ALGEBRAICKÉ VLASTNOSTI FUZZY VELIČIN

MILAN MAREŠ

Abstrakt. Následující řádky si kladou za cíl přinést přehlednou informaci o jedné z partií teorie fuzzy množin, konkrétně o počítání s fuzzy čísly a fuzzy veličinami. Jedná se o teorii, která se v současné době začíná poměrně intenzivně rozvíjet, zejména v souvislosti s rozvojem optimalizačních metod pracujících s vágními vstupními daty. V tomto příspěvku velmi stručně připomeneme pojem fuzzy množiny a z ní odvozený pojem fuzzy čísla, ukážeme obvyklé operace s fuzzy čísly se zvláštním ohledem na lineární operace (sčítání a násobení deterministickým číslem) a krátce se zamyslíme nad tím, proč se některé vlastnosti těchto operací liší od toho, na co jsme zvyklí u obvyklých reálných čísel. Ukážeme si, jak vysvětlit a do určité míry eliminovat nezvyklé chování fuzzy veličin. Nakonec ukážeme jednu z možných aplikací teorie fuzzy veličin při řešení úloh síťové analýzy metodou kritické cesty s vágní představou o délce jednotlivých činností.

Abstract. The presented contribution aims to offer a summary of elementary knowledge about one of fields of the fuzzy set theory, namely, about computations with fuzzy numbers and fuzzy quantities. This theory is recently intensively developed, especially in connection with the development of optimization methods using vague input data. Here, we very briefly remember the concept of fuzzy set and of fuzzy number derived from it. We present usual operations with fuzzy numbers with special stress on the linear operations (addition and product with crisp number), and we shortly analyze why some properties of these operations differ from the classical properties of deterministic numbers. We show, how to explain and in certain degree eliminate the strange behaviour of fuzzy quantities. Finally, we illustrate the general methods by a model of network analysis – the critical path method – with vague idea about the durations of particular activities.

Резюмэ. В предложеной статье описаны нечеткие величины и изучаются их свойства. Теоретические резултаты приложены тоже к проблеме метода критического пути.

1. Úvod

Když se v polovině šedesátých let objevily první práce o teorii fuzzy množin (úplně první byl Zadehův článek [9]), nebyly přijaty jednoznačně. Slovo fuzzy v jejich názvu – v překladu znamená něco jako „matný“, „mlhavý“, „rozmazaný“ – naznačovalo, že se má jednat o matematickou reprezentaci neurčitých jevů a pojmů. Koneckonců, obsáhlé komentáře k prvním elementárním výsledkům tento dojem potvrzovaly a zdůrazňovaly aplikační význam nové teorie pro modelování neurčitosti obsažené v reálných pojmech a procesech popisovaného světa. Jenomže, pro zapracování nejistoty a neurčitosti do exaktních modelů reality už tady jedna úspěšná teorie byla – totiž teorie pravděpodobnosti. Výborně vyhovovala pro matematický popis náhody

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03B52 94D05.

Klíčová slova. Čísla, fuzzy množiny, fuzzy logika, vágní data.

Tato práce je podporována grantem GA AV ČR č. A 1075106 a klíčovým projektem AV ČR č. K 1019101.

a jevů s ní spojených, nabízela dobře rozvinutou metodiku a propracovaný aparát teoretických výsledků. Trvalo poměrně dlouho, než si odborná veřejnost na fuzzy množiny zvykla a hlavně, než si uvědomila, že náhoda není jediný typ nedeterminismu, který narušuje spolehlivost reálných dat. Teorie fuzzy množin nekonkuruje teorii pravděpodobnosti, nezabývá se vlivem náhody na správnost a přesnost našich kvantitativních úvah. Její pole působnosti je v matematickém modelování vágnosti, neoddělitelné od pojmů a popisů užívaných v běžném verbálním vyjadřování. Pojmy jako „velký“, „přiměřeně“, „fialový“, „rychle“, „podobný“ a další nejsou a nemohou být přesně ohraničené – mají jaksi „rozmazané“ kontury. Nejistota s nimi spojená ale není stochastického, náhodného typu. Pro její popis není pravděpodobnost právě nejpřiměřenější a také matematické operace pro práci s vágností jsou přirozeně jiné než operace s náhodnými jevy a veličinami. Právě pro tento účel byla vytvořena teorie fuzzy množin.

Jedna z jejích významných partií je fuzzy logika, která pracuje s nepřesnými nebo nejednoznačnými výroky. Rozsáhlé praktické uplatnění našla v teorii fuzzy řízení a fuzzy regulace, zaměřené na automatické (počítačové) řízení procesů na základě vágních údajů o jejich dosavadním průběhu a stavu prostředí ve kterém probíhají.

Jiná významná část teorie fuzzy množin je spojena s optimalizací rozhodování a vyhodnocování souborů vágních dat. Pro její rozvoj je důležité zvládnout počítání s vágními – to znamená fuzzy – čísly a kvantitativními veličinami. Teorie tak zvaného „počítání se slovy“ se v posledních letech začala intenzivně rozvíjet i když pojem fuzzy čísla a početní operace s vágními čísly začaly být studovány už poměrně dávno a počáteční výsledky jsou shrnuty například v práci [1].

V tomto příspěvku se budeme, alespoň stručně, zabývat právě počítáním s vágními daty. Příspěvek nemůže z prostorových důvodů podat úplný přehled celé problematiky, více o ní lze najít třeba v knize [4] a navazujícím článku [5]. My se zaměříme na poněkud užší, nicméně dost významnou, tématiku lineárních operací s fuzzy veličinami (jejich sčítání a násobení deterministickým číslem). Umožňují dost názorně ukázat hlavní problémy, na které při počítání s fuzzy veličinami narážíme a metodu, jak si s takovými potížemi poradit. Jako úvod do problematiky to snad může přinejmenším stačit.

Následující text je členěn na několik částí. Nejprve stručně, spíše pro úplnost a ustálení terminologie, připomeneme v části 2 pojem fuzzy množin a základní operace s nimi, poté v části 3 zavedeme pojem fuzzy veličiny jako fuzzy podmnožiny množiny reálných čísel, připomeneme definice aritmetických operací s fuzzy veličinami a ukážeme, do jaké míry se shodují se známými vlastnostmi běžných aritmetických operací nad reálnými čísly. V části 4 se zamyslíme nad příčinami rozdílů mezi vlastnostmi operací s fuzzy a deterministickými čísly a nad tím, jak takové rozdíly překonat. Část 5 je věnována stručné zmínce o relaci uspořádání (spíše jedné z možných relací uspořádání) mezi fuzzy veličinami. V části 6 pak stručně ukážeme jednu ze zajímavých aplikací teorie fuzzy veličin při studiu metody kritické cesty jako jedné z optimalizačních metod. Využití fuzzy vstupních údajů o délkách činností umožňuje kvantifikovat velikost rizik zdržení složitých výrobních a jiných postupů. Článek je doplněn několika závěrečnými poznámkami a výběrem několika relevantních publikací.

V rozporu s dobrými zásadami matematických publikací není následující text formálně členěn na definice, věty a důkazy. Děje se tak ze dvou důvodů: Jednak jsou všechny potřebné důkazy poměrně jednoduché a jsou k nalezení v článcích, citovaných např. ve [4]. Kromě toho je předložený příspěvek myšlen spíše jako podklad pro úvahy a debaty a pro tento účel se plynulý text jeví (snad) vhodnější. Formální puristé možná prominou.

2. To základní o fuzzy množinách

Jak už bylo řečeno v úvodu, pojem fuzzy množiny vznikl jako nástroj pro matematické modelování vágně popsaných jevů, objektů, vztahů a procesů. Například takových pojmů jako „suché podnebí“, „příbuzný“, „hromádka písku“, „mnohem větší než. . . “, nebo „převratné změny“. Přesně determinované pojmy lze celkem přirozeně ztotožnit s klasickými deterministickými množinami. Není proto nic překvapivého na myšlence, ztotožnit vágní pojmy s nějakým jiným typem objektů, dosti podobných množinám. U klasických deterministických množin platí, že lze o každém objektu jednoznačně určit, zda do té či oné množiny patří nebo nepatří. Množiny onoho nového „vágního“ typu pak budou mít poněkud rozostřenou hranici – o některých objektech lze s jistotou říci, že do takové množiny patří, o jiných lze stejně jistě říci, že do ní nepatří, existují ale i objekty, u kterých není příslušnost k množině jistá. U těch je možné přinejlepším pouze stanovit stupeň jejich příslušnosti k uvažované množině.

Pro jednoznačný popis jakékoliv *fuzzy podmnožiny* A univerza $\mathcal{U}$ pak je možné použít zobecnění charakteristické funkce, nazývané *funkce příslušnosti* μ_A, takové, že pro každý prvek x z univerza je

$$\begin{aligned} &\mu_A(x) = 1 && \text{když } x \text{ jistě patří do } A, \\ &\mu_A(x) = 0 && \text{když } x \text{ jistě nepatří do } A, \\ &0 < \mu_A(x) < 1 && \text{když si nejsme jisti, zda } x \text{ patří do } A. \end{aligned}$$

Přitom v posledním případě bude hodnota $\mu_A(x)$ tím blíže k 1 čím spíše je x možné považovat za prvek fuzzy množiny A. Tím se nám podařilo formálně vystihnout a ocenit stupeň příslušnosti prvku univerza k některé uvažované fuzzy množině v případech, kdy se ona příslušnost neomezuje na pouhé ano/ne.

Protože považujeme fuzzy množiny za jakési zobecnění klasických deterministických množin, máme právo očekávat, že na ně lze rozšířit obvyklé množinové operace a další pojmy.

Fuzzy množina A bude podmnožina fuzzy množiny B, $A \subset B$, jestliže každý prvek, který patří s nějakou možností do A, patří přinejmenším se stejnou možností do B, neboli jestliže pro každé x z univerza je $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Do prázdné množiny $\emptyset$ zaručeně nepatří žádný prvek, bude tedy $\mu_\emptyset = 0$ pro všechna x. Naopak, každý prvek univerza $\mathcal{U}$ do něj zaručeně patří, takže $\mu_\mathcal{U} = 1$ pro každé x.

Pokud jde o doplněk množiny A, označíme ho $\overline{A}$, patří do něj ty prvky, které nepatří do A; v naší řeči možností patří x do $\overline{A}$ s tou možností, se kterou nepatří do A, neboli $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Konečně, sjednocení $A \cup B$ a průnik $A \cap B$ mají také své přirozené definice. Do sjednocení patří každý prvek, který patří alespoň do jedné z obou množin, v našem jazyce pak s možností, se kterou patří alespoň do jedné z oněch dvou množin, takže

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x),\, \mu_B(x)\right).$$

Zcela obdobně patří prvek x do průniku, jestliže patří do obou množin A i B, tedy s možností, s níž patří do každé z nich; formálně vyjádřeno

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x),\, \mu_B(x)\right).$$

Každý si snadno ověří, že pokud nahradíme fuzzy množiny klasickými deterministickými množinami, to znamená, pokud nahradíme funkce příslušnosti μ_A nula-jednotkovými charakteristickými funkcemi χ_A, pak se naše právě zavedené definice stanou obvyklými definicemi příslušných pojmů a námi popsané sjednocení, průnik, doplněk, podmnožina, prázdná množina a úplná základní množina (univerzum) se stanou tím, co známe z klasické teorie deterministických množin. Fuzzy množiny se pak jeví jako přirozené rozšíření „ostrých“ deterministických množin, které nepřináší nic nového. Neměli bychom ale podléhat přílišnému uklidnění. Vágnost, vnesená do pojmu množiny, může dost zamíchat našimi představami o tom, jak se má správná množina chovat. Není, například, problém sestrojit fuzzy množinu (stačí, aby bylo $\mu_A(x) \leq 1/2$ pro všechna x u $\mathcal{U}$), která je podmnožinou svého doplňku – a to už je vlastnost pro klasické představy o množinách hodně exotická. Považujme to za dobrý důvod, abychom od fuzzy pojmů nečekali chování, které je zaručeno u jejich deterministických protějšků. To platí i o fuzzy číslech.

Než opustíme úvodní část o fuzzy množinách, zmíníme se stručně ještě o jednom pojmu, který z nich vychází a který budeme v jedné z následujících částí potřebovat. Slovo *relace* označuje vztah mezi (obvykle) dvěma objekty. Například „být větší než“, „být ekvivalentní“, a podobně. Formálně je možné ztotožnit relaci s nějakou množinou dvojic prvků, které ji splňují (například množinou všech dvojic čísel (x, y), kde $x < y$). Jestliže jsme relaci, tedy vztah, ztotožnili s množinou, není formálně problém nahradit tuto množinu fuzzy množinou. To znamená množinou do které některé dvojice patří jenom nejistě, jen s určitou možností. Takovou fuzzy množinu dvojic pak už umíme ztotožnit s *fuzzy relací*, tedy se vztahem, který může pro některé dvojice platit jistě, pro jiné ale jenom do jisté míry, nebo s neurčitostí. Typickou fuzzy relací je třeba „mnohem větší než“, nebo „přibližně roven“, a jistě i řada dalších.

3. Fuzzy veličiny a počítání s nimi

Vágnost se nemusí týkat jenom kvalitativních pojmů (jako třeba „načervenalý“ nebo „příbuzný“), ale velice často i pojmů kvantitativních. Dost často se tak stává, je-li při vyhodnocování nějaké situace nutné použít osobní zkušenost a subjektivní názor experta (např. lékař zpravidla nespecifikuje, co přesně znamená „vysoká teplota“, nebo „časté krvácení“, geologický expert mluví o „občasném výskytu“, „mocné vrstvě“ a podobně). Expertní názor ale není jediný zdroj vágnosti kvantitativních údajů – i ve statistice, například, lze mluvit o „poměrně vysoké korelaci“, ve finančnictví o „přiměřené míře zisku“ a takových příkladů lze najít celou řadu.

Vágní kvantitativní výrazy se mohou lišit i svou vnitřní strukturou. V některých případech pouze oslabují přesnost některých číselných údajů, jako například „přibližně 10“, „o něco více než 8“ nebo „něco mezi 10 a 20“. V jiných případech se neváží ke konkrétním číselným hodnotám a jejich kvantitativní velikost lze pouze hádat ze souvislostí ve kterých jsou použity – například „mnoho“ bude znamenat něco jiného ve státním rozpočtu a něco jiného v ceně zboží denní potřeby, podobně i „málo“, „několik“, „přiměřeně“ a podobně. Kvantitativní charakter mají i některé verbální výrazy uvádějící vztah mezi veličinami, například „mnohem větší“, „přibližně stejný“ a další. O nich jsme se už zmínili na konci předchozí části v souvislosti s fuzzy relacemi.

Vágnost, obsažená v kvantitativních verbálních výrocích, zpravidla nemá nic společného s náhodou a její popis pravděpodobnostními prostředky by nebyl přiměřený situaci. Například vágní verbální výraz „dostatečný plat" nemá dost dobře smysl popisovat rozložením pravděpodobnosti na množině reálných (nebo přirozených) čísel. Kdybychom tak činili, znamenalo by, například, přidání každé hodnoty k „pravděpodobně" dostatečným platům snížení pravděpodobnosti, že ostatní hodnoty zůstanou „dostatečnými platy". Můžeme ale u každé číselné hodnoty individuálně zvažovat, zda je nebo není „dostatečným platem", případně kvantitativně (v intervalu od 0 do 1) vyjádřit míru našeho váhání. Nejistota spojená s obsahem slov „dostatečný plat" nespočívá v náhodnosti, ale v nedostatečné preciznosti výrazu běžného jazyka „dostatečný".

Z předchozího rozboru je už zřejmé, že vágní kvantitativní údaje můžeme reprezentovat tak zvanými *fuzzy veličinami*, které jsou definovány jako fuzzy podmnožiny reálných (případně celých) čísel. Každá fuzzy veličina a je pak popsána svou funkcí příslušnosti μ_a, která každému reálnému číslu $x \in R$ přiřazuje hodnotu $\mu_a(x)$ mezi 0 a 1 (včetně) s obvyklou interpretací – $\mu_a(x)$ kvantifikuje, do jaké míry je x možnou hodnotou veličiny a. Za fuzzy veličinu nepokládáme každou fuzzy podmnožinu množiny reálných čísel R, ale pouze takovou, pro jejíž funkci příslušnosti μ_a platí

— existuje číslo $x_a \in R$ pro které $\mu_a(x_a) = 1$,

— nosič funkce μ_a je ohraničený, tj., existují čísla $x_a^{(1)} < x_a < x_a^{(2)}$ taková, že $\mu_a(x) = 0$ pro všechna $x < x_a(1)$ a všechna $x > x_a(2)$.

Číslu x_a zmíněnému v první z obou podmínek se také říká *modální hodnota* fuzzy veličiny a.

Pro snazší vyjadřování se dohodneme na několika symbolech. Především, jsou-li a, b dvě fuzzy veličiny, pak rovnost $a = b$ znamená, že jsou si rovny jejich funkce příslušnosti $\mu_a(x) = \mu_b(x)$ pro všechna čísla x. Bývá zvykem mluvit o *lichoběžníkové fuzzy veličině*, jestliže její funkce příslušnosti má lichoběžníkový tvar. Formálněji, fuzzy veličina a je lichoběžníková, jestliže existují reálná čísla $x_a^{(1)} < x_a \leq x'_a < x_a^{(2)}$, taková, že

$$\begin{aligned}
&\mu_a(x) = 0 && \text{pro} \quad x \leq x_a^{(1)},\\
&\mu_a(x) = (x - x_a^{(1)})/(x_a - x_a(1)) && \text{pro} \quad x_a^{(1)} < x < x_a,\\
&\mu_a(x) = 1 && \text{pro} \quad x_a \leq x \leq x'_a,\\
&\mu_a(x) = (x_a^{(2)} - x)\Big/(x_a(2) - x'_a) && \text{pro} \quad x'_a < x < x_a^{(2)},\\
&\mu_a(x) = 0 && \text{pro} \quad x \geq x_a^{(2)}.
\end{aligned}$$

Když nastane rovnost $x_a = x'_a$, mluví se o *trojúhelníkové fuzzy veličině*, nebo také o *fuzzy čísle* - celkem přirozeně, protože takovou fuzzy veličinu a můžeme interpretovat jako rozšíření deterministického čísla x_a o další možné hodnoty, jejichž možnost klesá se vzdáleností od x_a.

Dohodneme se ještě na dvou symbolech. Jestliže a je fuzzy veličina, *pak opačnou fuzzy veličinu* označíme $-a$ a její funkci příslušnosti definujeme vztahem $\mu_{-a}(x) = \mu_a(-x)$ pro každé x z R. Je zřejmé, že i každé reálné číslo r z R může být považováno za jakousi degenerovanou fuzzy veličinu s jedinou možnou (a tím i modální) hodnotu r. Abychom při výkladu rozlišili, kdy o r mluvíme jako o reálném čísle a kdy jako o fuzzy veličině s nějakou funkcí příslušnosti, budeme tuto degenerovanou fuzzy veličinu označovat $\langle r \rangle$ a pro její funkci příslušnosti $\mu_{\langle r \rangle}$ platí:

$$\mu_{\langle r \rangle}(r) = 1, \qquad \mu_{\langle r \rangle}(x) \qquad \text{pro } x \neq r.$$

Pojem fuzzy veličiny sám o sobě není nijak složitý, nicméně si ho ilustrujeme na několika příkladech.
Příklad 1. Fuzzy veličina a s funkcí příslušnosti μ_a pro kterou

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= x-1 && \text{pro } 1 \le x \le 2 \\ &= 2-x/2 && \text{pro } 2 \le x \le 4 \\ &= && \text{pro ostatní } x. \end{aligned}$$

je typickou trojúhelníkovou fuzzy veličinou s modální hodnotou $x_a = 2$, která by mohla dost dobře vyjadřovat třeba vágní výraz „přibližně 2 nebo spíše o něco více“.
Příklad 2. Fuzzy veličina a, která nabývá pouze celočíselných hodnot, například

$$\mu_a(10) = 0,2, \qquad \mu_a(11) = 1,$$
$$\mu_a(12) = 0,7, \qquad \mu_a(13) = 0,1,$$
$$\mu_a(x) = 0 \quad \text{pro ostatní } x.$$

může popisovat například termíny dokončení nějaké stavby v měsících. Základní určený termín je pak 11 měsíců a s určitým stupněm možnosti je připuštěno jeho mírné zkrácení nebo naopak skluz.
Příklad 3. Funkce příslušnosti nemusí být jenom po částech lineární (jako v Příkladu 1), ale i analyticky složitější. Například veličina a pro kterou

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= \sqrt{(1-(x-1)^2)} && \text{pro } 0 \le x \le 3/2 \\ &= \sqrt{(1-(x-2)^2)} && \text{pro } 3/2 \le x \le 3 \\ &= 0 && \text{pro ostatní } x \end{aligned}$$

má dvě modální hodnoty (1 a 2) a její funkci příslušnosti tvoří dva úseky kružnic. Může vyjadřovat, například, verbální výraz „asi 1 nebo asi 2“ s možností necelých číselných hodnot.

Teorie fuzzy veličin by byla nezajímavá a chudá, kdyby končila u pouhého popisu vágních kvantitativních dat a nenabízela nástroje pro další práci s nimi. Protože jde v podstatě o matematické objekty nějak zobecňující pojem čísla, zajímají nás především početní operace s nimi a případně, pro účely optimalizace, jejich porovnávání. Podrobněji je možné se o těchto věcech poučit v literatuře, z našeho seznamu zejména v publikacích [1], [4], [5] a [2]. V tomto příspěvku se omezíme na základní aritmetické operace sčítání a ve stručné zmínce i násobení. Doplníme je operací násobení fuzzy veličiny deterministickým reálným číslem, která je v řadě úloh dosti významná.

Při popisu této problematiky se dost dobře nelze vyhnout jisté dávce matematických formulí, které nejsou nikterak obtížné, mohou ale na první pohled působit trochu složitě. Při jejich čtení je dobré mít na paměti několik jednoduchých pravidel. Už v části 2 jsme si mohli všimnout, že v teorii fuzzy množin mají zvláštní význam operace minima (která znamená současnou platnost několika jevů – například současnou příslušnost prvku ke dvěma množinám) a maxima (která znamená, že nějaký jev nastane alespoň v jednom z několika případů – například prvek bude náležet alespoň k jedné ze dvou množin). Ve světě fuzzy množin se obě operace týkají možností, že příslušné jevy (příslušnost prvků ke množinám) nastanou. Z předchozích odstavců už víme, že jsou-li a a b dvě fuzzy veličiny a x, y dvě reálná čísla, pak $\mu_a(x)$ popisuje stupeň možnosti, se kterou x může být hodnotou fuzzy veličiny a (například, se kterou můžeme 37,1°C považovat za „vysokou teplotu“) a $\mu_b(y)$ úplně stejně popisuje stupeň možnosti, se kterou y může být hodnotou fuzzy veličiny b. Možnost, že obě situace nastanou současně (tedy x bude hodnotou a a současně y bude hodnotou b) je pak číselně vyjádřena hodnotou

$$\min(\mu_a(x),\, \mu_b(y)).$$

Konečně, možnost, že se pro nějaké reálné číslo $z \in R$ najdou nějaká (jakákoli) dvě čísla x a y taková, že $x+y=z$ a přitom x bude hodnotou fuzzy veličiny a a současně y bude hodnotou fuzzy veličiny b, je číselně vyjádřitelná vzorcem

$$\sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(y)) : x,\, y \in R,\, x+y=z\right].$$

Právě popsané úvahy vypadají na první pohled trochu těžkopádně, je v nich ale při troše snahy možné najít celkem názorné a přirozené jádro. Svým charakterem spadají spíše do fuzzy logiky (kterou se tady pro nedostatek místa nezabýváme), pro naše počítání s fuzzy veličinami jsou ale také velmi významné a následujícím odstavcům porozumíme o to snáze, oč lépe si tento způsob myšlení osvojíme.

Po tomto úvodu je čas na to, abychom si řekli něco bližšího o základních aritmetických operacích s fuzzy veličinami. Jsou-li a a b dvě fuzzy veličiny, pak jejich *součet*, který označíme $a \oplus b$, bude také fuzzy veličina s funkcí příslušnosti $\mu_{a\oplus b}$, kterou vypočítáme pro každé reálné číslo z podle vzorce

$$\mu_{a\oplus b}(z) \;=\; \sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(y)) : x,\, y \in R,\, z = x+y\right]$$

Příklad 4. Uvažujme dvě fuzzy veličiny a, b s poměrně jednoduchými trojúhelníkovými funkcemi příslušnosti

$$\begin{array}{rcll} \mu_a(x) &=& x & \text{pro } x \in [0,1], \\ &=& 3-2x & \text{pro } x \in [0,\, 3/2], \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \mu_b(x) &=& x/2-1 & \text{pro } x \in [2,4], \\ &=& 5-x & \text{pro } x \in [4,5], \end{array}$$

$$\mu_a(x) = 0 \quad \text{a} \quad \mu_b(y) = 0 \quad \text{pro ostatní } x.$$

Pak není tak obtížné ověřit, že

$$\begin{array}{rcll} \mu_{a\oplus b}(x) &=& x/3 - 2/3 & \text{pro } x \in [2,5] \\ &=& 13/3 - 2x/3 & \text{pro } x \in [5,\, 13/2] \\ &=& 0 & \text{jinde.} \end{array}$$

Podle podobného principu umíme spočítat i funkci příslušnosti pro *součin* fuzzy veličin. Jsou-li a a b dvě fuzzy veličiny, pak jejich součin $a \otimes b$ je také fuzzy veličina s funkcí příslušnosti $\mu_{a\otimes b}$, jejíž hodnoty spočítáme pro každé $z \neq 0$ podle vzorce

$$\begin{array}{rcl} \mu_{a\otimes b}(z) &=& \sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(y)) : z = x \cdot y,\, x \neq 0,\, y \neq 0\right] = \\ &=& \sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(z/x)) : x \neq 0,\, x \in R\right] \end{array}$$

a pro $z = 0$ je

$$\mu_{a\otimes b}(0) = \max\left(\mu_a(0), \mu_b(0)\right),$$

tedy, je rovna možnosti, že alespoň jedna z obou fuzzy veličin nabude nulovou hodnotu.

Příklad 5. Představme si tentokrát dvě celkem jednoduché fuzzy veličiny a, b, které mohou nabývat jen celočíselných hodnot,

$$\mu_a(1) = 1, \qquad \mu_a(2) = 1/2,$$
$$\mu_b(2) = 1/10, \qquad \mu_b(3) = 1/3, \qquad \mu_b(5) = 1/4.$$

Pak je možné snadno ověřit, že

$$\mu_{a\otimes b}(2) = 1/10, \qquad \mu_{a\otimes b}(3) = 1/3, \qquad \mu_{a\otimes b}(4) = 1, \qquad \mu_{a\otimes b}(5) = 1/3,$$
$$\mu_{a\otimes b}(6) = 1/3, \qquad \mu_{a\otimes b}(8) = 1/2, \qquad \mu_{a\otimes b}(10) = 1/4.$$

Nakonec se pro úplnost zmíníme o zvláštním případu násobení, totiž součinu fuzzy veličiny s deterministickým číslem. Jedná se o speciální případ předchozího vzorce. Je-li a fuzzy veličina a $r \in R$ reálné číslo, pak *deterministický součin* $r \cdot a$ je také fuzzy veličina s funkcí příslušnosti $\mu_{r\cdot a}$ určenou podle vzorce

$$\mu_{r\cdot a}(x) = \mu_a(x/r) \quad \text{je-li} \quad r \neq 0,$$
$$\mu_{r\cdot a}(x) = \mu_{\langle 0\rangle}(x) \quad \text{je-li} \quad r = 0.$$

(symbol $\langle 0\rangle$ pro fuzzy veličinu degenerovanou do jediné možné hodnoty jsme zavedli v jednom z předchozích odstavců této části).

Právě popsaný způsob uvažování, pokud jde o sčítání a násobení, je možné zobecnit na tak zvaný *rozšiřovací princip*. Je-li f reálná funkce n reálných proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak je možné ji rozšířit na funkci, jejímž argumentem je n fuzzy veličin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s funkcemi příslušnosti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Její funkční hodnota je pak také fuzzy veličina $a = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s funkcí příslušnosti μ_a definovanou vztahem

$$\mu_a(y) = \sup\left[\min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)) : y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right].$$

Povšimněme si, že rozšiřovací princip dobře funguje i pro $n = 1$, jak se lze přesvědčit třeba na definici opačné fuzzy veličiny $-a$.

Od číselných veličin jsme zvyklí očekávat některé vlastnosti, které jsou známy pro obvyklá deterministická čísla. O tom, jak dalece platí i pro fuzzy veličiny se můžeme dočíst v publikacích [4] a [5]. Zde si jenom připomeneme, jaké vlastnosti mají operace sčítání a deterministického součinu, případně jejich kombinace, tedy operace lineárního prostoru. Pro řadu optimalizačních úloh jsou právě ony podstatné. Nejprve vyjmenujeme ty vlastnosti, které známe z deterministické matematiky a které jsou splněny i pro fuzzy veličiny. Začneme vlastnostmi sčítání. Pro každé fuzzy veličiny a, b, c platí:

— komutativita: $a \oplus b = b \oplus a$,
— asociativita: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$,
— existence nulového prvku: $a \oplus \langle 0\rangle = a$.

Od deterministického součinu očekáváme také některé vlastnosti, obvyklé v deterministických lineárních prostorech. Pro každou fuzzy veličinu a a každá reálná čísla r_1, $r_2 \in R$ platí:

— $r_1 \cdot (r_2 \cdot a) = (r_1 r_2) \cdot a$,
— $1 \cdot a = a$.

Pro kombinaci obou operací pak platí:

— distributivita: $r \cdot (a \oplus b) = r \cdot a \oplus r \cdot b$.

kde a, b jsou fuzzy veličiny a r je reálné číslo.

Ti, kdo znají lineární (vektorové) prostory, ale koneckonců i ti, kdo si uvědomují obecně platná pravidla při počítání s obvyklými čísly, si možná všimli, že v předchozím výčtu něco chybí. Jsou to dvě pravidla, platná i užívaná v deterministické aritmetice a v teorii lineárních vektorových prostorů. První z nich je pravidlo o existenci opačného prvku (o něco výše jsme si už řekli, co je fuzzy veličina $-a$ opačná k nějaké fuzzy veličině a). Požaduje se v něm, aby byl každý součet prvku s prvkem opačným – v našem značení součet $a \oplus (-a)$ – roven nule. My jsme za nulu pokládali degenerovanou fuzzy veličinu $\langle 0 \rangle$, protože jenom pro ni platí $a + \langle 0 \rangle = a$ pro každou fuzzy veličinu a. Tento požadavek pro fuzzy veličiny splněn není. Součet $a \oplus (-a)$ není (kromě případu, kdy a je sama degenerovaná do jediné hodnoty) roven žádné degenerované fuzzy veličině, ale má vždy širší obor hodnot.
Příklad 6. Zkusme pracovat s fuzzy veličinou a, popsanou v příkladu 1. Tedy

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= x - 1 && \text{pro } 1 \leq x \leq 2, \\ &= 2 - x/2 && \text{pro } 2 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Pak je fuzzy veličina k ní opačná a dána funkcí příslušnosti

$$\begin{aligned} \mu_{-a} &= x/2 + 2 && \text{pro } -4 \leq x \leq -2 \\ &= -x - 1 && \text{pro } -2 \leq x \leq -1 \end{aligned}$$

a součtem obou veličin je trojúhelníková fuzzy veličina $a \oplus (-a)$ s funkcí příslušnosti

$$\begin{aligned} \mu_{a\oplus(-a)}(x) &= x/3 + 1 && \text{pro } -3 \leq x \leq 0 \\ &= 1 - x/3 && \text{pro } 0 \leq x \leq 3, \end{aligned}$$

a s modální hodnotou v nule.

Druhé pravidlo, o kterém jsme se nezmínili, je druhý distribuční zákon. Požaduje se v něm, aby se deterministický součin fuzzy veličiny dal rozložit na součet deterministických součinů: jsou-li r_1, r_2 dvě reálná čísla a je-li a fuzzy veličina, pak jsme zvyklí požadovat, aby platila rovnost $(r_1 + r_2) \cdot a = r_1 \cdot a \oplus r_2 \cdot a$. Bohužel, ani tento požadavek fuzzy veličiny nesplňují. Je to nepříjemné, protože nejsme příliš zvyklí na život ve světě, ve kterém $a \oplus a$ není totéž co $2 \cdot a$.
Příklad 7. Uvažujme fuzzy veličinu a, která nabývá celočíselných hodnot,

$$\mu_a(1) = 1/2, \qquad \mu_a(2) = 1, \qquad \mu_a(3) = 1/4, \qquad \mu_a(x) = 0$$

pro ostatní x. Pak je $2 \cdot a$ fuzzy veličina s funkcí příslušnosti

$$\mu_{2\cdot a}(2) = 1/2, \qquad \mu_{2\cdot a}(4) = 1, \qquad \mu_{2\cdot a}(6) = 1/4, \qquad \mu_{2\cdot a}(x) = 0$$

pro ostatní x. Na rozdíl od ní má fuzzy veličina $a \oplus a$ funkci příslušnosti

$$\begin{aligned} &\mu_{a\oplus a}(2) = 1/2, \quad \mu_{a\oplus a}(3) = 1/2, \quad \mu_{a\oplus a}(4) = 1, \\ &\mu_{a\oplus a}(5) = 1/4, \quad \mu_{a\oplus a}(6) = 1/4, \quad \mu_{a\oplus a}(x) = 0 \end{aligned}$$

pro ostatní x.

Je tak trochu s podivem, že se fuzzy veličiny, které jsou v podstatě tak trochu „matnějšími“ nebo „rozmazanými“ čísly, úplně jako čísla nechovají. Nabízejí se dvě možnosti. Buď vágnost dává číslům zcela nové kvality (vzpomeňme si na množinu, která je podmnožinou svého doplňku), nebo jsme některé z požadovaných vlastností formulovali nějak proti duchu vágních čísel. Zkusme se na situaci podívat z hlediska té druhé možnosti.

4. Co je jinak?

V předešlé části jsme si řekli, že lineární operace sčítání a deterministického součinu splňují šest z obvyklých osmi podmínek, které má splňovat lineární prostor. Současně jsme se rozhodli ověřit, zda nesplnění zbývajících dvou není způsobeno nějakou neobratností při jejich formulaci. Zdá se, že tomu tak opravdu je. Fuzzy veličiny jsou sice v podstatě kvantitativní, tedy číselné veličiny, a máme právo od nich očekávat vlastnosti podobné těm, které platí pro jiná čísla. Současně to ale jsou veličiny s osobitou vnitřní strukturou, kterou je třeba při formulaci jejich vlastností respektovat.

Začněme s vlastností, požadovanou pro součet fuzzy veličiny s fuzzy veličinou k ní opačnou. Ve formálním zápise jde o součet $a \oplus (-a)$ o kterém požadujeme, aby byl roven nulovému prvku. Za nulovou fuzzy veličinu už jsme označili veličinu $\langle 0 \rangle$ s možnými hodnotami kondenzovanými do nuly. Na první pohled je takové určení nuly nezbytné, aby byla splněna podmínka $a \oplus \langle 0 \rangle = a$ pro libovolnou fuzzy veličinu a. Současně ale vidíme, že takto úzce pojatá nula nikdy nemůže vyhovovat požadavku o opačném prvku. Součet $a \oplus (-a)$ nebude (pokud a není degenerovaná) veličina s jedinou možnou hodnotou. Naopak, vzorec pro součet fuzzy veličin nutně vede k tomu, že výsledek součtu $a \oplus b$ bude zahrnovat větší rozsah možných hodnot. Z toho se dá vytušit, že nejspíš bude něco v nepořádku s naším pojetím fuzzy nuly.

Nejprve si vyzkoušejme, jaké mohou být výsledky součtu fuzzy veličiny s opačným prvkem. Fuzzy veličinu s s funkcí příslušnosti μ_s budeme nazývat 0-*symetrickou*, jestliže pro každé x z R platí

$$\mu_s(x) = \mu_s(-x).$$

Název je to celkem názorný – funkce příslušnosti 0-symetrické fuzzy veličiny je opravdu symetricky rozložená kolem nuly. Pro nás je ale podstatné to, že každý součet typu $a \oplus (-a)$ má za výsledek 0-symetrickou fuzzy veličinu. Našli jsme tedy vhodné kandidáty na fuzzy nulu a, mimochodem, i fuzzy veličina $\langle 0 \rangle$ je 0-symetrická. K tomu, abychom mohli 0-symetrické fuzzy veličiny přijmout jako fuzzy nuly, musíme překonat dvě překážky. Především, je jich nespočetně mnoho a my s nimi proto musíme umět pracovat jako s celou třídou. Druhá překážka je ve správné platnosti pravidla o součtu fuzzy množiny s nulou. Pro 0-symetrickou fuzzy množinu s a jakoukoli jinou fuzzy veličinu neplatí $a \oplus s = a$ ve smyslu rovnosti funkcí příslušnosti (s výjimkou speciálního případu $s = \langle 0 \rangle$). Zdá se, že jsme splnění jedné z požadovaných vlastností pouze vykoupili nesplněním jiné. Ve skutečnosti je nezbytné, abychom se v našich úvahách nezastavili u nového, širšího pojetí fuzzy nuly, ale abychom se zamysleli ještě nad naším pojetím rovnosti dvou fuzzy veličin a nad jeho možným zeslabením.

Jsou-li a, b dvě fuzzy veličiny, pak řekneme, že jsou *aditivně ekvivalentní* a píšeme $a \sim_\oplus b$, jestliže existují 0-symetrické fuzzy veličiny s_1, s_2 takové, aby

$$a \oplus s_1 = b \oplus s_2.$$

řečeno méně formálně, dvě fuzzy veličiny budeme považovat za ekvivalentní, jestliže se od sebe liší pouze o fuzzy nulu. Právě popsaná aditivní ekvivalence má vlastnosti obvyklé u relací ekvivalence, reflexivitu, symetrii a tranzitivitu. Konkrétně, pro fuzzy veličiny a, b, c platí: $a \sim_\oplus a$, je-li $a \sim_\oplus b$, je i $b \sim_\oplus a$, z platnosti $a \sim_\oplus b$ a $b \sim_\oplus c$ plyne i $a \sim_\oplus c$. Kromě nich platí další vlastnosti, které nás budou zajímat. Především, všechny 0-symetrické fuzzy veličiny jsou mezi sebou navzájem aditivně ekvivalentní. Kromě toho, pokud jsou si dvě fuzzy veličiny a, b rovny, tj. $a = b$, pak jsou samozřejmě také aditivně ekvivalentní.

Dáme-li tyto vlastnosti dohromady s tím, co už o fuzzy veličinách, jejich součtech a deterministických součinech víme, pak není nikterak těžké odvodit, že všechny vlastnosti uvedené v předchozí části ve tvaru rovností platí i ve tvaru aditivních ekvivalencí. Například $a \oplus b \sim_{\oplus} b \oplus a$ nebo $a \oplus \langle 0 \rangle \sim_{\oplus} a$ a navíc pro každou 0-symetrickou fuzzy veličinu s a každou fuzzy veličinu a platí $a \oplus s \sim_{\oplus} a$ a zejména $a \oplus (-a) \sim_{\oplus} s$ (tedy také $a \oplus (-a) \sim_{\oplus} \langle 0 \rangle$). Tím už víme, že v oslabeném tvaru, ve kterém je rovnost nahrazena aditivní ekvivalencí a za fuzzy nuly považujeme 0-symetrické fuzzy veličiny, platí už sedm z osmi vlastností požadovaných pro lineární prostor. Zbývá ověřit, jak v tomto oslabeném tvaru vyjde poslední ze zkoumaných vlastností, totiž distributivní vztah mezi $(r_1 + r_2) \cdot a$ a $r_1 \cdot a \oplus r_2 \cdot a$ pro reálná čísla r_1, r_2 a fuzzy veličinu a.

Pokud má právě popsané oslabení operací s fuzzy veličinami (to znamená zavedení 0-symetrických fuzzy nul a aditivní ekvivalence místo rovnosti) oporu v realitě, měla by platit slabší verze distributivity třeba ve tvaru ekvivalence

$$(r_1 + r_2) \cdot a \sim_{\oplus} r_1 \cdot a \oplus r_2 \cdot a.$$

Je třeba říci, že tento problém je zatím vyřešen jen zčásti. Je dokázáno, že právě uvedená ekvivalence platí pro lichoběžníkové fuzzy veličiny a a pro fuzzy veličiny, které jsou s nimi aditivně ekvivalentní. To jsou fuzzy veličiny, které je možné napsat ve tvaru $a \oplus s$, kde fuzzy veličina a je lichoběžníková a s je 0-symetrická. Nepodařilo se ale ani najít příklad fuzzy veličiny pro kterou by uvedená distributivní ekvivalence neplatila. Zdá se tedy být docela pravděpodobné, že jsme fuzzy nulu i aditivní ekvivalenci zvolili tak, aby odpovídala charakteru vágních kvantitativních veličin a aby vedla k platnosti všech vlastností lineárního prostoru. Je na místě zdůraznit i to, že lichoběžníkové a jim ekvivalentní fuzzy veličiny představují z hlediska aplikací velmi významnou skupinu fuzzy veličin, navíc je to skupina uzavřená vzhledem k součtu a deterministickému součinu (to znamená, že součet a deterministický součin takových fuzzy veličin je také lichoběžníková nebo s ní ekvivalentní fuzzy veličina). Její linearita pak umožňuje poměrně pohodlně řešit širokou škálu aplikačních úloh.

To, že jsme 0-symetrické fuzzy veličiny označili za fuzzy nulu právem, je podpořeno ještě jednou skutečností. V běžné aritmetice je součin nuly s jakýmkoli číslem vždy nula. Totéž platí pro naši fuzzy nulu. Pro každou fuzzy veličinu a a každou 0-symetrickou fuzzy veličinu s je součin $a \otimes s$ také 0-symetrická fuzzy veličina.

Vše tedy svědčí pro to, že popsaná cesta k chápání základních obecných charakteristik fuzzy veličin jako algebraicky zvládnutelných kvantitativních objektů je zřejmě ta pravá.

5. Která fuzzy veličina je větší

Počítání (sčítání, násobení a další operace) není to jediné, co se dá s fuzzy čísly dělat. V některých případech potřebujeme fuzzy čísla mezi sebou porovnávat, stanovit, které ze dvou fuzzy čísel je větší a které z několika fuzzy čísel je největší nebo nejmenší. Jindy nás zajímá, zda jsou si dvě fuzzy čísla v nějakém smyslu podobná nebo rovnocenná. Zejména v optimalizačních úlohách, kde je třeba hledat nejlepší varianty nějakého postupu, je zvládnutí relací uspořádání a podobnosti často dosti podstatné.

Než si o něm řekneme něco bližšího, připomeňme dvě zmínky, které jsme o této problematice udělali v předchozích částech. Především, jednu relaci podobnosti (totiž relaci aditivní ekvivalence) jsme si už popsali. Byla zavedena k jednomu účelu, totiž vysvětlit chování aritmetických operací s fuzzy čísly. Pro účely uspořádání fuzzy čísel příliš užitečná není. Tam budeme muset pracovat s trochu jinými formálními nástroji. Druhá zmínka, která se problému uspořádání fuzzy veličin okrajově týká, byla uvedena v části o fuzzy množinách. V jejím závěru jsme zavedli pojem fuzzy relace. Je užitečné si uvědomit rozdíl mezi fuzzy relací (třeba uspořádáním) mezi nějakými objekty, která může platit jenom „možná“ nebo „tak trochu“ a může se klidně vztahovat i na zcela deterministické objekty, a na druhé straně relací, do které vstupují fuzzy objekty (třeba fuzzy čísla), která ale sama o sobě může být zcela jednoznačně deterministická s platností pouze typu ano/ne. Takovou deterministicky platnou relací mezi fuzzy veličinami je právě už zmíněná aditivní ekvivalence. Samozřejmě, mohou být studovány i fuzzy relace mezi fuzzy veličinami a má to svůj smysl – zanedlouho si o nich řekneme něco bližšího.

Teorii relací uspořádání mezi fuzzy veličinami byla v literatuře věnována zasloužená pozornost a byla navržena celá řada možných přístupů k tomuto problému. Ty podstatnější jsou shrnuty v rozsáhlém přehledovém článku [2] a je jich v něm uvedeno poměrně hodně. Jistá zmínka o některých je i v [1], [4], [5]. Pro začátek si řekněme, že tak velké množství možných (a různých!) přístupů k problematice budí rozpaky. Vypadá to, jako by nějaká obecně platná teorie uspořádání fuzzy veličin ani nemohla být nalezena, jako by pouze existovala jakási zásoba možných postupů, z nichž každý se hodí na některý typ konkrétních modelovaných situací. Teprve budoucnost snad ukáže, zda je tomu opravdu tak.

Po tomto úvodu do situace se stručně zaměříme na jeden typ relace uspořádání fuzzy veličin. Je založen na zajímavé a docela rozumné úvaze – že totiž relace mezi vágními (fuzzy) veličinami, kterým vyhovuje více možných hodnot, asi nemůže platit jednoznačně. Její platnost bude asi záležet na tom, jakých z více hodnot porovnávaných fuzzy veličin se zrovna týká a bude tedy nastávat pouze s určitým stupněm možnosti. Jinými slovy, měla by to být fuzzy relace. Vraťme se tedy k tomu, co jsme si už o fuzzy relacích řekli a použijme to na naši konkrétní situaci.

Univerzum $\mathcal{U}$, ve kterém se pohybujeme, je teď množina všech fuzzy veličin. Fuzzy *relace uspořádání*, označme ji třeba $\geq$, pak bude popsána nějakou fuzzy podmnožinou množiny všech dvojic (a, b), kde a, b jsou fuzzy veličiny. Hodnota její funkce příslušnosti $\mu_{\geq}(a, b)$ označuje možnost, se kterou platí relace $a \geq b$ mezi těmito konkrétními veličinami. Relaci $\geq$ můžeme číst třeba „a je lepší nebo rovnocenná s b“. Zbývá navrhnout metodu, jak určit hodnotu funkce příslušnosti $\mu_{\geq}(a, b)$ a mělo by se tak stát na základě naší znalosti o tom, jakých hodnot a s jakými možnostmi mohou nabývat veličiny a, b – tedy na základě jejich funkcí příslušnosti μ_a, μ_b. Vzorec, kterým se stanovují hodnoty $\mu_{\geq}(a, b)$ je, nikoli náhodou, podobný vzorci pro výpočet součtu nebo součinu fuzzy veličin. Použijeme-li k jeho interpretaci stejných úvah jako v případě $\mu_{a \oplus b}$ a $\mu_{a \otimes b}$, snadno si uvědomíme jeho metodologická východiska. Nuže, hodnotu funkce příslušnosti $\mu_{\geq}$ pro fuzzy veličiny a, b, spočítáme ze vztahu

$$\mu_{\geq}(a, b) = \sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(y)) : x,\ y \in R,\ x \geq y\right].$$

Příklad 8. Zkusme uvedenou metodou porovnat dvě jednoduché trojúhelníkové fuzzy veličiny a, b, kde

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= x && \text{pro } x \in [0,1], & \mu_b(x) &= x/3 && \text{pro } x \in [0,3],\\ &= 3/2 - x/2 && \text{pro } x \in [1,3], & &= 4 - x && \text{pro } x \in [3,4], \end{aligned}$$

$$\mu_a(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad \mu_b(y) = 0 \qquad \text{pro jiná } x.$$

Pak možnost, že $b \geq a$ a že $a \geq b$ je

$$\mu_{\geq}(a, b) = 9/15 = 3/5, \qquad \mu_{\geq}(b, a) = 1.$$

Podobným způsobem je možné zavést i *relaci ekvivalence* mezi dvěma fuzzy veličinami, označíme ji $\sim$ a také v jejím případě se jedná o fuzzy relaci – mezi dvěma fuzzy veličinami a, b platí jen s určitou možností $\mu_\sim(a,b)$ a funkce příslušnosti tak zobrazuje množinu dvojic z univerza do intervalu mezi 0 a 1, včetně. Přitom pro veličiny a, b

$$\mu_\sim(a,b) = \sup\left[\min(\mu_a(x), \mu_b(x)) : x \in R\right].$$

Takto zavedené relace uspořádání a ekvivalence mají řadu rozumných vlastností, které se podobají vlastnostem nerovnosti a rovnosti mezi obvyklými čísly. Tak například, pro každé fuzzy veličiny a, b platí, že

$$\mu_\sim(a,a) = \mu_\geq(a,a) = 1,$$
$$\mu_\sim(a,b) = \mu_\sim(b,a) = \min\left(\mu_\geq(a,b), \mu_\geq(b,a)\right),$$

neexistuje ale žádná zákonitost, která by obecně připomínala tranzitivitu uspořádání, to znamená určovala nějaký vztah mezi hodnotami funkce příslušnosti $\mu_\geq(a,b)$, $\mu_\geq(b,c)$ a $\mu_\geq(a,c)$ pro obecné fuzzy veličiny a, b, c. Stejná obtíž existuje i v případě relace ekvivalence $\sim$.

6. Metoda kritické cesty pro vágní znalosti

Teoretické úvahy, které jsme v předcházejících částech vedli, a také formální metody, které se o ně opírají, nejsou samoúčelné hříčky. Mají svůj smysl, jsme-li postaveni před úkol nějak adekvátně počítat s údaji, které nejsou přesně vymezené, ale které připouštějí větší množství různých hodnot, přičemž tato různost nemá náhodný charakter.

Jako příklad si na závěr uveďme metodu kritické cesty (CPM) s vágními představami o délce činností.

Pro ty, kteří na používání CPM dosud nenarazili, uveďme velmi stručné a velmi zjednodušené vysvětlení, oč se jedná. Blíže a formálně přesněji je možné se o CPM a její fuzzy odrůdě dočíst v řadě prací, uveďme jako příklad článek [6]. Nejprve připomeňme stručnou představu o původním deterministickém modelu. Vznikl v šedesátých letech jako metoda pro optimální organizaci a koordinaci složitých výrobních postupů sestávajících z celé řady jednotlivých činností. Některé z těchto činností na sebe navazují, takže následující činnost nemůže být zahájena dříve než jsou bezprostředně předcházející činnosti ukončeny, jiné činnosti mohou být realizovány paralelně. Vzniká tak více či méně složitá struktura (bývá poměrně přehledně reprezentována tak zvaným síťovým grafem). Pro nás je v této struktuře podstatný pojem „*cesta*“, což je posloupnost na sebe bezprostředně navazujících činností počínaje startem celého procesu a konče jeho celkovým ukončením. Protože některé činnosti mohou probíhat souběžně, existuje v celé struktuře několik, zpravidla poměrně velké množství, cest. Označme jejich počet jako n.

Každá činnost, označíme ji třeba A_i, trvá nějaký čas, my si ho označíme t_i. Je-li cesta $\mathcal{P}_i$ tvořena posloupností činností $A_{i_1}.A_{i_2},\dots,A_{i_m}$, pak píšeme $\mathcal{P}_i = (A_{i_1},\dots,A_{i_m})$ a je zjevné, že její trvání zabere čas $t(\mathcal{P}_i)$, který je součtem časů potřebných na její činnosti,

$$t(\mathcal{P}_i) = t_{i_1} + t_{i_2} + \cdots + t_{i_m}.$$

Protože je při organizování takto komplikovaných a strukturovaných postupů důležité dodržet stanovený čas, bude pro organizátora důležité rozeznat „rizikové“ činnosti, jejichž zdržení zdrží celý pracovní postup, od těch, u kterých si může dovolit určitou rezervu a případně stanovit meze těchto rezerv. Důležité z tohoto hlediska je najít cestu s nejdelším celkovým trváním, tedy cestu $\mathcal{P}$ takovou, že pro všechny cesty $\mathcal{P}_1$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$t(\mathcal{P}) \geq t(\mathcal{P}_i).$$

Takové cestě se říká *kritická cesta* a pro každou cestu $\mathcal{P}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, nazveme rozdíl

$$r(\mathcal{P}_i) = t(\mathcal{P}) - t(\mathcal{P}_i)$$

rezervou cesty $\mathcal{P}_i$ vůči kritické cestě $\mathcal{P}$. Je to čas, o který je možné činnosti skládající cestu $\mathcal{P}_i$, ale nepatřící do kritické cesty $\mathcal{P}$, zdržet, aniž by bylo ohroženo včasné splnění celé analyzované činnosti. Rozpis rezerv cest na jednotlivé činnosti se děje podle dobře zdůvodněných a přirozených pravidel, která lze najít ve specializované literatuře a dnes už i v učebnicích – v tomto článku se jimi nebudeme zabývat. Naše úvahy se budou týkat cest a jejich rezerv. V této chvíli si uvědomíme, že v popsaném deterministickém případě nemůže být žádná rezerva záporná a kritická cesta je popsána jednoznačně (až na možnost několika cest stejné délky).

Skutečné výrobní postupy (třeba ve stavebnictví) často vykazují méně oné optimistické jistoty, kterou jsme spojili s očekávanou délkou činností t_i. Během delšího výrobního postupu může dojít ke změnám některých technologií, mohou se měnit subdodavatelé a také někteří z nich nemusí být tak spolehliví, jak by odpovídalo deterministickým (to znamená jednoznačně stanoveným) délkám činností. U některých činností pak připadá v úvahu více možných hodnot jejich trvání, přičemž jednotlivé hodnoty mohou nastat s různými možnostmi. Tím jsme vstoupili do světa fuzzy veličin.

Budeme proto nadále předpokládat, že pro každou činnost A_j je její délka t_j fuzzy veličina. V některých případech může být degenerovaná do jediné hodnoty, obecně ale můžeme předpokládat, že nabývá více možných hodnot. Není na újmu kvality dalších úvah, když si řekneme, že jde vždy o hodnoty celočíselné, protože délky činností bývají udávány v celém počtu nějakých časových jednotek.

To, že jsou délky činností fuzzy veličiny znamená, že i délky cest budou fuzzy veličiny vypočítané jako součty

$$t(\mathcal{P}_i) = t_{i_1} \oplus t_{i_2} \oplus \cdots \oplus t_{i_m},$$

pokud se jedná o cestu $\mathcal{P}_i = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m})$. Jestliže pracujeme s délkami cest jako s vágními (fuzzy) veličinami, pak se musíme smířit s tím, že i pojmy, které na ně navazují, se stanou poněkud vágními. Především musíme pro porovnání fuzzy délek cest použít nějakou relaci uspořádání na množině fuzzy veličin. Může to být třeba fuzzy relace uspořádání, kterou jsme popsali v předešlé části. Pokud se pro ni rozhodneme, pak víme, že pro cesty $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_j$ s délkami $t(\mathcal{P}_i)$, $t(\mathcal{P}_j)$ je cesta $\mathcal{P}_i$ delší, tj. $t(\mathcal{P}_i) \geq t(\mathcal{P}_j)$, s možností

$$\mu_{\geq}\,(t(\mathcal{P}_i),\, t(\mathcal{P}_j))$$

a naopak s možností

$$\mu_{\geq}\,(t(\mathcal{P}_j),\, t(\mathcal{P}_i))$$

bude delší cesta $\mathcal{P}_j$. Samozřejmě obvykle bude jedna z těchto možností rovna 1 a může se stát (ale nemusí), že druhá z nich bude rovna 0. To důležité je, že cesty se ocitají ve vztahu „být delší“ nebo „být kratší“ s určitým stupněm možnosti. Pak ale také vlastnost „být kritickou cestou“ nebude vlastností typu ano/ne, ale jednotlivé cesty jí mohou nabývat s jistým stupněm možnosti. řečeno o něco přesněji, jestliže si symbolem $\boldsymbol{P}$ označíme množinu všech cest v daném sledovaném výrobním postupu, pak kritické cesty budou tvořit fuzzy podmnožinu množiny $\boldsymbol{P}$. Její funkci příslušnosti označíme μ_{Kr} a každý, kdo si už osvojil způsob uvažování ve světě fuzzy množin jistě tuší, že pro libovolnou cestu $\mathcal{P}_i$ bude

$$\mu_{\mathrm{Kr}}(\mathcal{P}_i) = \min\left(\mu_{\geq}(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) : \mathcal{P}_j \in \boldsymbol{P}\right).$$

Tím, že jsme připustili vágnost pojmu kritické cesty, jsme si poněkud zkomplikovali život, pokud se týká rezerv jednotlivých cest vůči kritické cestě. Otázka je, vůči které? Teoreticky bychom měli počítat rezervy každé cesty vůči všem ostatním a analyzovat je. Je to práce namáhavá, nepřehledná a naštěstí také zbytečná. Z vlastností fuzzy relace uspořádání $\geq$ plyne, že vždy bude existovat alespoň jedna cesta $\mathcal{P}_i$, pro kterou bude $\mu_{\mathrm{Kr}}(\mathcal{P}_i) = 1$ a pokud bude takových cest více, budou mít společnou modální hodnotu své délky $t(\mathcal{P}_j)$, která nastává s možností rovnou 1. Tuto cestu (tyto cesty), která je kritická s možností $\mu_{\mathrm{Kr}}(\mathcal{P}_i) = 1$, budeme právem považovat za nejzajímavější z hlediska rezerv a budeme proto počítat rezervy ostatních cest vůči ní. Vnímavý čtenář už ví, že rezervy, které byly spočítány jako rozdíl fuzzy veličin, budou také fuzzy veličiny. K fuzzy délce $t(\mathcal{P}_j)$ každé cesty už umíme spočítat opačnou veličinu $-t(\mathcal{P}_j)$ a rezerva cesty $\mathcal{P}_j$ vůči „kritické“ cestě $\mathcal{P}_i$, kterou označíme $r(\mathcal{P}_j, \mathcal{P}_i)$ pak bude dána vztahem

$$r(\mathcal{P}_j, \mathcal{P}_i) = t(\mathcal{P}_i) \oplus (-t(\mathcal{P}_j)).$$

Když jsme spočítali fuzzy rezervy každé cesty vůči „nejkritičtější ze všech možná kritických cest“, která je také současně „jistě kritická“, dostali jsme se konečně k výsledkům, pro které mělo smysl celou proceduru podstupovat. Vágnost v délkách t_j činností A_j musí znamenat nejen to, že se nemůžeme spolehnout na přesné délky cest, ale v důsledku toho ani na to, že délka některé cesty shodou okolností s nějakou možností nepřesáhne délku cesty, kterou jsme dosud považovali za kritickou. Jinými slovy, existuje možnost, že i činnost, která se vyskytuje na nekritické cestě, může zdržet realizaci celého pracovního postupu. Tuto možnost můžeme kvantitativně měřit právě díky fuzzy rezervám cest. Některé z těchto rezerv $r(\mathcal{P}_j, \mathcal{P}_i)$ mohou s nějakou nenulovou možností nabývat i záporných hodnot a právě tato možnost je i možností, že cesta $\mathcal{P}_j$ bude trvat déle než cesta $\mathcal{P}_i$, dosud považovaná za kritickou. Velikost této možnosti pak určuje, jak dalece musíme pozorně sledovat i realizaci činností na cestě $\mathcal{P}_j$ a rizika, která jsou s nimi spojena.

Tento teoretický poznatek není zatím rozpracován do úrovně jednotlivých činností. Už na úrovni celých cest znamená kvalitativně nový pohled na metodu kritické cesty, který byl umožněn právě díky využití teorie fuzzy množin a fuzzy veličin.

7. Několik poznámek závěrem

V předchozích částech tohoto příspěvku byly hodně stručně a z hlediska matematického formalismu spíše zjednodušeně popsány některé úvahy, spojené s matematickými popisy vágnosti, které se v odborné literatuře ujaly pod termínem „fuzzy množiny“ a „fuzzy veličiny“. Celá teorie je dnes už hodně rozsáhlá, má celou řadu praktických aplikací a účelem tohoto textu nemohlo být podání ani zdánlivě úplného přehledu teorie fuzzy veličin. Nezmínili jsme se prakticky o vlastnostech součinu fuzzy čísel, které vedou k obtížím trochu analogickým těm, které jsme tady zmínili v souvislosti se sčítáním. řeší se poněkud podobně, v konkrétních podrobnostech ale existují rozdíly, které působí dost starostí (o podrobnostech se lze dočíst ve [4], [5], [1]).

Jiným problémem, který komplikuje užívání fuzzy veličin, je enormní růst neurčitosti výsledku (přesněji, rozsahu možných hodnot výsledku) při několikanásobném opakování početních operací, zejména sčítání. Jedná se o problém, který může znehodnocovat některé praktické aplikace teorie fuzzy veličin a který zatím nebyl uspokojivě překonán. Na jedné z možných metod (její východiska jsou stručně naznačena například v [7]), se intenzivně pracuje, zatím je ale ve stádiu jednoho z možných přístupů.

Přes všechny uvedené potíže je dnes zřejmé, že počítání s fuzzy veličinami budí zasloužennou pozornost odborníků a že zvládnutí potřebné teorie otevírá efektivní cestu ke zvládnutí vágních kvantitativních dat kupříkladu v ekonometrických analýzách, zpracování nejistých dat, nebo v řadě optimalizačních úloh.

Literatura

[1] D. Dubois, H. Prade: Fuzzy numbers: An overview. in: Analysis of Fuzzy Information (Bezdek, J.C. – Ed.), Vol. 2, CRC–Press, Boca Raton 1988, 3–39.
[2] E. E. Kerre, X. Wang: Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities. Part I, Part II, Fuzzy Sets and Systems 118 (2001), 375-383 and 387–405.
[3] G. J. Klir, Bo Yuan (Editors): Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems. Selected papers by Lotfi A. Zadeh. World Scientific, Singapore, London 1996.
[4] M. Mareš: Computation Over Fuzzy Quantities. CRC–Press, Boca Raton 1994.
[5] M. Mareš: Weak arithmetics of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems 91 (1997), 2, 143–154.
[6] M. Mareš: Metoda kritické cesty s vágními délkami činností. Acta Oeconomica Pragensia 8 (2000), 2, 48–59.
[7] M. Mareš, R. Mesiar: Composition of shape generators. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 4 (1996), 1, 37–45.
[8] V. Novák: Fuzzy množiny a jejich aplikace. SNTL, Praha 1985.
[9] L. A. Zadeh: Fuzzy sets. Information and Control 8 (1965), 3, 338–353.

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 182 08 Praha 8
E-mail: mares@utia.cas.cz