ROBUST'2000, 73 – 81

IMPLICITNÍ DEFINICE PODMÍNĚNÉ PRAVDĚPODOBNOSTI EXISTENCE A NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

DANIEL HLUBINKA

Abstrakt. In the paper we consider implicit definitions of probability measures. The definitions depend on an initial condition and hence can be understood as definitions of conditional probability measures given the initial value. The natural question is whether it is possible to construct two dimensional distribution such that its first marginal is some distribution on initial conditions and conditional distributions are solutions of given implicit problem for the respective initial value. The sufficient conditions for the existence of solution are given. As a special case we study problem with convex set of admissible solutions and extremal solutions.

Резюме: В статье изучается неявное определение вероятностных мер. эти определения зависит от начальново условия и для того возможно рассматривать их как определения условных вероятностных мер при данном начальном значении. Натуральной является проблемма существования двухрозмерного распределения вероятностей такого, что его первая маргинала является расспределеним начальных значений и условные расспределения являются решением данных неявныч определений для соотвецтвующих начальных значений. Достаточное условие для существования решения показано. Мы изучаем специальную проблемму выпуклых множеств допускаемых решений и их крайные точки.

Úvod

Tato práce vychází ze zkoumání existence a konstrukce sdruženého rozdělení náhodného vektoru, mají-li jeho podmíněná rozdělení splňovat předem dané podmínky. Hledáme-li odpověď na tuto otázku s požadavkem, aby podmíněná rozdělení hledaného vektoru měla dané barycentrum, dostáváme se k implicitně zadané úloze. Implicitně zadané úlohy pak lze zobecnit a získat tak velmi širokou třídu problémů. V článku se budeme zabývat případy existence a konstrukce implicitně definované podmíněné struktury náhodného vektoru, zejména ve speciálním případě afinní prováděcí funkce. Dále věnujeme pozornost vlastnostem množiny řešení a existenci extremálního řešení předloženého problému.

Připomeňme, že implicitně zadaná množina měr

$$\mathcal{P} = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : b(\mu) = f\} \tag{1}$$

pro nějaký polský prostor $\mathbb{Y}$, borelovské zobrazení b mezi polskými prostory $\mathcal{M}_1(\mathbb{Y})$ a $\mathbb{Z}$ a $f \in \mathbb{Z}$ tvoří borelovskou podmnožinu pravděpodobnostních měr.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28A35; Secondary 28B20, 46A55, 60A10, 60B05.

Klíčová slova. Markovská jádra, podmíněná struktura náhodného vektoru, momentový problém, konvexní množiny, extremální body, nosič míry.

Tato práce vznikla s podporou výzkumného záměru MŠMT ČR MSM 113200008 a postdoktorandského grantu GAČR 201/99/D059 (pod projektem KONTAKT ME335) .

Rozšíříme implicitní definici množiny měr přidáním závislosti na počáteční podmínce do tvaru

$$\mathcal{P}_x := \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : b(x,\mu) = f(x)\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{P} := \{(x,\mu) : \exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}), b(x,\mu) = f(x)\}, \tag{3}$$

kde $x \in \mathbb{X}$, nějaký polský prostor, b a f zobrazení do polského prostoru $\mathbb{Z}$. Je zřejmé, že pro b borelovské zobrazení v μ je pro libovolnou deterministickou počáteční podmínku x množina řešení $\mathcal{P}_x$ borelovská. Tyto množiny lze nahlížet jako množiny přípustných podmíněných rozdělení za podmínky x. Poznamenejme, že měřitelnost množiny $\mathcal{P}$ není vůbec zřejmá, ale jak uvidíme je velmi podstatná.

V teorii pravděpodobnosti je obvyklé v takových případech hledat možnost přechodu od deterministické počáteční podmínky ke stochastické. Tedy k míře $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$. Potom zkoumáme existenci pravděpodobnostní míry $P^\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ takové, že její marginální rozdělení na $\mathbb{X}$ je λ a podmíněná rozdělení na $\mathbb{Y}$ při daném x jsou v množině přípustných řešení $\mathcal{P}_x$ skoro jistě $[\lambda]$.

Tím navazujeme na studie [10] a [11], ve kterých byla množina $\mathcal{P}$ zadána explicitně pomocí řezů $\mathcal{P}_x$. Tak byla zkoumána existence náhodného $\mathcal{P}$ *vektoru* a jeho vlastností. Nyní máme množiny $\mathcal{P}_x$ zadány implicitně pomocí *prováděcího zobrazení* b, které pro pevné x převádí pravděpodobnostní míry na hodnoty v prostoru $\mathbb{Z}$, a *řídícího zobrazení* f.

V první části si ukážeme, jak takové řešení konstruovat, jaké podmínky jsou postačující k existenci řešení a nastíníme základní matematické techniky použité v této souvislosti, zejména teorii multifunkcí a selekcí. V další části zobecníme poněkud zadání, abychom mohli pokrýt více úloh. V poslední části rozvedeme diskusi o existenci řešení v případě afinity zobrazení $b(\cdot,\mu)$. Všimneme si také extremálních řešení, které v takovém případě mohou existovat, někdy i nutně, a umožní dále rozvíjet předložený problém například pomocí Choquetovy teorie.

1. Řešení (b, f) úlohy a jeho existence

V celé práci budeme uvažovat trojici lokálně konvexních polských (separabilních metrizovatelných úplných) prostorů $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$. Označme standardně $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{B}$ a $\mathcal{U}$ systémy otevřených, uzavřených, kompaktních, borelovských a universálně měřitelných množin. Připomeňme, že prostor $\mathcal{M}_1$ pravděpodobnostních měr na polském prostoru je opět lokálně konvexní polský prostor, a že každá borelovská pravděpodobnostní míra na separabilním metrickém prostoru je regulární ve smyslu $\mu(B) = \inf\{\mu(G), B \subset G \in \mathcal{G}\}, B \in \mathcal{B}$.

Jak jsme již uvedli, hledáme pravděpodobnostní míru P^λ na součinovém prostoru $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Tato míra by měla být rozdělením náhodného vektoru (ξ, η) tak, aby $\mathcal{L}(\xi) = \lambda$ a $\mathcal{L}(\eta|\xi = x) \in \mathcal{P}_x$ s.j. $[\lambda]$, kde $\mathcal{P}_x$ je *množina přípustných řešení* dané (b, f) *úlohy*, která je zadaná implicitně podmínkami (2). Jinými slovy marginální rozdělení ξ je předepsané a podmíněná rozdělení η při $\xi = x$ řeší zadaný problém s počáteční podmínkou x. Nazvěme takovou dvojici (b, f) *vektorem.*

Řešením uvedené úlohy je pravděpodobnostní míra ve tvaru

$$P^\lambda(B \times C) = \int_B P^x(C)\lambda(dx), B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), C \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}), P^x \in \mathcal{P}_x. \tag{4}$$

Aby tato míra byla dobře definována, musíme mít zaručenu universální měřitelnost zobrazení $K : x \mapsto P^x$. Tím ovšem říkáme, že hledáme *universálně měřitelné markovské jádro* (UMK) řešící (b, f) úlohu. Takovéto jádro tvoří jakákoliv *měřitelná selekce* z mnohoznačného zobrazení $x \mapsto \mathcal{P}_x$. Jest tedy možné hovořit o markovském jádru řešícím (b, f) úlohu, (b, f) selekci či náhodném (b, f) vektoru a přitom mít na mysli stále jediné—pravděpodobnostní míru P^λ. V dalším textu proto nebudeme zvláště rozlišovat mezi těmito pojmy.

1.1. **Mnohoznačná zobrazení a selekce.** Připomeňme si nyní základní pojmy z teorie mnohoznačných zobrazení. Zobrazení $\Psi : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{Y}}$ se nazývá *mnohoznačné zobrazení*. Je-li navíc $\Psi(x) \neq \emptyset$ pro každé x, nazýváme toto zobrazení *multifunkcí*. Multifunkce s uzavřenými obrazy se nazývá *korespondence*.

Jelikož budeme pracovat pouze s měřitelností mnohoznačného zobrazení, nemusíme dále rozlišovat mezi multifunkcí a mnohoznačným rozdělením. Omezíme-li se u mnohoznačného zobrazení na množinu $D_\Psi = \{x : \Psi(x) \neq \emptyset\}$, dostáváme multifunkci. Měřitelnost takové multifunkce posuzujeme vzhledem k D_Ψ, nikoliv vzhledem k celému prostoru $\mathbb{X}$.

Selekcí multifunkce rozumíme takové zobrazení $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, že $f(x) \in \Psi(x)$ pro všechna x. Poznamenejme zde, že jde o stejný problém jako vybrat pro množinu $A \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ zobrazení $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ takové, že graf f leží v A. Zde pochopitelně ztotožňujeme A s grafem Ψ. Uveďme si postačující podmínku pro existenci měřitelné selekce, tedy i postačující podmínku pro existenci řešení (b, f) úlohy.

Připomeňme, že multifunkce je

(1) *B-měřitelná*, když $\{x : \Psi(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ pro $G \in \mathcal{G}(\mathbb{Y})$ a
(2) *U-měřitelná*, když $\{x : \Psi(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{U}(\mathbb{X})$ pro $G \in \mathcal{G}(\mathbb{Y})$.

Z teorie multifunkcí vyplývá, že pro B- i U-měřitelnou korespondenci existuje universálně měřitelná selekce. Tato problematika je popsána v monografiích [1], [9], důležitým nástrojem jsou zde věty typu „*Cross-sections*“, například v [2] 8.5.

1.2. **Existence implicitního řešení.** V této části se budeme zabývat podmínkami kladenými na zobrazení b a f, které se ukáží jako postačující k existenci řešení (b, f) úlohy. Ukážeme si, že místo ověřování měřitelnosti multifunkce, případně jejího grafu, postačí ověřit měřitelnost prováděcího a řídícího zobrazení. Následující věta je dokázána v [5].

Věta 1. *Mějme zadanou (b, f) úlohu. Obě následující podmínky jsou postačující pro existenci měřitelné (b, f) selekce.*

(1) *Zobrazení $b(x, \mu)$ je borelovské a v proměnné μ navíc spojité, zobrazení f je universálně měřitelné.*
(2) *Zobrazení b i f jsou borelovská.*

Poznámka 2. *Předchozí věta netvrdí* nic *o neprázdnosti množiny $\mathcal{P}_x$. Musíme ji číst s tímto na paměti. Přesněji říká, že pro libovolnou míru $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$ takovou, že $\lambda^*(\complement D) = 0$, kde*

$$D := \{x \in \mathbb{X} : \exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}), b(x, \mu) = f(x)\},$$

existuje P^λ míra řešící danou (b, f) úlohu zkonstruovaná předpisem (4).

V této chvíli nám nezbývá nic jiného než existenci neprázdné množiny D předpokládat. Míru $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$, $\lambda^*(\complement D) = 0$ nazveme *přípustnou počáteční podmínkou.*

1.3. **První příklad.** Základní příklad je zároveň jedním z nejuniversálnějších nástrojů teorie pravděpodobnosti. Jde o *momentovou úlohu.* Připomeňme, že obyčejná momentová úloha je definována pomocí zobrazení $g_i(y)$ a hodnot f_i,$i \in I$ předpisem

$$\int_{\mathbb{Y}} g_i(y)\mu(dy) = f_i, \text{ tedy } \mathcal{P} = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : \mathrm{E}_\mu[g_i(\eta)] = f_i\}. \tag{5}$$

Věta 1 nyní snadno vede k možnosti tento předpis zobecnit na

$$(6) \quad \int_{\mathbb{Y}} g_i(x,y)\mu(dy) = f_i(x), \text{ tedy } \mathcal{P}_x = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : \mathrm{E}_\mu[g_i(x,\eta)|\xi = x] = f_i(x)\}$$

a získat dvourozměrný vektor (ξ,η), jehož první složka má předepsané marginální rozdělení a druhá složka podmíněně řeší libovolný počet momentových úloh. Postačující podmínkou je spočetnost I a borelovská měřitelnost zobrazení g_i a f_i. Pokud bychom chtěli slevit z požadavků na f_i směrem k universální měřitelnosti, požadavky na g_i se zpřísní. Kromě borelovské měřitelnosti bychom museli přidat omezenost a spojitost zobrazení $g_i(\cdot,y)$ v proměnné y.

Speciálním případem je zde základní momentový problém, kdy g_i, f_i jsou reálné funkce, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ a úloha zní

$$g_i(x,y) = y^i, \text{ tedy } \mathrm{E}_\mu[\eta^i|\xi = x] = f_i(x).$$

2. Zobecnění (b,f) úlohy

Zadání (b,f) úlohy ve tvaru (2) může někdy být příliš svazující kvůli požadavku, že jediná přípustná hodnota výsledku prováděcího zobrazení $b(\cdot,\mu)$je dána řídícím zobrazením $f(\cdot)$. Zde však můžeme poněkud slevit a požadovat splnění obecnější (b,F) podmínky, která definuje množiny přípustných řešení

$$(7) \quad \mathcal{P}_x := \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : b(x,\mu) \in F(x)\},$$

kde F je nějaká multifunkce.

Základním existenčním výsledkem je nyní

Věta 3. *Mějme dánu (b,F) úlohu. Pak měřitelná (b,F) selekce existuje, jestliže je splněna jedna z těchto podmínek.*

(1) *Zobrazení b je borelovské a v proměnné μ navíc spojité, korespondence F je U-měřitelná.*
(2) *Zobrazení b je borelovské a F je B-měřitelná korespondence.*

Všimněme si, že poznámka uvedená za větou 1 zůstává v platnosti i nyní.

Příkladem takto rozšířené úlohy je zobecněný momentový problém, kdy například pro reálné prostory a funkce g_i, f_i definujeme $F_i(x) = (-\infty, f_i(x)]$ a hledáme řešení úlohy pro

$$g_i(x,y) = y^i, \text{ tedy } \mathrm{E}_\mu[\eta^i|\xi = x] \le f_i(x).$$

3. Afinita prováděcího zobrazení

V následující části budeme pracovat s jednodušší (b,f) úlohou. Většina uvedených výsledků se snadno rozšiřuje i pro (b,F) úlohy a proto ponecháme tyto případy na čtenáři.

Na příkladu momentové úlohy si povšimněme, že v mnoha významných úlohách je zobrazení $b(x,\mu)$ afinní v μ. Připomeňme, že afinní je zobrazení tehdy, je-li zároveň konvexní i konkávní, neboli

$$b(x, a\mu + (1-a)\nu) = ab(x,\mu) + (1-a)b(x,\nu), \forall a \in (0,1).$$

V takovém případě není obtížné si uvědomit, že množiny $\mathcal{P}_x$ přípustných řešení (b,f) úlohy při počáteční podmínce x jsou konvexní.

3.1. **Konvexní množiny.** Konvexní množiny mají v matematice významné místo. Připomeňme, že množina A je konvexní, jestliže

$$x, y \in A \ \Rightarrow ax + (1-a)y \in A, \forall a \in (0,1). \tag{8}$$

Extremálním (též krajním)bodem konvexní množiny A rozumíme takový bod x, že množina $A \setminus \{x\}$ je opět konvexní. Jinými slovy je to též takový bod $x \in A$, že neexistují dva různé body v A, jejichž konvexní kombinace je rovna x. Množina extremálních bodů se obvykle značí $\mathrm{ex}(A)$. Je zřejmé, že některé konvexní množiny nemusí mít žádné extremální body, jako je tomu například u otevřené jednotkové koule v $\mathbb{R}^3$.

Označme si co$A$ *konvexní obal* množiny A, tedy nejmenší konvexní množinu obsahující A. Je zřejmé, že

$$\mathrm{co}\ \mathrm{ex}A \ \subset \mathrm{co}A \ = A \tag{9}$$

pro každou konvexní množinu A. Nejmenší uzavřenou konvexní množinu obsahující A nazveme *konvexním uzávěrem* A a budeme ji značit $\overline{\mathrm{co}}A$. Pro uzavřené konvexní množiny zřejmě platí

$$\overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{ex}A \ \subset \overline{\mathrm{co}}A \ = \overline{\mathrm{co}A} = A, \tag{10}$$

kde rovnost nastává pro konvexní kompaktní množiny v metrickém prostoru. Rovnost $\overline{\mathrm{co}}A \ = \overline{\mathrm{co}A}$ je obecně vlastností konvexního uzávěru.

Hezkým příkladem konvexního uzávěru je prostor pravděpodobnostních měr na (zde stačí úplně regulárním) prostoru $\mathbb{X}$, kde platí

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{X}) = \overline{\mathrm{co}}\{\delta_x, x \in \mathbb{X}\}, \delta_x(B) = I_B(x) \text{ (Diracova míra).} \tag{11}$$

Obecně jsou Diracovy míry extremálními body prostoru pravděpodobnostních měr na jakémkoliv prostoru, tedy speciálně pro polské prostory platí

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{X}) = \overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{ex}\mathcal{M}_1(\mathbb{X}). \tag{12}$$

O konvexních množinách a topologických vlastnostech pravděpodobnostních měr se lze dozvědět více například v [7] a [12].

3.2. **Obor hodnot prováděcí funkce.** Předchozí úvahy nás mohou dovést k vytvoření postačujících podmínek pro existenci neprázdné množiny $\mathcal{P}_x$ zadefinované v (2).

Nejprve si všimněme, že množina

$$B(x) = \{b(x,\mu), \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y})\} \tag{13}$$

je konvexní, což okamžitě plyne z konvexity $\mathcal{M}_1(\mathbb{Y})$ a afinity $b(x,\mu)$ v μ. Aby množina přípustných řešení byla neprázdná, musí platit $f(x) \in B(x)$. K tomu však jistě postačí

$$f(x) \in \mathrm{co}\{b(x,\delta_y), y \in \mathbb{Y}\} = \{b(x,\mu), \mu \in \mathrm{co}\{\delta_y, y \in \mathbb{Y}\}\} \subset B(x). \tag{14}$$

Ověřme rovnost v předchozím výrazu. Zřejmě platí inkluze $\subset$, neboť obě zkoumané množiny jsou konvexní. Je-li $\mu \in \mathrm{co}\{\delta_y\}$, pak

$$\exists \alpha_i, y_i : \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{y_i}. \tag{15}$$

Díky afinitě zobrazení b je tedy $b(x,\mu) = \sum_1^n \alpha_i b(x, \delta_{y_i})$ a tím jsme ověřili i obrácenou inkluzi.

Postačí tedy „pouze“ prozkoumat množinu obrazů Diracových měr a zaměřit se na její konvexní obal, který však, jak ukazují rovnosti (11) a (14), je dostatečně reprezentativní. Ještě lepší situace nastává pro b spojitou a afinní v μ, kdy můžeme uvažovat slabší podmínku

$$f(x) \in \overline{\text{co}}\{b(x, \delta_y), y \in \mathbb{Y}\} = \{b(x, \mu), \mu \in \overline{\text{co}}\{\delta_y, y \in \mathbb{Y}\}\} = B(x). \tag{16}$$

3.3. **Momentová úloha podruhé.** Podívejme se podruhé na určité momentové úlohy, na kterých si ukážeme působení právě odvozených výsledků. Nejprve uvažujme první dva momenty reálné náhodné veličiny, tedy úlohu s prováděcí funkcí nezávislou na počáteční podmínce x

$$b(\mu) = (\mathrm{E}_\mu \eta, \mathrm{E}_\mu \eta^2). \tag{17}$$

Dosadíme-li za μ Diracovu míru δ_y, dostáváme jako výsledek prováděcí funkce dvojici (y, y^2). Množina všech výsledků pro Diracovy míry tedy tvoří parabolu $y = x^2$ v rovině $\mathbb{R}^2$, jejíž konvexní obal je zřejmě její „vnitřek“ $\{(x, y) : y \geq x^2, x \in \mathbb{R}\}$.

Postačující podmínkou existence neprázdného řešení pro uvedenou prováděcí funkci b proto je následující podmínka na řídící funkci f

$$f(x) = (z_1, z_2)(x) \text{ tak, že } z_2(x) \geq z_1^2(x), z_1(x) \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{X}. \tag{18}$$

Všimněme si, že nyní jde zároveň o podmínku nutnou, neboť neexistuje pravděpodobnostní míra na reálných číslech taková, že $\mathrm{E}\eta^2 < (\mathrm{E}\eta)^2$. Dále poznamenejme, že body $b(\delta_y)$ jsou právě všechny extremální body množiny $\{b(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})\}$.

Jako druhý příklad uvažujme první a třetí moment reálné náhodné veličiny, tedy $b(\mu) = (\mathrm{E}_\mu \eta, \mathrm{E}_\mu \eta^3)$. Diracovy míry se zde zobrazují na kubickou křivku $y = x^3$ v $\mathbb{R}^2$ a jak si snadno představíme, konvexním obalem této křivky je celá rovina $\mathbb{R}^2$. Z toho plynou dva závěry. Za prvé pro libovolnou reálnou řídící funkci $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^2$ splňující předpoklady věty 1 existuje řešení předložené (b, f) úlohy. Druhý závěr je ten, že obrazy extremálních bodů, tedy Diracových měr, nejsou extremální body konvexní množiny všech obrazů.

3.4. **Existence řešení.** Nyní můžeme předchozí úvahy shrnout do závěrečného tvrzení, které podstatně zjednodušuje ověření existence neprázdného řešení ve speciálních případech. Označme nyní

$$B_{ext}(x) := \{b(x, \delta_y), y \in \mathbb{Y}\}. \tag{19}$$

Věta 4. *Nechť pro zadanou (b, f) úlohu platí jedna z následujících podmínek*

1. *Zobrazení $b(x, \mu)$ i $f(x)$ jsou borelovská, b je afinní v μ a $f(x) \in \mathrm{co} B_{ext}(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{X}$.*
2. *Zobrazení $b(x, \mu)$ i $f(x)$ jsou borelovská, b je afinní a spojité v μ a $f(x) \in \overline{\mathrm{co}} B_{ext}(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{X}$.*
3. *Zobrazení $b(x, \mu)$ je borelovské a navíc afinní a spojité v μ, $f(x)$ je universálně měřitelné a $f(x) \in \overline{\mathrm{co}} B_{ext}(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{X}$.*

Pak pro libovolnou počáteční podmínku $\lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X})$ existuje řešení zadané (b, f) úlohy.

4. Extremální řešení

Konvexita množiny $\mathcal{P}_x$ při afinním prováděcím zobrazení podsouvá myšlenku zabývat se extremálními body této množiny. Více bychom však chtěli vědět o možném řešení se stochastickou počáteční podmínkou procházejícím pouze extremální body množiny řešení s deterministickou počáteční podmínkou. Uvažujme v této části pouze (b, f) úlohy splňující podmínky věty 4, abychom nemuseli dbát na množinu přípustných počátečních podmínek. Zobecnění není těžké, pouze vyžaduje další značení a znepřehledňuje výsledky.

4.1. **Charakteristika extremálního řešení.** Chceme nyní studovat extremální markovská jádra řešící zadaný (b, f) problém. Označme si proto

$$(20) \qquad \mathcal{J} := \{K : (\mathbb{X}, \mathcal{U}(\mathbb{X}) \to (\mathcal{M}_1(\mathbb{Y}), \mathcal{B}(\mathcal{M}_1(\mathbb{Y}))) : K \text{ je řešení } (b, f) \text{ úlohy}\}.$$

Všimněme si, že pro afinní prováděcí zobrazení je $\mathcal{J}$ konvexní množina universálně měřitelných markovských jader. Existuje nějaká souvislost mezi extremálními body $\mathcal{J}$ a $\mathcal{P}_x$?

Je-li markovské jádro J extremální bod všech řešení $\mathcal{J}$, pak

$$(21) \qquad J = aK + (1-a)L, a \in (0,1), K, L \in \mathcal{J} \Rightarrow K = L = J.$$

Pokud by existovalo $z \in \mathbb{X}$ takové, že $J(z)$ není extremální bod $\mathcal{P}_z$, najdeme dvě různá řešení K_z a L_z a $0 < a < 1$ taková, že

$$(22) \qquad \begin{aligned} &J(z) = aK_z + (1-a)L_z \\ &J = aK + (1-a)L, K(x) = L(x) = J(x), x \neq z, K(z) = K_z, L(z) = L_z. \end{aligned}$$

Zobrazení K a L jsou zřejmě měřitelná řešení (b, f) úlohy a J není extremální bod $\mathcal{J}$, což je spor.

Je-li naopak pro každé $x \in \mathbb{X}$ bod $J(x)$ extremálním bodem $\mathcal{P}_x$, pak

$$(23) \qquad \begin{aligned} J = aK + (1-a)L &\Rightarrow J(x) = aK(x) + (1-a)L(x) \\ &\Rightarrow L(x) = K(x) = J(x) \forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow J = K \ = L. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení 5. *Nechť pro (b, f) úlohu splňující podmínky věty 4 existuje řešení $J : \mathbb{X} \to \mathcal{M}_1(\mathbb{Y})$. Pak J je extremální bod $\mathcal{J}$ právě když $J(x)$ je extremální bod $\mathcal{P}_x$ pro všechna $x \in \mathbb{X}$.*

Pokusme se najít nějakou další charakterizační vlastnost extremálního řešení. Již jsme si všimli, že extremální pravděpodobnostní míry jsou Diracovy míry. Tedy míry, které mají nejmenší možný nosič, jediný bod. *Nosičem míry* μ, značeným $\operatorname{supp}(\mu)$ rozumíme nejmenší uzavřenou množinu takovou, že $\mu(\operatorname{supp}(\mu)) = 1$. Jak vypadá nosič extremálního bodu množiny $\mathcal{P}_x$?

Podívejme se na řešení $\mu \in \mathcal{P}_x$, jehož nosič je nejmenší. Přesněji tak, že pro libovolnou míru $\nu \in \mathcal{P}_x$ platí, že $\operatorname{supp}(\nu) \not\subset \operatorname{supp}(\mu)$. Pak míra μ musí být extremální. Pokud by totiž nebyla extremální, pak

$$(24) \quad \mu = a\nu_1 + (1-a)\nu_2 \Rightarrow \operatorname{supp}(\mu) = \operatorname{supp}(\nu_1) \cup \operatorname{supp}(\nu_2) \Rightarrow \operatorname{supp}(\nu_i) \subset \operatorname{supp}(\mu).$$

Platí tedy následující tvrzení.

Tvrzení 6. *Jestliže pro $\mu \in \mathcal{P}_x$ platí $\operatorname{supp}(\nu) \not\subset \operatorname{supp}(\mu)$ pro všechny míry $\nu \in \mathcal{P}_x$, pak míra $\mu \in \operatorname{ex}\mathcal{P}_x$.*

Opačná implikace je v tuto chvíli otevřená. Všimněme si ještě, že pro toto tvrzení nepotřebujeme afinitu zobrazení b. V každém případě jiné ze speciálních řešení, řešení s největším možným nosičem, zjevně stojí na opačném pólu množiny řešení.

4.2. **Extremální body momentových množin.** Podívejme se opět, jak vypadá extremální řešení v konkrétním případě momentové úlohy. V článku [16] jsou extremální body momentových množin o nejvýše konečném počtu momentových podmínek přímo charakterizovány. Věta 2.1 uvedeného článku říká

Tvrzení 7. *Mějme dané měřitelné funkce $g_1, \ldots, g_n$ definované na prostoru $\mathbb{Y}$ a reálná čísla $f_1, \ldots, f_n$. Uvažujme množinu*

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Y}) : g_i \textit{ je } \mu\textit{-integrovatelná a } \int g_i d\mu = f_i \right\}.$$

Pak je $\mathcal{Q}$ konvexní a

$$\begin{aligned}\text{ex}\mathcal{Q} = \Big\{\mu \in \mathcal{Q} : \mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{y_i}, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, y_i \in \mathbb{Y}, 1 \le m \le n+1 \\ \textit{vektory } (g_1(y_i), \ldots, g_n(y_i), 1), 1 \le i \le m, \textit{ jsou lin. nezávislé}\Big\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Prozkoumejme nyní extremální body pro momentovou úlohu zadanou prvními dvěma momenty, tedy $b(\mu) = (\mathrm{E}_\mu \eta, \mathrm{E}_\mu \eta^2)$. Podle předchozího tvrzení jsou extremální body právě ty pravděpodobnostní míry, které řeší zadanou (b, f) úlohu a mají nejvýše tři body nosiče. Všimněme si, že pro libovolné tři různé body y_1, y_2, y_3 platí

$$\text{hodnost} \begin{pmatrix} y_1 & y_1^2 & 1 \\ y_2 & y_2^2 & 1 \\ y_3 & y_3^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ je rovna 3,} \tag{26}$$

neboli jakékoliv řešení (b, f) úlohy s právě třemi různými body nosiče je extremální. Dále si uvědomme, že každá dobře zadaná úloha tohoto typu (tedy taková, kde $f_1^2 < f_2$) má řešení s dvěma body nosiče a to $\{-\sqrt{f_2}, \sqrt{f_2}\}$. V takovém případě ovšem platí, že pro libovolné řešení μ se třemi body nosiče platí $-\sqrt{f_2} \notin \text{supp}(\mu)$ nebo $\sqrt{f_2} \notin \text{supp}(\mu)$. Jediným řešením v případě $f_1^2 = f_2$ je δ_{f_1} a úloha nemá řešení pro $f_1^2 > f_2$.

V tomto případě tedy můžeme dojít k závěru, že extremální řešení je právě takové řešení μ, že

$$\forall \nu \in \mathcal{Q} : \text{supp}(\nu) \not\subset \text{supp}(\mu), \tag{27}$$

tedy v tvrzení 6 platí ekvivalence. Důvod je ten, že trojice bodů (y_i, y_i^2) splňujících (26) tvoří simplex a tedy existuje jediná konvexní kombinace těchto bodů jejímž výsledkem je bod (f_1, f_2).

Extremální řešení momentové úlohy zadané prováděcí funkcí $b(\mu) = (\mathrm{E}_\mu \eta, \mathrm{E}_\mu \eta^3)$ jsou všechna řešení s nejvýše třemi různými body nosiče kromě případu míry s nosičem $\{y_1, y_2, y_3\}$ takovým, že

$$(y_1, y_1^3), (y_2, y_2^3), (y_3, y_3^3) \text{ leží v jedné přímce.} \tag{28}$$

5. Závěrečné poznámky

Momentové úlohy, na nichž jsme vesměs ilustrovali předkládanou teorii jsou zdánlivě jen úzkou třídou úloh. Ve skutečnosti však jde o mnohem universálnější nástroj, než je na první pohled patrné. Momentové množiny, tedy množiny řešení momentových úloh, zahrnují například i množiny pravděpodobnostních měr omezených shora v Choquetově uspořádání danou mírou, množiny řešení martingalových problémů a mnoho dalších. Zájemce odkazujeme na literaturu [13]–[15], kde se lze také seznámit s problematikou integrální representace na momentových množinách.

Kromě extremálních řešení, která mají uplatnění při hledání integrálních representací, maximalizaci mírově afinních funkcionálů a dalších úlohách spjatých se Choquetovou teorií, lze se zabývat též hledáním řešení s největším možným nosičem. Existence takového řešení je zajištěna splněním CS-podmínky (viz [10])

$$\forall \big(x \in \mathbb{X}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(x)\big) \; \exists \left(\alpha_n > 0, \sum_1^\infty \alpha_n = 1\right) : \sum_1^\infty \alpha_n \mu_n \in \mathcal{P}(x). \tag{29}$$

V [5] je dokázáno, že afinita prováděcího zobrazení $b(x, \mu)$ v proměnné μ je postačující podmínkou ke splnění CS-podmínky a tedy existuje řešení (b, f) úlohy s největším možným nosičem. Vztahu nosiče sdruženého rozdělení a nosičů marginálního a podmíněných rozdělení je věnována práce [4].

Poznamenejme ještě, že zde předváděné výsledky obvykle platí i pro obecnější (b, F) úlohy za dodatečného předpokladu konvexity obrazů $F(x)$.

Literatura

(1) Aubin, J.-P., Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990
(2) Cohn, D.L., *Measure Theory*, Birkhäuser, 1993
(3) Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linějnyje operatory: Obščaja teorija*, Izdatělstvo inostrannoj literatury, 1962
(4) Hlubinka, D., The support of $\mathcal{L}(\xi, \eta)$ when the support of $\mathcal{L}(\eta|\xi = x)$ and $\mathcal{L}(\xi)$ are given, *Acta Universitatis Carolinae, Math. et Phys.*, 39, 1998, str. 41–48
(5) Hlubinka, D., Implicit Markov kernels, Preprint KPMS, 2000
(6) Kallenberg, O., *Foundation of Modern Probability*, Springer, 1997
(7) Lukeš, J., *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, 1997
(8) Lukeš, J., Malý, J., *Míra a integrál*, Karolinum, 1993
(9) Srivastava, S.M., *A Course on Borel Sets*, Springer, 1998
(10) Štěpán, J., How to construct a two dimensional random vector with a given conditional structure, sborník *Distribution with Given Marginals and Moment Problems*, edit. V. Beneš a J. Štěpán, Kluwer, 1997, str. 161–171
(11) Štěpán, J., Hlubinka, D., Two dimensional probabilities with given conditional structure, *Kybernetika*, 35.3, 1999, str. 367–381
(12) Topsœ, F., *Topology and Measure*, LNM 133, Springer, 1970
(13) Weizsäcker, H.v., Winkler, G., Non-compact extremal integral representations: some probabilistic aspects, *Functional analysis: Surveys and recent results II, Math. Studies* 38, 1980, North Holland, str. 115–148
(14) Weizsäcker, H.v., Winkler, G., Integral representation in the set of a solutions of a generalized moment problem, *Math. Ann.*, 246, 1979, str. 23–32
(15) Winkler, G., *Choquet order and simplices*, LNM 1145, Springer, 1985
(16) Winkler, G., Extreme points of moment sets, *Mathematics of oper. research*, 13.4, 1988, str. 581–587

UK MFF, KPMS, Sokolovská 83, 186 75, Praha 8
E-mail: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz