

STATISTICKÉ METODY PRO HODNOCENÍ HOMOGENITY TEXTILNÍCH MATERIÁLŮ

ALEŠ LINKA A PETR VOLF

ABSTRAKT. Článek poskytuje přehled statistických metod pro sledování nestejnomyšnosti textilního materiálu na základě získané obrazové informace. Detailněji je zkoumáno využití náhodných polí, speciálně Isingova modelu, pro sledování nestejnomyšnosti netkané textilie.

Резюме. В статье рассмотрены модели и статистические методы анализа образов с применением к классификации и анализу однородности текстильных материалов. Исползованны модели случайных полей Маркова (например модели Исинга) и характеристики распределений вероятности в этих полях.

ABSTRACT. The contribution presents a selection of methods for the analysis of textures, with the application to the inspection of nonhomogeneity of textile materials. A set of statistical characteristics of textures is reviewed and used for the classification of real textile material images. Further, the models of Markov random fields are recalled, their parameters are estimated and then utilized for the characterization of a texture.

1. ÚVOD

Jedním z kritérií hodnocení kvality textilie je i sledování rovnoměrnosti uspořádání materiálu. Případná nerovnoměrnost se může projevit kolísáním hmotnosti, mechanických a fyzikálních vlastností, či nestejnomyšnou strukturou (prodyšností, porositou). Pro měření takovéto nestejnomyšnosti existuje řada přístupů, od subjektivního vizuálního hodnocení až k počítačovým metodám analýzy obrazu, např. Militký (1998), Cohen (1991), Finsker (1997).

V práci popíšeme některé z metod statistické analýzy nestejnomyšnosti materiálu a zároveň se pokusíme provést klasifikaci podle stupně nestejnomyšnosti. Přitom budeme předpokládat, že analyzovaná data byla získána snímáním digitálních obrazů textilie, a že zkoumaný vzorek materiálu je rozdělen do obdelníkové sítě buněk (pixelů), přičemž každá buňka vykazuje konstantní „barvu“ (úroveň šedi). Škála pro „barvu“ závisí na našem výběru, v nejjednodušším případě pracujeme s binárním obrazem, tj. s dvěmi hodnotami 0 (bílá) a 1 (černá).

Budeme se podrobněji věnovat použití modelu Markovských náhodných polí pro sledování nehomogenity netkané textilie. Modelování textur pomocí náhodných polí a jejich klasifikace na základě odhadu parametrů modelu náhodného pole byla zkoumána v posledním 20 letech např. Cross (1983), Winkler (1998), Johansson (2000) atd.. V řadě případů byla rovněž aplikována na textilní struktury Cohen (1991), Carstensen (1992), Finsker (1997). Především nedostatečná rychlost a efektivnost

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 68T10; Secondary 62P30.

Klíčová slova. Nestejnomyšnost, řízení kvality, Shewhartův diagram, náhodné pole, Isingův model, textilní materiál.

Práce na této problematice je podporována z projektů MŠMT č. VŠ 97084 a VZ J11/98:244100003.

výpočtu odhadu parametru náhodného pole, zatím brání jejich rozsáhlejšímu nasazení pro „on-line“ sledování textilií. Z tohoto důvodu pracujeme s jednoduchým Isingovým modelem pro binární obraz textilie. Nutno ovšem konstatovat, že i tento zvolený postup má řadu úskalí včetně předzpracování snímaného obrazu.

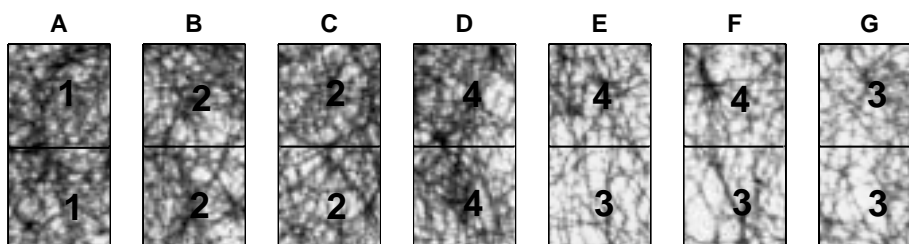
Abychom mohli efektivně porovnat výsledky získané z Isingova modelu, byla nejprve provedena texturní analýza a na základě zjištěných texturních charakteristik byla provedena klasifikace nehomogenity rozložení materiálu v netkané textili pomocí klasifikačního stromu. Tento přístup, který obvykle využívá texturní charakteristiky vypočtené na základě matice vzájemného výskytu úrovní šedi („grey level cooccurrence matrix“), byl studován v řadě prací, za všechny uvedme Weickert (1998) a Bodnarova (2000), jež se přímo vztahují textilním texturám.

2. KLASIFIKACE S VYUŽITÍ TEXTURNÍCH STATISTIK

Textura je důležitou částí interpretace obrazu. Jeden z přístupů k texturní analýze využívá číselné charakteristiky vypočtené z matice vzájemného výskytu úrovní šedi pro charakterizaci příslušné textury. Poprvé byly tyto číselné charakteristiky použity pro analýzu textur v práci Harlick (1973). Zde rovněž nalezneme první pokusy o využití těchto charakteristik ke klasifikaci, v tomto případě mikrofotografií pískovce. Problematikou klasifikace textur na základě zjištěných charakteristik se zabývala celá řada dalších autorů, za všechny uvedme Wezksa (1976), Connors (1980), de Buf (1990) a Berry (1990). Carstensen (1992) testoval informativnost charakteristik pomocí metody klasifikačních stromů na 15 vybraných Brodatzových texturách, přičemž ve výběru byly jak textury deterministické, tak stochastické, v obou případech velmi podobné texturám textilním. V práci Bodnarova (2000) jsou tyto texturní charakteristiky použity pro detekci kazů tkaných textilií, výsledky jsou pak porovnány s výsledky získanými na základě spektrální analýzy.

Texturní statistiky jsou velmi často klasifikovány do skupin - statistiky 1. řádu, statistiky 2. řádu a statistiky vyšších řádů. Statistiky 1. řádu se vztahují k marginálnímu rozdělení úrovně šedi. Statistiky 2. řádu charakterizují sdružené rozdělení úrovní šedi dvou pixlů, statistiky vyšších řádů se potom týkají sdruženého rozdělení úrovní šedi tří a více pixlů.

V další části nejprve podáme přehled texturních statistik používaných v analýze textur. Dále se pokusíme s pomocí texturních statistik rozklasifikovat obraz netkaného materiálu do přibližně homogenních skupin. K vlastní klasifikaci bude použita



OBRÁZEK 1. Ukázka 7 pruhů netkané textilie, u kterých byla posuzována homogenita rozložení materiálu.

metoda klasifikačních stromů, speciálně využijeme porceduru pro klasifikační stromy v programu Splus2000.

2.1. Texturní statistiky 1. řádu. Texturní statistiky 1.řádu mohou být vypočteny ze zjištěných četností $\{n_i\}_{i=0}^{G-1}$ úrovní šedi v obraze, N označuje celkový počet pixelů v obraze. Označíme-li G počet úrovní šedi, potom $\sum_{i=0}^{G-1} n_i = N$. Označme dále $\hat{p}_i = \frac{n_i}{N}$ relativní četnost úrovně šedi i , potom $\{\hat{p}_i\}_{i=0}^{G-1}$ je zároveň odhadem pravděpodobnostního rozdělení úrovně šedi. Pro odhady texturních charakteristik 1. řádu platí:

A1. *Odhad střední úrovně šedi*

$$\hat{\mu} = \sum_{i=0}^{G-1} i \hat{p}_i.$$

A2. *Odhad rozptylu úrovně šedi*

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=0}^{G-1} (i - \hat{\mu})^2 \hat{p}_i.$$

A3. *Odhad variačního koeficientu*

$$\hat{c}_v = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}}$$

A4. *Výběrová šikmost úrovně šedi*

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{i=0}^{G-1} (i - \hat{\mu})^3 \hat{p}_i.$$

A5. *Výběrová špičatost úrovně šedi*

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{\hat{\sigma}^4} \sum_{i=0}^{G-1} (i - \hat{\mu})^4 \hat{p}_i - 3$$

A6. *Energie úrovně šedi*

$$\hat{e} = \sum_{i=0}^{G-1} \hat{p}_i^2$$

A7. *Entropie úrovně šedi*

$$\hat{s} = - \sum_{i=0}^{G-1} \hat{p}_i \log \hat{p}_i$$

Texturní statistiky 1. řádu velmi závisí na světelných podmínkách. Je běžnou praxí, že se snažíme tento vliv eliminovat. Obvykle to provádíme tak, že se úrovně šedi transformují do nového obrazu. V novém obrazu jsou většinou jednotlivé jasové úrovně zastoupeny rovnoměrně, tomuto postupu říkáme ekvalizace obrazu a vede na zvýšení kontrastu obrazu.

2.2. Texturní statistiky 2. řádu. Statistiky 2. řádu jsou obvykle založeny na matici vzájemného výskytu úrovní šedi, která zhruba řečeno popisuje prostorové závislosti mezi jednotlivými úrovněmi šedi. Matice vzájemného výskytu úrovní šedi $\{c_{ij}(\mathbf{h}), i = 0, \dots, G-1, j = 0, \dots, G-1\}$ je definována vzhledem k danému posunutí $\mathbf{h} = (k, l)$ a prvku (i, j) , přičemž hodnota c_{ij} označuje kolikrát se objevuje úroveň šedi j v pozici \mathbf{h} relativně k bodu, jež má úroveň šedi i . Označíme-li $n_{\mathbf{h}}$ celkový počet dvojic s posunutím \mathbf{h} , pak

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{c_{ij}(\mathbf{h})}{n_{\mathbf{h}}}$$

odhaduje sdružené rozdělení úrovní šedi v závislosti na daném posunutí \mathbf{h} (dále C_{ij} bude označovat $C_{ij}(\mathbf{h})$). V praxi se velmi často volí pro \mathbf{h} hodnoty $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$. Z matice vzájemného výskytu úrovní šedi můžeme vypočítat texturní charakteristiky sdruženého rozdělení úrovní šedi, které lze použít pro popis a klasifikaci textur. Mezi texturní statistiky 2. řádu z matice vzájemného výskytu úrovní šedi zařazujeme následující statistiky:

B1. *Energie (Druhý angulární moment)*

$$\hat{e}c = \sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} C_{ij}^2$$

B2. *Entropie*

$$\hat{s}c = - \sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} C_{ij} \log C_{ij}.$$

B3. *Maximální pravděpodobnost*

$$\hat{m} = \max_{i,j} C_{ij}.$$

B4. *Korelace (Autokorelace)*

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} \frac{(i - \hat{\mu}_x)(j - \hat{\mu}_y)C_{ij}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y}$$

kde $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ jsou odhady střední hodnoty a rozptylu založených na odhadech marginálních rozdělení C_i^x a C_j^y .

B5. *Diagonální moment*

$$\hat{d} = \sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} |i - j|(i + j - \hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y)C_{ij}.$$

Z matice vzájemného výskytu úrovní šedi můžeme obdržet odhad rozdělení absolutních hodnot rozdílů úrovní šedi dvojic pixlů

$$D_k = \underbrace{\sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} C_{ij}}_{|i-j|=k}, \quad k = 0, \dots, G-1.$$

Na toto rozdělení můžeme dívat jako na odhad rozdělení vzdálenosti od hlavní diagonály v matici vzájemného výskytu úrovní šedi.

Texturní statistiky 2. řádu vypočtené z odhadu rozdělení absolutních rozdílů úrovní šedi dvojic pixlů:

B6. *Energie rozdělení absolutních rozdílů úrovní šedi*

$$\widehat{ed} = \sum_{k=0}^{G-1} D_k^2.$$

B7. *Entropie absolutních rozdílů úrovní šedi*

$$\widehat{sd} = - \sum_{k=0}^{G-1} D_k \log D_k.$$

B8. *Variogram (Inerce, Kontrast)*

$$\widehat{vd} = \sum_{k=0}^{G-1} k^2 D_k = 2\widehat{\sigma}(1 - \widehat{\rho}).$$

B9. *Lokální homogenita*

$$\widehat{ld} = \sum_{k=0}^{G-1} \frac{D_k}{1 + k^2}.$$

Z matice vzájemného výskytu úrovní šedi můžeme rovněž obdržet odhad rozdělení součtu hodnot úrovní šedi dvojic pixlů

$$S_k = \underbrace{\sum_{i=0}^{G-1} \sum_{j=0}^{G-1} C_{ij}}_{i+j=k}, \quad k = 0, \dots, 2G - 2.$$

Pro výběrový průměr tohoto rozdělení platí

$$\widehat{sa} = \sum_{k=0}^{2G-2} k S_k = \widehat{\mu}_x + \widehat{\mu}_y.$$

Texturní statistiky 2. řádu založené na rozdělení součtu úrovní šedi dvojic pixlů:

B10. *Energie rozdělení součtu úrovní šedi*

$$\widehat{es} = \sum_{k=0}^{2G-2} S_k^2.$$

B11. *Entropie rozdělení součtu úrovní šedi*

$$\widehat{ss} = - \sum_{k=0}^{2G-2} S_k \log S_k.$$

B12. *Odhad rozptylu rozdělení součtu úrovní šedi*

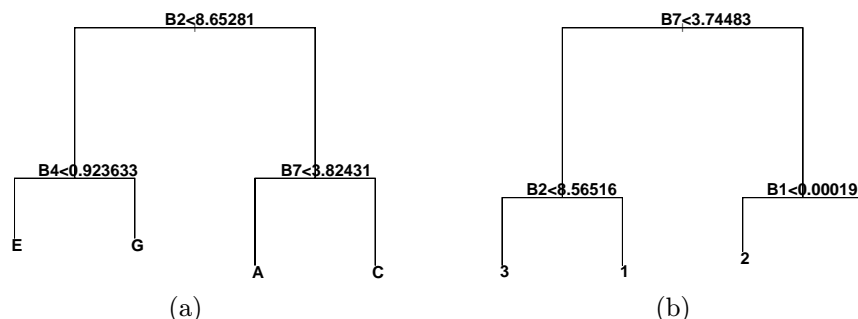
$$\widehat{vs} = \sum_{k=0}^{2G-2} (k - \widehat{sa})^2 S_k$$

B13. *Odhad třetího momentu rozdělení součtu úrovní šedi („Cluster Shade“)*

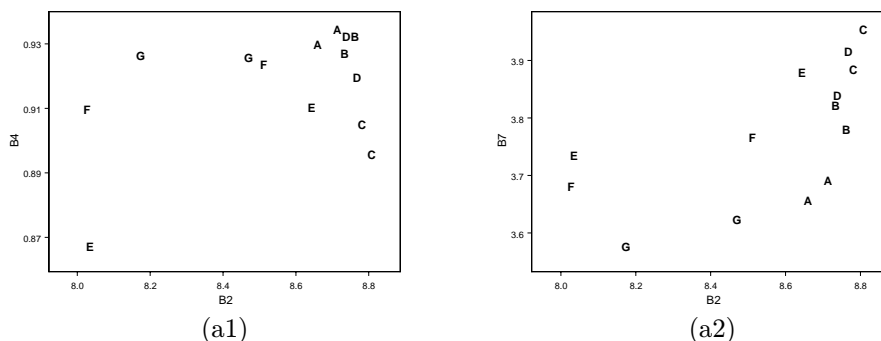
$$\widehat{hs} = \sum_{k=0}^{2G-2} (k - \widehat{sa})^3 S_k$$

B14. Odhad čtvrtého momentu rozdělení součtu úrovní šedi („Cluster Prominency“)

$$\hat{p}s = \sum_{k=0}^{2G-2} (k - \hat{s}a)^4 S_k$$

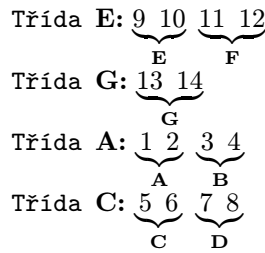


OBRÁZEK 2. Klasifikační stromy pro klasifikaci homogenity rozložení materiálu v netkané textilii v případech: (a) Přímá neřízená klasifikace kusů textilie A-G (viz obrázek 1) pomocí klasifikačního stromu, (b) Nezávislým posuzovatelem byla provedeno rozdělení částí textilie do 4 skupin (viz obrázek 1) a následně byl použita metoda klasifikačního stromu.



OBRÁZEK 3. Graf rozdělení hodnot statistiky B2 proti hodnotám statistiky B4 (a1), resp. hodnot statistiky B2 proti hodnotám statistiky B7 (a2) v případě klasifikace (a).

2.3. **Příklad.** Obrázek netkané textilie byl rozdělen do 7 pruhů velikosti 200×100 pixlů (viz obrázek 1). Jednotlivé pruhů jsou označeny písmeny **A-G**. Každý z pruhů byl rozdělen do dvou oken velikosti 100×100 pixlů. Za předpokladu homogenity každého z jednotlivého pruhů můžeme každému ze dvou oken přiřadit stejný faktor. Pro každé okno byly vypočteny číselné charakteristiky B1 – B14 založené na příslušné matici vzájemného výskytu úrovní šedi pro horizontální posunutí $\mathbf{h} = (0, 1)$ v okně (100×100 pixlů). Pomocí metody klasifikačních stromů byla na základě zjištěných texturních charakteristik B1 – B14 provedena neřízená klasifikace textur. Příslušný



TABULKA 1. Přiřazení jednotlivých oken (obrázek 1) k uzlům v případě klasifikačního stromu (obrázek 2a).

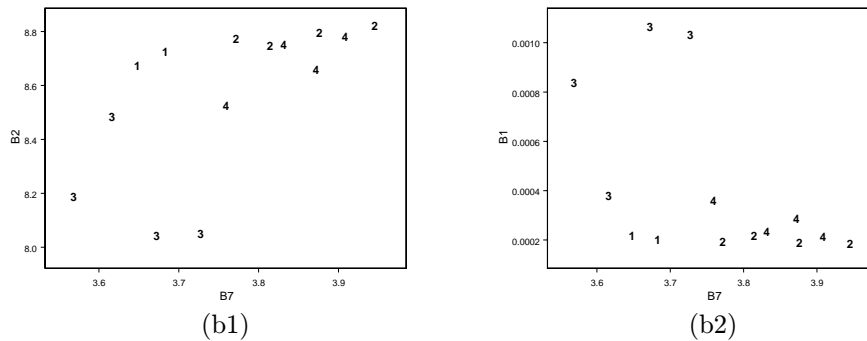
klasifikační strom je na obrázku 2a. Pro klasifikační strom 2a má výpis s programu Splus2000 následující podobu:

```

Classification tree:
tree(formula=cvy20,na.action=na.exclude,mincut=2,minsize=5, mindev=0.001)
Variables actually used in tree construction: [1] "B2" "B4" "B7"
Number of terminal nodes: 4
Residual mean deviance: 1.664 = 16.64 / 10
Misclassification error rate: 0.4286 = 6 / 14

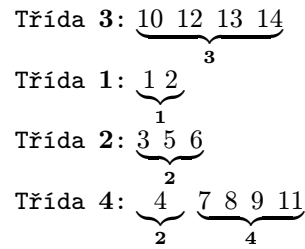
```

Vidíme, že jako typické třídy byly vybrány **A**, **C**, **E**, **G**, ostatní 3 k nim byly přiřazeny. Při bližším prozkoumání konečných uzlů (viz tabulka 1) zjistíme, že do stejných skupin byly přibližně zařazeny pruhy, které jsou stejně homogenní co do rozložení materiálu. Nejdůležitější charakteristikou pro klasifikaci byla B2 (entropie).



OBRÁZEK 4. Graf rozdělení hodnot statistiky B7 proti hodnotám statistiky B2 (b1), resp. hodnot statistiky B7 proti hodnotám statistiky B1 (b2) v případě klasifikace (b).

Obrázek 3a1 ilustruje rozdělení statistiky B2 proti B4 a obrázek 3a2 rozdělení statistiky B2 proti B7. V případě klasifikačního stromu na obrázku 2b byly okna nejprve z pohledu homogenity rozložení materiálu posouzeny nezávislým posuzovatelem a rozděleny do 4 skupin (viz obrázek 1). Toto rozdělení bylo následně spolu s hodnotami texturních statistik B1 – B14 použito pro konstrukci klasifikačního stromu. Příslušný klasifikační strom je na obrázku 2b a má výpis s programem Splus2000 má následující podobu:



TABULKA 2. Přiřazení jednotlivých oken (obrázek 1) k uzlům v případě klasifikačního stromu (obrázek 2b)

```

Classification tree:
snip.tree(tree=tr2,nodes=7)
Variables actually used in tree construction: [1] "B7" "B2" "B1"
Number of terminal nodes: 4
Residual mean deviance: 0.5004 = 5.004 / 10
Misclassification error rate: 0.07143 = 1 / 14

```

Pouze jedno okno (7.143%) nebylo klasifikováno správně (viz tabulka 2). Nejdůležitější charakteristikou pro klasifikaci byla B7 (entropie rozdělení absolutních rozdílů). Obrázek 4b1 ilustruje rozdělení statistiky B7 proti B2 a obrázek 4b2 rozdělení statistiky B7 proti B1.

Závěrem tohoto odstavce poznamenejme, že oba stromy klasifikují podle statistik B1, B2, B4 a B7, z pohledu nehomogenity rozložení materiálu dostáváme srovnatelné výsledky.

3. VYUŽITÍ MODELU NÁHODNÉHO POLE

Tento přístup využívá toho, že je možné popsat digitální obraz textilie (a speciálně textilie netkané) jako realizaci náhodného pole určitého typu. Obraz je tvořen konfigurací stavů $\mathbf{x} = \{x_i, i \in I\}$ v dvourozměrné síti indexů $I = \{1, 2, \dots, N\}$, kde index $i \in I$ označuje určitý element (pixel) obrázku. Zpravidla x_i nabývají jen několika hodnot (odpovídají např. různým barvám) a předpokládá se, že jsou vzájemně svázána, alespoň s hodnotami v sousedních polích tak, že náhodné pole vykazuje Markovskou vlastnost.

Představme si nejjednodušší případ, kdy obrázek je binární, hodnoty x_i jsou buď 0 či 1. Formulujeme rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny \mathbf{x} , $Q(\mathbf{x})$, tj. pravděpodobnost pro konfiguraci hodnot x_i dávající výsledný obraz. Jedním z používaných modelů je Isingův model, Janžura (1990), Winkler (1995), Tjelmeland (1998):

$$\ln Q(\mathbf{x}) = C + \alpha \sum_i x_i + \beta \sum_i \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_i x_j,$$

kde C je neznámá normující konstanta také závisící na α, β a \mathcal{O}_i představuje okolí bodu i . Druhý člen tedy vyjadřuje vzájemnou vazbu sousedních polí, např. $\beta > 0$ znamená, že spolu sousedí spíše stejné barvy. Dále např. $\alpha = \frac{-|\mathcal{O}|}{2} \beta$ znamená, že obě barvy jsou stejně pravděpodobné, kde $|\mathcal{O}|$ je počet bodů v okolí. My budeme pracovat s okolím složeným ze všech sousedních, tj. 8 bodů.

Snadno odvodíme podmíněná rozdělení pro hodnotu v jednom bodě, při daných hodnotách v ostatních bodech:

$$(1) \quad \ln Q_i(x_i | \mathbf{x}_{(-i)}) = \alpha x_i + \beta x_i \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_j + C_i,$$

což vede na pravděpodobnost (logistický či logitový pravděpodobnostní model)

$$Q_i(x_i = 0 | \mathbf{x}_{(-i)}) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha + \beta \sum_{\mathcal{O}_i} x_j)},$$

a přirozeně $Q_i(x_i = 1 | \mathbf{x}_{(-i)}) = 1 - Q_i(x_i = 0 | \mathbf{x}_{(-i)})$.

Je také poměrně snadné pro daný Isingův model vygenerovat jeho reprezentaci, tj. charakteristickou konfiguraci, obraz, pomocí Gibbsova nebo Metropolis–Hastingsova algoritmu, tzn. postupů známých jako Markov chain Monte Carlo (generované Markovovy řetězce, MCMC, Geman (1984) Bernardo (1994), Tjelmeland (1998)).

Na druhou stranu, není zcela jednoduché pro daná data – konfiguraci nul a jedniček – odhadnout parametry modelu (především díky neznalosti normující konstanty C , která na parametrech závisí a jejíž zjištění komplikuje rozsáhlost úlohy).

Úlohu maximálně věrohodného odhadu (MLE) je možné řešit opět pomocí intenzivních simulací metodou MCMC. Je nutno však nejdříve obejít fakt, že neznáme normující konstantu. K jejímu alespoň "relativnímu" odhadu se používá Gibbsův algoritmus, Tjelmeland (1998b). Potom pomocí další MCMC procedury, např. algoritmu Metropolis–Hastings, se generuje reprezentace aposteriorního rozdělení neznámých parametrů α a β , s využitím naměřených dat. Tímto postupem zároveň získáme i empirické kvantily aposteriorního rozdělení, což nám opět umožní testovat shodu dat s očekávaným standardem (Isingovým modelem pro "ideální" textilii) a také odhalit změny modelu – tj. změny charakteru struktury materiálu. Tento postup je však příliš výpočetně (tj. i časově) náročný pro operativní on-line analýzu.

Proto se používají metody zvané maximálně pseudo-věrohodný odhad, MPLE, Besag (1986), Tjelmeland (1998b), které pracují s aproximací věrohodnostní funkce. Nejjednodušším přístupem v dané situaci je použít jako pseudověrohodnostní funkci prostě součin podmíněných jednorozměrných pravděpodobností (1):

$$Q^*(\mathbf{x}, \alpha, \beta) = \prod_{i \in I} Q_i(x_i | \mathbf{x}_{(-i)}, \alpha, \beta).$$

Logaritmus této funkce se maximalizuje přes α a β . Dostáváme:

$$\ln Q^* = \sum_{i \in I} x_i (\alpha + \beta \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_j) - \sum_{i \in I} \ln(1 + \exp(\alpha + \beta \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_j)).$$

Označme $S1 = \sum_{i \in I} x_i$, $J_i = \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_j$, $S11 = \sum_{i \in I} x_i J_i$. Potom

$$\frac{\partial \ln Q^*}{\partial \alpha} = S1 - \sum_{i \in I} \frac{\exp(\alpha + \beta J_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta J_i)}, \quad \frac{\partial \ln Q^*}{\partial \beta} = S11 - \sum_{i \in I} \frac{J_i \exp(\alpha + \beta J_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta J_i)}.$$

K vyřešení rovnic $\partial Q^* / \partial \alpha = 0$, $\partial Q^* / \partial \beta = 0$ můžeme použít např. algoritmu Newtona-Raphsona, který iteruje posloupnost řešení následujícím způsobem:

$$\theta^{(s+1)} = \theta^{(s)} - D2^{-1} D1,$$

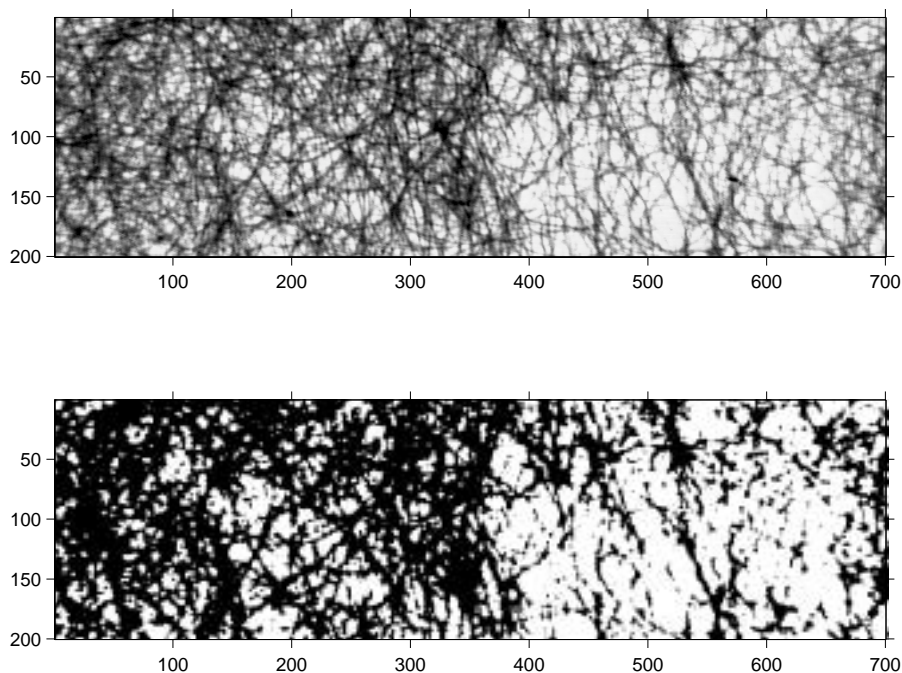
kde pro nás je $\theta = (\alpha, \beta)'$, $\theta^{(s)}$ je s -tá iterace řešení, $D1 = (\partial Q^* / \partial \alpha, \partial Q^* / \partial \beta)'$ je vektor 1. derivací $\ln Q^*$ a $D2$ je matice 2. derivací:

$$\begin{aligned} D2_{1,1} &= \frac{\partial^2 \ln Q^*}{\partial \alpha^2} = - \sum_{i \in I} \frac{\exp(\alpha + \beta J_i)}{(1 + \exp(\alpha + \beta J_i))^2}, \\ D2_{1,2} &= D2_{2,1} = \frac{\partial^2 \ln Q^*}{\partial \alpha \partial \beta} = - \sum_{i \in I} \frac{J_i \exp(\alpha + \beta J_i)}{(1 + \exp(\alpha + \beta J_i))^2}, \\ D2_{2,2} &= \frac{\partial^2 \ln Q^*}{\partial \beta^2} = - \sum_{i \in I} \frac{J_i^2 \exp(\alpha + \beta J_i)}{(1 + \exp(\alpha + \beta J_i))^2}. \end{aligned}$$

Lehce se ukáže, že $D2$ je negativně definitní matice, čili že funkce $\ln Q^*$ je konkávní. Navíc, protože $D1$ protíná zjevně bod $(0,0)'$, nutně jej protíná v jediném bodě (tj. odhad existuje s pravděpodobností 1), ke kterému tedy směřuje naše řešení maximalizace funkce $\ln Q^*$ (a to z jakéhokoli počátečního bodu $\theta^{(0)}$).

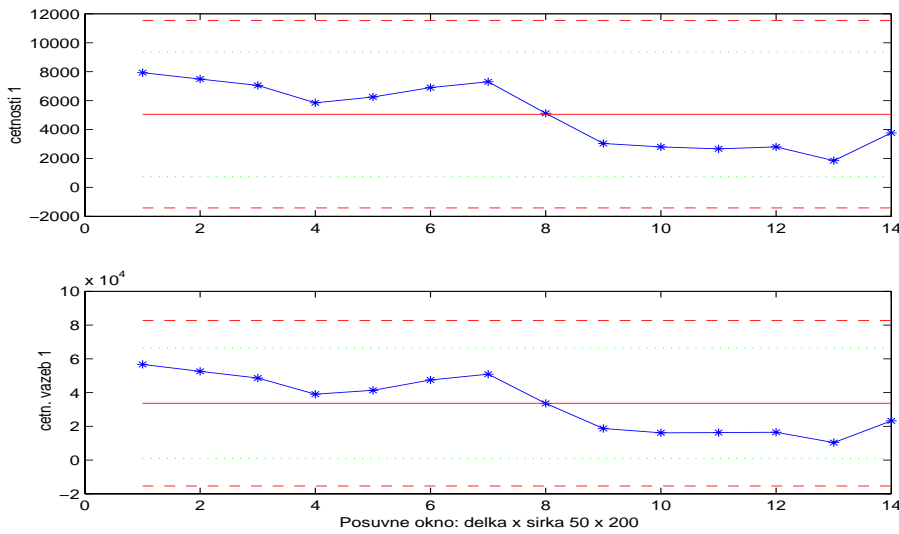
Teorie MLE říká, že odhad metodou MLE je za určitých podmínek regularity konzistentní a asymptoticky normální. Tato limitní normalita se pak využívá jako aproximace pro práci s konečnými soubory dat. O MPLE je dokázána jejich konzistence, alespoň pro takové případy, jaké uvažujeme zde, Tjelmeland (1998b). Málo je však známo o rychlosti konvergence. Jsou také známy výsledky o asymptotické normalitě odhadů parametrů metodou MPLE, Janžura (1992), Tjelmeland (1998b). Přesto je vhodné se o vhodnosti aproximace rozdělení MPLE normálním rozdělením přesvědčit simulačními studiemi, zejména z proto, že praktické metody používají vlastně několikerou aproximaci. Přes tyto nejasnosti, metoda zde navržená pro exploratorní analýzu nestejnoměrnosti materiálu předpokladu o přibližně normálním rozdělení odhadů parametrů využívá. Metoda je použitelná jak k testování homogenity, tj. stability parametrů v různých částech analyzovaného pole (tento postup ukážeme v následujícím příkladě), tak na testování shody parametrů s očekávaným standardem.

Pro případ polí s více hodnotami či s jinak pojatými vazbami jednotlivých hodnot jsou k dispozici další typy modelů, od dvou rozměrných Poissonovských procesů až po tzv. Gibbssovská náhodná pole, Winkler (1995), Tjelmeland (1998).

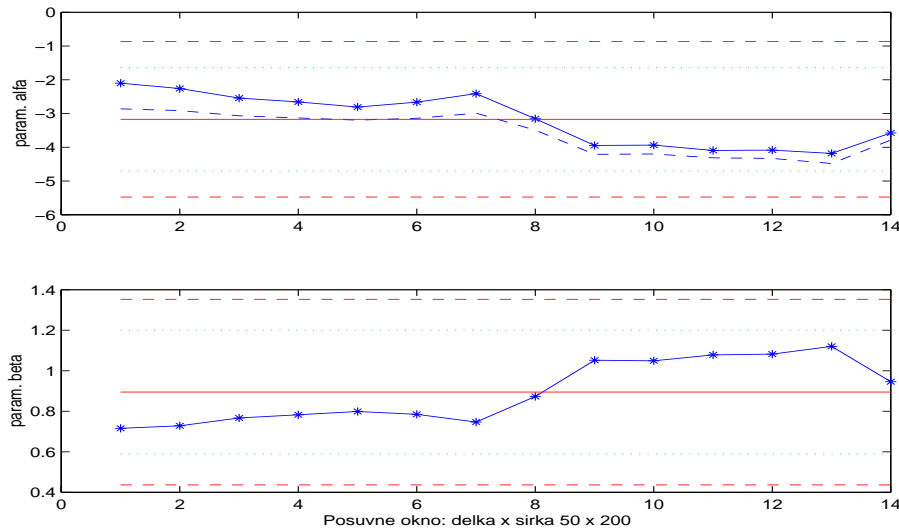


OBRÁZEK 5. Pruh netkané textilie v šedé škále a příslušný segmentovaný binární obraz vytvořený pomocí funkce `im2bw(I,0.6)` z matlabského packetu `Image Processing Toolbox`

3. Příklad. Budeme analyzovat nestejnoměrnost pruhu netkaného textilního materiálu, jehož binární obraz je na obrázku 7. Budeme postupně hodnotit nepřekrývající



OBRÁZEK 6. Počty černých bodů a vazeb sousedních černých bodů v jednotlivých oknech



OBRÁZEK 7. MPL odhady parametrů Isingova modelu v jednotlivých oknech

se úseky délky 50 (a celé šířky 200), tj. dostaneme postupně 14 polí. V každém vyhodnotíme

- (1) počty $S1 = \sum x_i$ a $S11 = \sum J_i$, viz obrázek 8,
- (2) MPLE odhady parametrů α, β Isingova modelu, viz obrázek 9. Navíc v horním grafu jsou rovněž čárkovaně zobrazeny hodnoty $-4\hat{\beta}$. Kladné hodnoty $\hat{\alpha} - 4\hat{\beta}$ znamenají, že hodnoty “1” jsou preferovány před hodnotami “0”. Kladné hodnoty β způsobují, že model podporuje shlukování buněk stejné hodnoty.

Z takto získaných 14 hodnot každé veličiny jsme také spočetli průměry a směrodatné odchylky. Do grafů jsme pak vynesli i tyto průměry a pásy kolem průměrů tvořené 2, resp. 3 - násobky směrodatné odchylky.

Pro iteraci α, β stačilo vždy jen několik (< 10) kroků Newton-Raphsonova algoritmu, začínali jsme v $\alpha^{(0)} = 0, \beta^{(0)} = 0$. Porovnáním grafu odhadu α a β zjistíme, že je stále $\alpha > -4\beta$, i v oknech, kde převažují bílá místa. Zdůvodněním může být, že skutečná data neodpovídají Isingovu modelu s jednoduchými interakcemi.

LITERATURA

- [1] J. BESAG. On statistical analysis of dirty pictures (with discussion). *J. Royal Statist. Soc. Ser. B* **48**, 1986, 259-302.
- [2] J. BESAG. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion). *J. Royal. Statist. Soc. Ser. B* **36**, 1974, 192-326.
- [3] J. M. BERNARDO AND A. F. M. SMITH. *Bayesian Theory*. John Wiley, New York, 1994.
- [4] J. R. BERRY AND J. GOUTSIAS A comparative study of matrix measures for maximum likelihood texture classification. *IEEE Transactions on Systems, an and Cybernetics* **21**, N. 1, 1991, 252-261.
- [5] J. M. H. DU BUF, M. KARDAN AND M. SPANN Texture Feature performance for image segmentation. *Pattern Recognition* **23**, N. 3-4, 1990, 291-309.
- [6] A. BODNAROVA, M. BENNAMOUN, AND K. K. KUBIK. Suitability Analysis of Techniques for Flaw detection in Textiles Using Texture Analysis. *Pattern Analysis & Applications* **3**, 2000, 254-266.
- [7] J. M. CARSTENSEN. *Description and simulation of visual texture*. Ph.D. Thesis, No. 59, IMSOR, Technical University of Denmark, 1992.
- [8] F. COHEN, Z. FAN AND S. ATTALI. Automated Inspection of Textile Fabrics Using Textural Models. *IEEE Tran. on Pattern Analysis nad Machine Inteligence* **13**, N. 8, 1991, 803-808.
- [9] R. W. CONNERS AND C. A. HARLOW. A theoretical comparison of texture algorithms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Mchine Inteligence* **2**, N. 3, 1980, 204-222.
- [10] G. R. CROSS, AND A. K. JAIN. Markov random field texture models. *IEEE Tran. on Pattern Analysis nad Machine Inteligence* **5**, N. 1, 1983, 25-39.
- [11] R. FINISKER AND J. M. CARSTENSEN. Automated visual inspection in textile. *Proceedings of 10th Scandinavian Conference on Image Analysis*, 1997, 173-179.
- [12] S. GEMAN AND D. GEMAN. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Inteligence* **6**, 1984, 724-741.
- [13] R.M. HARLICK, K. SHANMUGAM AND I. DINSTEIN. Textural features fr image classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **3**, N. 6, 1973, 610-621.
- [14] M. JANŽURA. O jednom pravděpodobnostním algoritmu pro optimalizační úlohy. *Robust 90, JČMF*, 1990, 84-88.
- [15] J. O. JOHANSSON. Modelling the surface structure of newsprint. *Journal of Applied Statistics* **27**, N. 4, 2000, 425-438.
- [16] J. MILITKÝ, J. RUBNEROVÁ, V. KLIČKA. Vzhledová nestejnóměrnost netkaných textilií. *Strutex*, TU Liberec, 1998.
- [17] H. TJELMELAND AND J. BESAG. Markov random fields with higher-order interactions. *Scandinavian Journal of Statistics* **25**, 1998, 415-433.
- [18] H. TJELMELAND. Empirical comparison of MPLE and MLE for binary Markov random fields. Res. Report, Dept. of Math. Sciences, Univ. of Trondheim, Norway, 1998.
- [19] J. S. WEZSKA, C. R. DYER AND A. ROSENFELD. A comparative study of texture measures for terrain classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **6**, N. 4, 1976, 269-285.
- [20] G. WINKLER. *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag Berlin Heldelberg, 1995.
- [21] J. WEICKERT. A Real-Time Algorithm for Assessing Inhomogeneities in Fabrics. *Real-Time Imaging* **5**, N. 1, 1999, 15-22.