \\ LF(OP)\cdot OP\cdot \ln RL & \text{pro} \quad b = 1 \end{cases}$$

kde a, L a OP jsou dané hodnoty, $LF(OP)$ a b jsou odhadnuté hodnoty z minulých (aktualizovaných) dat.

Odhad parametru b se realizuje pomocí dvou přístupů:

(1) Aplikuje se ad hoc hodnota ověřená praktickými zkušenostmi s podobnými zajišťovanými portfolii. Např. WXL/R zajištění požárních včetně živelních rizik mívá b v rozmezí od 1,0 do 2,5 (speciálně pro pojištění průmyslových rizik kolem 1,2 a pro pojištění majetku obyvatelstva od 1,8 do 2,5), CatXL zajištění mívá b kolem 1,0 (speciálně pro riziko zemětřesení kolem 0,8 a pro riziko vichřic v Evropě kolem 1,3).

(2) Použije se hodnota parametru odhadnutá z minulých dat prvopojistitele. Jestliže např. $X_{OP,1}, X_{OP,2}, \ldots, X_{OP,n}$ byly všechny pozorované (aktualizované) škody překračující v minulém roce hodnotu OP, pak maximálně věrohodný odhad parametru b lze najít jako

$$b = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln \frac{X_{OP,i}}{OP}}$$

Příklad. Úkolem je najít pomocí Paretova modelu nettozajistné pro příští rok zajistné smlouvy WXL/R s parametry 5 mil. Kč *xs* 1 mil. Kč v pojištění staveb občanů, jestliže na základě minulých (aktualizovaných) dat byl průměrný počet škod, které v zajišťovaném portfoliu během příštího roku překročí částku 250 000 Kč, odhadnut ve výši 9,36 škod.

Řešení: Pro výpočet použijeme Paretovo rozdělení s ad hoc hodnotou parametru $b = 2$:

$$RL = \frac{1\ 000\ 000 + 5\ 000\ 000}{1\ 000\ 000} = 6$$

$$\begin{aligned} NP_Z &= LF(a) \cdot EXL = LF(OP) \cdot OP^b \cdot \frac{a^{1-b}}{1-b} \cdot (RL^{1-b} - 1) = \\ &= 9,36 \cdot 250\ 000^2 \cdot \frac{1\ 000\ 000^{1-2}}{1-2} \cdot (6^{1-2} - 1) = 0,59 \cdot 833\ 333 = \\ &= 487\ 500 \text{ Kč} \end{aligned}$$

4.2 Metoda scénářů

- používá se pro stanovení nettozajistného při CatXL zajištění přírodních katastrof;
- je založena na odhadu jejich *škodní periody* (*škodní frekvence*): během této periody by hledané nettozajistné mělo právě zaplatit zajistné plnění;
- vytváří se přitom určité škodní scénáře, pomocí nichž se odhadují příslušné škodní periody;
- nevýhodou metody je značná nepřesnost, a proto se spíše používá jako podpůrný prostředek při obchodních jednáních mezi prvopojistitelem a zajistitelem.

Příklad. Metoda scénářů pro výpočet nettozajistného v rámci zajištění CatXL (5 mil. Kč *xs* 1 mil. Kč) v pojištění proti povodním a záplavám s celkovou pojistnou částkou 50 mil. Kč:

- pomocí odhadnutého škodního stupně (tj. podílu pojistného plnění vůči pojistné částce) v prvním sloupci tabulky 4 byla v druhém sloupci odhadnuta průměrná škoda při jednotlivých typech povodňové vody a v třetím sloupci odpovídající zajistné plnění;
- přepočtem na jeden rok bylo v posledním sloupci odhadnuto (roční) nettozajistné. Nettozajistná sazba vyjádřená ale tentokrát v procentech celkové pojistné částky je 0,16%.

Typ povodňové vody	*Škodní stupeň (%)*	*Průměrná škoda (Kč)*	*Zajistné plnění (Kč)*	*Škodní perioda (roky)*	*Netto-zajistné (Kč)*
desetiletá	1	500 000	0	10	0
padesátiletá	5	2 500 000	1 500 000	50	30 000
stoletá	20	10 000 000	5 000 000	100	50 000
Celkem					80 000

Tabulka 4: Příklad metody scénářů.

5 Alternativní přenos rizik (ART)

Jako příklad ART uvedeme tzv. *pojistné dluhopisy*, které zatím patří mezi nejpoužívanější nástroje sekuritizace pojistných rizik (obecně se pro tyto nástroje začíná používat zkratka *ILS insurance-linked securities*). K rozvoji sekuritizace pojistných rizik přispívá mimo jiné:

- Objektivní *ILS spouštěče (ILS triggers)*: Jedná se o objektivně vymezené události, které podmiňují výši finančních toků realizovaných v rámci ILS. Lze je rozlišit do tří kategorií podle jejich indexace:

  (1) Indexace na škodách způsobených přímo dané pojišťovně či zajišťovně.
  (2) Indexace pomocí všeobecně uznávaných škodních indexů měřených renomovanými agenturami. *Škodním indexem* se zde většinou rozumí vhodně standardizovaný průměrný škodní vývoj v daném regionu pro příslušně vymezené pojistné riziko. V současné době jsou rozšířeny *PCS indexy* (Property Claim Services).
  (3) Indexace pomocí parametrických indexů: *Parametrický index* má většinou fyzikální charakter. Typickým příkladem je Richterova stupnice pro zemětřesení nebo počet teplých a chladných dní u derivátů na počasí.

- Burzy obchodující se sekuritizovaným pojistným rizikem: Jedná se přitom o vznik nových specializovaných burz (např. americká elektronická burza *CATEX Catastrophe Risk Exchange*).
- Rozvoj zprostředkovatelů SPV (*Special Purpose Vehicles*): Tyto subjekty hrají mimo jiné důležitou roli právě při emisích cenných papírů vázaných na pojistné riziko.

Nejčastějším typem pojistných dluhopisů jsou *katastrofické dluhopisy (catastrophe bonds, CatBonds)*. Jedná se o vysoce ziskové dluhopisy s rizikem neplnění závazků v případě živelní katastrofy. Tyto dluhopisy mají kuponovou sazbu mnohem vyšší než průměr trhu. V případě živelní katastrofy daného typu však u nich hrozí ztráta celého (resp. části) kuponu a ztráta celé (resp. části) nominální hodnoty, např.:

<table>
<tr><td rowspan="2">Výše škody podle indexu PCS</td><td colspan="3">Nesplacená procentní část nominální hodnoty</td><td rowspan="2">Odhadnutá pravděpodobnost</td></tr>
<tr><td>Tranše A1, A2</td><td>Tranše B</td><td>Tranše C</td></tr>
<tr><td>$\geq$ 12,0 mld. USD</td><td>0%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0,0240</td></tr>
<tr><td>$\geq$ 18,5 mld. USD</td><td>20%</td><td>33%</td><td>100%</td><td>0,0100</td></tr>
<tr><td>$\geq$ 21,0 mld. USD</td><td>40%</td><td>66%</td><td>100%</td><td>0,0076</td></tr>
<tr><td>$\geq$ 24,0 mld. USD</td><td>60%</td><td>100%</td><td>100%</td><td>0,0052</td></tr>
<tr><td>Očekávaná ztráta (v % nom. hodnoty)</td><td>0,46%</td><td>0,76%</td><td>2,40%</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 5: Nesplacená procentní část nominální hodnoty v případě Swiss Re California Earthquake Bonds v závislosti na výši pojištěné škody podle příslušného indexu PCS.

(1) *USAA Hurricane Bonds:* jednoleté dluhopisy v celkové nominální hodnotě 0,5 mld. USD byly vázány na riziko hurikánů v pojištění majetku na východním pobřeží a kolem Golfského zálivu;
(2) *Winterthur Windstorm Bonds:* tříleté dluhopisy v nominální hodnotě 4 700 CHF byly vázány na riziko vichřic a krupobití v havarijním pojištění osobních automobilů;
(3) *Swiss Re California Earthquake Bonds:* tříleté dluhopisy v celkové nominální hodnotě 137 mil. USD byly vázány na riziko zemětřesení v Kalifornii;
(4) *Japonské katastrofické dluhopisy:* Japonské pojišťovny vzhledem k absenci škodních indexů typu PCS pro zemětřesení zvolily parametrický přístup ve formě Richterovy stupnice na základě hlášení japonské meteorologické služby.

Princip katastrofických dluhopisů popišme na nejjednodušším příkladu jednoletých dluhopisů s jedním ročním kuponem. Uvažujme jednoletou zajistnou smlouvu, podle níž zajistitel zaplatí po uplynutí jednoho roku částku L, pokud nastala předem specifikovaná živelní katastrofa (např. povodeň určitého rozsahu), a v opačném případě zajistitel neplní (částka L je samozřejmě sjednána před podpisem zajistné smlouvy). Cena takové zajistné smlouvy pro prvojistitele (tj. výše zajistného) se zřejmě určí jako

$$P_Z = \frac{1}{1+i} \cdot [q_{cat} \cdot L + (1 - q_{cat}) \cdot 0] = \frac{1}{1+i} \cdot q_{cat} \cdot L$$

kde i je roční úroková míra a q_{cat} je pravděpodobnost živelní katastrofy, tak jak ji oceňuje zajistný trh. Zajistitel musí před podpisem zajistné smlouvy (řekněme v čase $t = 0$) věrohodně doložit, že za rok (tj. v čase $t = 1$) bude disponovat kapitálovou částkou L, neboť by jinak nesehnal zákazníky. Potřebuje proto získat v čase $t = 0$ vedle zajistného P_Z ještě částku F takovou,

	Čas $t = 0$	Čas $t = 1$	
		došlo ke katastrofě (s prstí q_{cat})	*nedošlo ke katastrofě (s prstí $1 - q_{cat}$)*
Prvopojistitel	$-Z = -\frac{1}{1+i} \cdot q_{cat} \cdot L$	L	0
Zajistitel = Emitent	$Z + F$	$-L$	$-L$
Investor	$-F = -\frac{1}{1+i} \cdot (1 - q_{cat}) \cdot L$	0	L

Tabulka 6: Finanční toky spojené s jednoletými katastrofickými dluhopisy (dluhopisy se prodávají za nominální hodnotu).

aby investičním zhodnocením kapitálu $P_Z + F$ opravdu obdržel za jeden rok potřebnou částku L

$$(P_Z + F) \cdot (1 + i) = L$$

Emituje proto vysoce ziskové jednoleté dluhopisy v nominální hodnotě F, v jejichž rámci zaplatí držiteli dluhopisů (investorovi) po uplynutí jednoho roku částku L (tj. na konci ročního období splatí nominální hodnotu F a vyplatí opravdu značný objem kuponů ve výši $K = L - F = P_Z \cdot (1+i) + F \cdot i$), pokud nenastala předem specifikovaná živelní katastrofa, a v opačném případě zajistitel nezaplatí držiteli dluhopisů nic a celou částku L použije na zajistné plnění. Nominální hodnota F splňuje vztah

$$F = \frac{1}{1+i} \cdot [q_{cat} \cdot 0 + (1 - q_{cat}) \cdot L] = \frac{1}{1+i} \cdot (1 - q_{cat}) \cdot L$$

Pokud se uvedené dluhopisy prodávají za nominální hodnotu F (tj. za pari), potom příslušné finanční toky jsou v souladu s potřebami všech zúčastněných stran (viz tab. 6):

Uvedené dluhopisy se ovšem prodávají za tržní cenu F^* (obecně $F^* \neq F$), takže dluhopisový trh ocenil pravděpodobnost katastrofy jako q_b (na rozdíl od odhadu q_{cat} provedeného zajistným trhem, přičemž index b je z anglického *bond* pro dluhopis) splňující

$$F^* = \frac{1}{1+i} \cdot (1 - q_{cat}) \cdot L$$

tj.

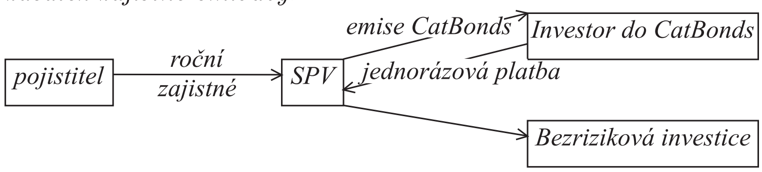
$$q_b = \frac{L - F^* \cdot (1+i)}{L}$$

To pak následně implikuje zajistné ve výši

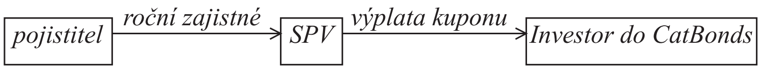
$$Z_b = \frac{1}{1+i} \cdot q_b \cdot L = \frac{L}{1+i} - F^*$$

Názorně lze zajištění pomocí katastrofických dluhopisů zachytit následujícím způsobem:

- *začátek zajistné smlouvy:*

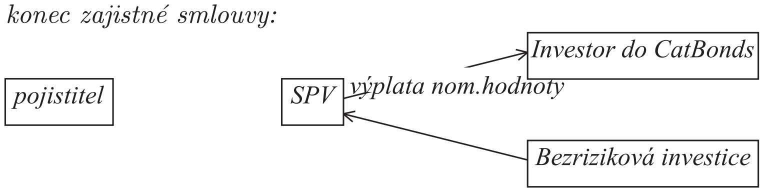


- *bezškodní rok zajistné smlouvy:*



- *škodní rok zajistné smlouvy:*

- *konec zajistné smlouvy:*



Reference

[1] Booth P., Chadburn R., Cooper D., Haberman S., James D. (1999). *Modern actuarial theory and practice.* Chapman and Hall/CRC, London.
[2] Cipra T. (2004). *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví.* Grada, Praha.
[3] Gerathewohl K. et al. (1976). *Rückversicherung – Grundlagen und Praxis, Band I.* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
[4] Gerathewohl K. et al. (1979). *Rückversicherung – Grundlagen und Praxis, Band II.* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
[5] Kiln R., Kiln S. (2001). *Reinsurance in practice.* Witherby, London.
[6] Liebwein P. (2000). *Klassische und moderne Formen der Rückversicherung.* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
[7] Pfeiffer C. (1994). *Einführung in die Rückversicherung: Das Standardwerk für Theorie und Praxis.* Gabler, Wiesbaden.
[8] Straub E. (1988). *Non-life insurance mathematics.* Springer and Association of Swiss Actuaries, Heidelberg.
[9] Tiller J.E., Fagerberg D. (1990). *Life, health, and annuity reinsurance.* ACTEX Publications, Winsted and Avon, Connecticut.

Poděkování: Tato práce je podporována výzkumným záměrem MSM 113200008.

Adresa: T. Cipra, KPMS, MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 - Karlín

E-mail: `cipra@karlin.mff.cuni.cz`