

O ODHADU PARAMETRŮ V JEDNODUCHÉM NELINEÁRNÍM MODELU KLOUZAVÝCH SOUČTŮ

TOMÁŠ MAREK

ABSTRAKT. The paper is concerned with a parameter estimation in the simple non-linear moving average time series model given by $X_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$. The model mentioned in Tong (1990) is a stochastic perturbation of the linear MA(1) model, where the constant coefficient α is substituted by a random one $\alpha + \beta\varepsilon_t$. Moment and maximum likelihood estimators are presented.

Абстракт. В этой статье мы занимаемся оценкой параметров в случае простой нелинейной модели скользящего среднего. Исследованный процесс имеет вид $X_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$, он упомянутый в книге Тонга (1990) и имеет форму стохастической пертурбации линейного процесса скользящего среднего, где находится вместо коэффициента α случайная переменная $\alpha + \beta\varepsilon_t$. Мы исследуем методы использующие моменты и функцию правдоподобия.

1. ÚVOD

Nelineární modely klouzavých součtů jsou velmi obecnou třídou náhodných procesů, které jsou definovány nějakou nelineární transformací bílého šumu. V tomto článku se budeme zabývat speciálním modelem daným vzorcem

$$X_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1},$$

kde ε_t je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2 , parametry α, β jsou z intervalu $(0; 1)$. Námí zkoumaný model ve srovnání s dobře známým lineárním modelem MA(1) obsahuje navíc ještě součin posledních dvou hodnot bílého šumu. Tento součin je také příčinou některých zajímavých vlastností náhodného procesu, které zmiňuje Tong (1990). Patří mezi ně například schopnost produkovat náhle velké hodnoty X_t , stejně jako například některá hydrologická data. V dalších částech na základě pozorovaných hodnot X_t odhadneme parametry α a β a to momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti. Část věnovaná metodě maximální věrohodnosti navazuje na publikaci uvedenou ve sborníku WDS'99 - viz. Marek(1999). Na závěr pak zmíníme některé výhody a nedostatky obou metod.

2. MOMENTOVÉ ODHADY

Předpokládejme v této části, že bílý šum ε_t má konečné momenty aspoň čtvrtého řádu. Za této podmínky označme

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{E} X_t^2 = (1 + \alpha^2)\sigma^2 + \beta^2\sigma^4, \\ b &= \mathbf{E} X_t X_{t-1} = \alpha\sigma^2, \\ c &= \mathbf{E} X_t X_{t-1} X_{t-2} = \alpha\beta\sigma^4. \end{aligned}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 62M10.

Klíčová slova. Nelineární model klouzavých součtů.

Tato práce vznikla za podpory grantů GAČR 201/00/0770 a VZ MŠMT MSM 113200008.

Snadno ověříme, že $c/b = \beta\sigma^2$ a $a - (c/b)^2 = (1 + \alpha^2)\sigma^2$, z čehož vyplývá, že α je jedním z kořenů rovnice

$$x^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{c^2}{b^3}\right)x + 1 = 0.$$

Při známém α je pak

$$\sigma^2 = \frac{b}{\alpha} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{c}{\alpha\sigma^4}.$$

Výše zmíněná úvaha vede k následující konstrukci momentových odhadů neznámých parametrů. Označme

$$\begin{aligned}\hat{a}_N &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^2, \\ \hat{b}_N &= \frac{1}{N} \sum_{t=2}^N X_t X_{t-1}, \\ \hat{c}_N &= \frac{1}{N} \sum_{t=3}^N X_t X_{t-1} X_{t-2}.\end{aligned}$$

Budiž dále $\hat{\alpha}_N$ kořen rovnice

$$x^2 - \left(\frac{\hat{a}_N}{\hat{b}_N} - \frac{\hat{c}_N^2}{\hat{b}_N^3}\right)x + 1 = 0,$$

který padne do intervalu $(-1;1)$, a

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{\hat{b}_N}{\hat{\alpha}_N} \quad \text{a} \quad \hat{\beta} = \frac{\hat{c}_N}{\hat{\alpha}_N \hat{\sigma}_N^4}.$$

Tuto metodu navrhl Robinson (1977), který rovněž dokázal konsistenci a asymptotickou normalitu takto definovaných odhadů. Následující tabulka udává průměrné hodnoty a směrodatné odchylky zkoumaných odhadů získané ze 100 simulací pro každou délku časové řady a uvedené hodnoty parametrů, za předpokladu, že veličiny ε_t mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1;1)$.

N	$\alpha = 0.3$		$\beta = 0.1$		$\sigma^2 = 1/3$	
	průměr	sm. odch.	průměr	sm. odch.	průměr	sm. odch.
100	0.338	0.210	0.053	1.554	0.269	1.062
500	0.319	0.062	0.110	0.481	0.314	0.030
1 000	0.310	0.043	0.104	0.277	0.326	0.013
5 000	0.303	0.018	0.082	0.107	0.332	0.005
10 000	0.299	0.013	0.097	0.090	0.332	0.004

3. ODHADY METODOU MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

Předpokládejme nyní, že bílý šum ε_t má nějakou známou hustotu g . Z nezávislosti veličin ε_t tak známe sdruženou hustotu vektoru $\mathbf{e}_N = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)^T$, která má tvar

$$g_N(t_0, \dots, t_N) = \prod_{i=0}^N g(t_i).$$

Označme h zobrazení, jež převádí vektor \mathbf{e}_N na vektor $\mathbf{Z}_N = (\varepsilon_0, X_1, \dots, X_N)^T$ a $Jac(h)$ budiž jeho jakobián. Snadno zjistíme, že

$$Jac(h) = \prod_{i=0}^{N-1} (1 + \beta\varepsilon_i)$$

a zobrazení je tedy skoro jistě regulární kdykoliv je $P(\varepsilon_t = -1/\beta) = 0$. Užitím věty o transformaci tak lze najít sdruženou hustotu \mathbf{Z}_N , která obecně bude tvaru $|Jac(h)|^{-1}g_N(h^{-1}(\mathbf{Z}_N))$. Zobrazení h^{-1} je určeno rekurentním vztahem

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - \alpha\varepsilon_{t-1}}{1 + \beta\varepsilon_{t-1}}, \quad 1 \leq t \leq N.$$

Je zřejmé, že pro rostoucí N je explicitní předpis pro h a tudíž i pro sdruženou hustotu \mathbf{Z}_N stále složitější, což do značné míry komplikuje výpočet marginální hustoty f_N vektoru pozorování $\mathbf{X}_N = (X_1, \dots, X_N)^T$, neboť ta je dána integrálem

$$f_N(\mathbf{x}_N) = \int_{-\infty}^{\infty} |Jac(h)|^{-1}g_N(t, \mathbf{x}_N)dt.$$

Vynecháme-li nyní pozorování X_k, X_{2k}, \dots pro $k \geq 2$, zbývající veličiny tvoří vzájemně nezávislé podvektory $\mathbf{X}_j^{(k)} = (X_{1+jk}, \dots, X_{k-1+jk})^T$, $j \geq 1$, s hustotou f_{k-1} . Při některých rozděleních bílého šumu tak můžeme získat explicitní vzorec pro věrohodnostní funkci vektoru zbývajících pozorování, která má tvar

$$l_k(\mathbf{X}_N, \alpha, \beta) = \sum_{j \geq 1} \log \left[f_{k-1}(\mathbf{X}_j^{(k)}) \right].$$

Jak ukáže i následující příklad, je maximalizace věrohodnostní funkce l_k možná pouze numericky přes určitou předem zvolenou síť bodů.

Příklad:

Nejjednodušší příklady pro $k = 2$ uvádí Marek(1999). Zabývejme se nyní proto poněkud složitější situací, jež nastává, jestliže $k = 3$. Nechť $\varepsilon_t \sim R(-1; 1)$. Odvodíme sdruženou hustotu podvektoru $(X_t, X_{t-1})^T$. Užijeme zobrazení

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-2} \end{pmatrix} \xrightarrow{h'} \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Jakobián transformace je roven

$$Jac(h') = \begin{vmatrix} 1 + \beta v & \alpha + \beta u & 0 \\ 0 & 1 + \beta w & \alpha + \beta v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1 + \beta v)(\alpha + \beta v).$$

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že čísla $-\frac{1}{\beta}$ a $-\frac{\alpha}{\beta}$ leží mimo interval $(-1; 1)$. Inverzní zobrazení je dáno předpisem

$$\begin{aligned} u &= \frac{x - \alpha z}{1 + \beta z}, \\ v &= z, \\ w &= \frac{y - z}{\alpha + \beta z}. \end{aligned}$$

Označme χ_A indikátor množiny

$$A = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : \left| \frac{x - \alpha z}{1 + \beta z} \right| < 1 \quad \& \quad |z| < 1 \quad \& \quad \left| \frac{y - z}{\alpha + \beta z} \right| < 1 \right\}.$$

Podle věty o transformaci tedy sdruženou hustotu vektoru $(X, Y, Z)^T$ můžeme zapsat ve tvaru

$$g(x, y, z) = \frac{\chi_A}{8(1 + \beta z)(\alpha + \beta z)}.$$

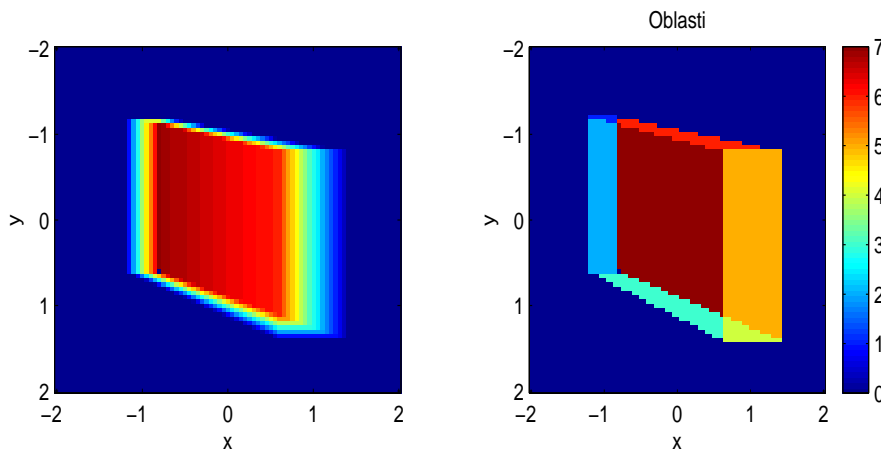
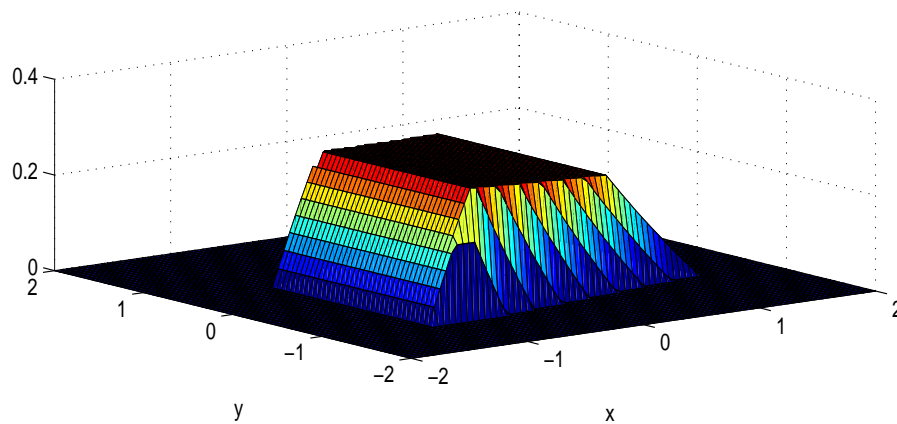
Hledanou hustotu vektoru $(X, Y)^T$ vypočteme vyintegrováním proměnné z

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{1}{8} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{(1 + \beta z)(\alpha + \beta z)} dz \\ &= \frac{1}{8(1 - \alpha)} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{1}{\alpha + \beta z} - \frac{1}{1 + \beta z} \right) dz \\ &= \frac{1}{8\beta(1 - \alpha)} \log \frac{(1 + \beta s_1)(\alpha + \beta s_2)}{(1 + \beta s_2)(\alpha + \beta s_1)}. \end{aligned}$$

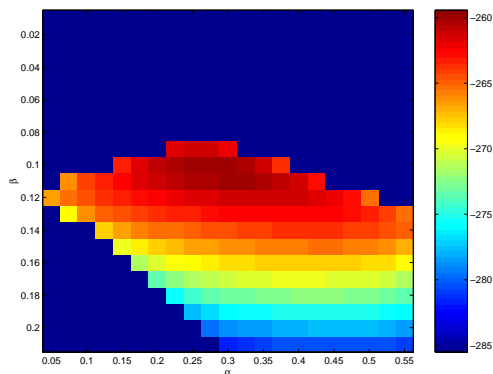
Integrační meze s_1, s_2 určíme jako

$$s_1 = \max \left\{ -1; \frac{x-1}{\alpha + \beta 1}; \frac{y - \alpha 1}{1 + \beta 1} \right\}, \quad s_2 = \min \left\{ 1; \frac{x+1}{\alpha - \beta 1}; \frac{y + \alpha 1}{1 - \beta 1} \right\}.$$

Na následujícím obrázku je graf $f_2(x, y)$ a rozdělení roviny podle hodnot s_1, s_2 pro hodnoty parametrů $\alpha = 0.3$ a $\beta = 0.1$.



Další obrázek ukazuje věrohodnostní funkci l_3 získanou z $N = 500$ pozorování při výše zmíněném rozdělení.



Následující tabulka udává průměrné hodnoty a směrodatné odchylky zkoumaných odhadů získané ze 100 simulací pro každou délku časové řady a stejné hodnoty parametrů jako v části věnované momentovým odhadům. Veličiny ε_t mají i tentokrát rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1;1)$. Při maximalizaci byla použita síť bodů (α, β) s krokem 0.001 v α a 0.0005 v β .

N	$\alpha = 0.3$		$\beta = 0.1$	
	průměr	sm. odch.	průměr	sm. odch.
10	0.285	0.279	0.215	0.256
20	0.300	0.211	0.217	0.205
50	0.270	0.118	0.137	0.121
100	0.263	0.073	0.116	0.077
200	0.276	0.045	0.106	0.046
500	0.294	0.020	0.103	0.024

4. ZÁVĚR

Z obou zmíněných metod odhadu neznámých parametrů zkoumaného modelu je momentová metoda méně náročná na výpočetní čas, její nevýhodou je pomalejší konvergence. Metoda založená na maximální věrohodnosti konverguje rychleji, při některých rozděleních bílého šumu však nejsme schopni najít explicitní vyjádření hustoty vektoru $\mathbf{X}_j^{(k)}$ a numerická integrace značně zvyšuje nároky na výpočetní čas.

5. LITERATURA

- Marek T. (1999):** Maximum likelihood estimation in the simple NLMA model. *WDS'99 Proceedings of contributed papers - Part I., (ed. J. Šafránková), pp. 28–33.* Matfyzpress Praha. Praha 1999.
- Robinson P. M. (1977):** The estimation of a nonlinear moving average models. *Stochastic processes Appl.* **5**, 81–90.
- Tong H. (1990):** Nonlinear Time Series. Clarendon Press, Oxford.