

ANALÝZA NÁHODNÝCH BODOVÝCH VZDÁLENOSTÍ A VORONOIOVY TESELACE SYSTÉMŮ

Ivan SAXL¹

MÚ AV ČR

Abstract. The main goal of distance methods as well as of polyhedral (polygonal) methods of analysis of 3D (2D) point patterns is an understanding or classification of their spatial arrangement. The methods are based on the knowledge of properties of model point processes (*e.g.* point lattices, Poisson point process, cluster fields, Bookstein model on lattices). The distributions of spherical contact distances and of the nearest neighbour distances can be in many cases calculated theoretically. Several examples are presented and some applications are shortly sketched.

With the exception of the Poisson-Voronoi tessellation, the properties of Voronoi tessellations generated by various point fields can be estimated only by large scale simulations. The results of such simulations are summarized and applications discussed.

Zusammenfassung. Der Hauptzweck der Abstandsmethode ebenso wie auch der Polyedermethode (Polygonmethode) zur Analyse der 3D (2D) Punkt-konfigurationen ist eine Beschreibung oder eine Klassifikation ihrer räumlichen Anordnungen. Diese Methoden benützen die Kenntnisse von Eigenschaften der Modelle für Punktfelder (*z.B.* Punktgitter, Poissonsches Punktfeld, Clusterfelder, Bookstein model auf einer Gitter usw.). Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion und auch für die Verteilungsfunktion des Nächste-Nachbar-Abstandes können die theoretischen Formeln in manchen Fällen abgeleitet sein. Einige Beispiele wie auch Anwendungen sind kurz dargestellt.

Mit Ausnahme der Poisson-Voronoi-Mosaik, können die Kenngrößen der von verschiedenen Punktfelder erzeugten Voronoi-Mosaik nur mit Hilfe von Simulationen untersucht sein. Die Ergebnisse solcher Simulationsverfahren werden zusammengestellt und die Anwendungen diskutiert.

Резюме: В статье изучается проблематика двух и трех размерной классификации пространственных знаков.

1. ÚVOD

Bodový systém $\Psi = \{z_1, \dots, z_k\}$ (pokud o překlad široce užívaného termínu „point pattern“) je konečná množina bodů z_i ležících v omezené oblasti $B \subset \mathbb{R}^d$. Nejčastěji se jedná o referenční body objektů 2D nebo 3D prostoru, např. hvězd v části Vesmíru, ohnisek zemětřesení v nějaké seismicky aktivní oblasti, hnízdišť ptáků v ekologické nice, buněk ve výřezu tkáně, zpevňujících částic v kompozitním materiálu atd. Častým úkolem prostorové statistiky je charakterizace takových bodových systémů, zejména nalezení vhodného modelu prostorového rozmístění bodů $z_i \in \Psi$.

Protože rozmístění bodů charakterizujících týž jev v různých oblastech B nebo opakovaný jev ve formálně téže oblasti B (jeho „schéma“ či „vzor - pattern“) bývá zhusta podobné, má smysl daný systém Ψ považovat za průnik $\Phi \cap B$ oblasti B s náhodnou lokálně konečnou množinou bodů Φ (tj.

¹Tato práce vznikla s podporou grantu GA ČR 201/1996/0226.

$\#(\Phi \cap B) < \infty$ pro libovolnou omezenou borelovskou B) definovanou na nějaké větší podmnožině \mathbb{R}^d , resp. nejlépe v celém \mathbb{R}^d . Φ se nazývá bodový proces v \mathbb{R}^d ; můžeme jej chápat také jako náhodnou míru $\Phi(B) = \#(\Phi \cap B)$, která každé B přiřadí počet bodů Φ v ní ležících. Lze dokázat, že proces Φ je plně určen funkcíonálem $V_K(\Phi) = \mathbf{P}(\Phi(K) = 0)$ na třídě všech kompaktních množin $K \subset \mathbb{R}^d$. Funkcionál V_K se nazývá *pravděpodobnost dutiny* a jeho geometrický význam je pravděpodobnost, že v K neleží žádný bod procesu. Často také bodové procesy popisujeme konečně rozměrnými distribucemi $\mathbf{P}(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k)$; proces Φ je opět plně určen touto distribucí pro všechny konečné posloupnosti $\{B_j\}$ disjunktních omezených borelovských množin.

Označme Φ_h bodový proces, v němž každý bod procesu Φ je posunut o vektor h . Proces je stacionární (někdy se používá termín homogenní), jestliže jeho distribuce nezávisí na posunutí h ; tj. např. $V_K(\Phi) = V_K(\Phi_h)$ pro libovolné h . Bodový proces pak má jednu rozměrovou (měřítkovou) charakteristiku - intenzitu procesu λ definovanou vztahem $\mathbf{E}\Phi(B) = \lambda \nu_d(B)$, kde ν_d je Lebesgueova míra. (Základními referencemi k celé problematice jsou knihy [43, 44], k teselacím knihy [21, 24].)

2. ZÁKLADNÍ TYPY BODOVÝCH PROCESŮ

Výchozími bodovými procesy pro konstrukci procesů složitějších jsou *Poissonův bodový proces* (PBP) a *translační bodová mřížka* L^d (s náhodnou polohou počátku, příp. také orientací). Z libovolné bodové mřížky L^d intenzity λ_L můžeme spojitě přejít k PBP dvěma jednoduchými postupy. *Bernoulliův proces* (BP) na mřížce vznikne, když uzly jsou realizovány nezávisle s pravděpodobností $p < 1$. Lze dokázat, že limitou BP při $p \rightarrow 0$, $\lambda_L \rightarrow \infty$ při zachování $p\lambda_L = \lambda = \text{konst.}$ je PBP intenzity λ . Druhý postup je založen na *Booksteinově modelu* $B_{\tilde{\sigma}}^d = \{x + \xi_x; x \in L^d\}$, kde ξ_x jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s centrováním d -rozměrným normálním rozdělením s varianční maticí $\tilde{\sigma}^2 I$. Limitou BM při $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ je PBP intenzity λ_L .

Nechť d_{0m} je vzdálenost mezi dvěma m -tými nejbližšími sousedy v L^d . Lze snadno dokázat, že vzdálenost d_m mezi dvěma m -tými nejbližšími sousedy v $B_{\tilde{\sigma}}^d$ má necentrální χ -rozdělení s hustotou [44]

$$(1) \quad f_m(r) = r^{\frac{1}{2}d} d_{0m}^{-\frac{1}{2}d+1} \Sigma^{-2} \exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-2}(r^2 + d_{0m}^2)\right] I_{\frac{1}{2}d-1}\left(\frac{rd_{0m}}{\Sigma^2}\right),$$

kde $I_p(z)$ je modifikovaná Besselova funkce řádu p a $\Sigma^2 = 2\tilde{\sigma}^2$.

Stacionární Poissonův bodový proces Φ se obvykle definuje předpisem poissonovské distribuce $\Phi(B)$ s parametrem $\lambda \nu_d(B)$. Ekvivalentně lze vyjít z platnosti podmínky nezávislosti počtu bodů v disjunktních oblastech, tj. $\mathbf{P}(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k) = \mathbf{P}(\Phi(B_1) = n_1) \times \dots \times \mathbf{P}(\Phi(B_k) = n_k)$. Pro pravděpodobnost dutiny pak plyne

$$(2) \quad V_K(\Phi) = \exp[-\lambda\nu_d(K)].$$

Bodová mřížka je příkladem *procesu s pevným jádrem* - uvnitř koule $b(x_k, h)$ poloměru $0 < h < d_{01}$ se středem v bodě procesu x_k neleží žádný jiný bod procesu. V PBP je pro malé $\nu_d(B)$ pravděpodobnost $\mathbf{P}(\Phi(B) \geq 2|\Phi(B) \geq 1) \approx \lambda\nu_d(B)/2$, takže v libovolném ϵ -okolí bodu procesu není přítomnost dalšího bodu procesu vyloučena. V BM však tuto pravděpodobnost můžeme učinit pro libovolné $0 < \epsilon < d_{01}$ libovolně malou volbou dostatečně malého $\tilde{\sigma}$; $B_{\tilde{\sigma}}^d$ je proces s *quasi-pevným jádrem*.

Shlukové procesy či *shluková bodová pole* můžeme tvořit následujícím postupem. Nechť \mathcal{Z} je třída všech konečných posloupností bodů $Z \in \mathbb{R}^d$. Náhodný element $Z \in \mathcal{Z}$ s distribucí $\mathbf{P}(Z)$ je náhodný shluk. Jeho numerické charakteristiky jsou $N = \text{card } Z$ (počet bodů, zvaných obvykle dcery), jeho průměr diam Z či objem konvexního obalu $\nu_d(\text{conv } Z)$ [1]. Nechť dále $\phi = \{x_1, \dots\}$ je realizace libovolného výše zavedeného bodového procesu intenzity λ_p a Z_k jsou nezávislé repliky náhodného shluku Z . Pak

$$(3) \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_k + Z_k)$$

je shlukové pole; je náhodnou množinou definovanou jako sjednocení (union set) Poissonova procesu na \mathcal{Z} . Body x_k (shluková jádra, zárodky) se obvykle nazývají rodiče. Pokud se požaduje, aby i rodiče byli elementy procesu, je třeba uvažovat $X \cup \phi$ místo X). Konkrétně, jestliže Φ je PBP, shlukové pole se nazývá *Booleovské* případně *Neyman-Scottovo*. Jestliže $\Phi = L^d$, je X shlukové pole *mřížkové*. Intenzita shlukových polí je $\lambda = \mathbf{E}N\lambda_p$ resp. $(1 + \mathbf{E}N)\lambda_p$ za přítomnosti rodičů.

Podle typu prostorového rozmístění dcer lze zavést shluky globulární - rovnoměrně náhodně v kouli $Rb(0, 1)$, sférické - rovnoměrně náhodně na $\partial Rb(0, 1)$, pravidelné - vrcholy pravidelných polytopů. Podle distribuce N rozlišujeme shluky binomické - $N = \text{konst.}$ a poissonovské; globulární poissonovské shluky se nazývají Matérnovy. Limitou shlukových polí s náhodnými shluky při $R \rightarrow \infty$ je buď PBP nebo proces PBP lokálně velmi blízký.

3. VZDÁLENOSTI A FUNKCIONÁLY S NIMI SOUVISEJÍCÍ

Pro je stacionární bodové procesy se zavádějí dva základní funkcionaly charakterizující vzdálenosti. Nechť $B \equiv b(0, r)$.

a) Protože $0 \notin \Phi$ téměř jistě, udává funkcional $F(r) = 1 - V_B(\Phi)$ pravděpodobnost, že eukleidovská vzdálenost σ bodu komplementu $\Phi^c = \mathbb{R}^d \setminus \Phi$ od nejbližšího bodu procesu Φ nepřesahuje r . $F(r)$ se nazývá *sférická kontaktní distribuční funkce*. Dosazením za $V_{b(0,r)}(\Phi)$ dostaneme pro PBP

$$(4) \quad F(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d),$$

kde $\kappa_d = \nu_d(b(0, 1))$ je objem jednotkové koule. Obecné momenty jsou $\mathbf{E}\sigma^k = (\lambda \kappa_d)^{-k/d} \Gamma(1 + k/d)$, tj. $\mathbf{E}\sigma = 0.5$ a 0.554 pro $\lambda = 1$ a $d = 2, 3$.

b) Druhý důležitý funkcionál je $D(r) = 1 - \mathbf{P}(\Phi(B) = 1 | 0 \in \Phi)$. Takto podmíněnou pravděpodobnost lze formálně korektně definovat; podmínku $0 \in \Phi$ splníme pro libovolné pole jeho posunutím o $-x_k, x_k \in \Phi$. Funkcionál $D(r)$ pak udává pravděpodobnost, že v kouli $rB(0, 1)$ leží nějaký další bod procesu, nebo-li pravděpodobnost, že eukleidovská vzdálenost bodu procesu od jeho nejbližšího souseda nepřesahuje r . $D(r)$ je tedy *distribuční funkce vzdálenosti nejbližších sousedů* ρ . Pro PBP platí tzv. Slivniakův teorém [43], podle nějž $\mathbf{P}(\Phi$ má vlastnost $Y | 0 \in \Phi) = \mathbf{P}(\Phi \cup \{0\}$ má vlastnost $Y)$. Odtud plyne pro PBP rovnost $D(r) = F(r)$.

Kvalitativně lze odhadnout, jak se změní ve srovnání s PBP funkcionály $F(r), D(r)$ ve shlukových polích a procesech s pevným jádrem - viz obr. 1,2. Jestliže v PBP dané intenzity vytvoříme selektivním posunutím bodů shluky, vzdálenosti nejbližších sousedů se zkrátí a zároveň se zvětší prázdné oblasti; křivka $D(r)$ se posune směrem k nižším hodnotám r a přiblíží se vertikální ose, křivka $F(r)$ se posune směrem opačným. Přesně opačná situace nastane, jestliže od sebe vzdálíme blízké body PBP při vytváření procesu s pevným jádrem ($D(r) = 0$ pro $r \leq h > 0$), hodnoty 1 ovšem $F(r)$ dosáhne obvykle (ne však v L^d) později než $D(r)$. Na základě této úvahy byla zavedena tzv. *J-funkce* jako neparametrická charakteristika bodových procesů:

$$(5) \quad J(r) = \frac{1 - D(r)}{1 - F(r)}, \quad r > 0; F(r) < 1.$$

Pro PBP je zřejmě $J(r) = 1$, pro procesy s pevným jádrem $J(r)$ nejprve roste do lokálního maxima a pak teprve klesne k nule, ve shlukových polích od počáteční hodnoty 1 monotónně klesá. Problém jejího použití spočívá v tom, že z platnosti $J = 1$ neplyne nutně, že bodový proces je PBP [4].

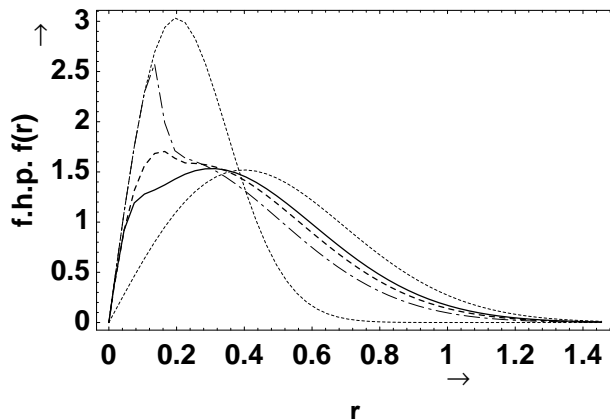
Určení $F(r)$ a $D(r)$ pro shlukové procesy. Pro výpočet $F(r)$ můžeme použít následující úvahu. Ze souboru všech bodů komplementu Φ^c k hodnotě $F(r)$ přispívají ty body, které nejsou od bodů procesu dále než r a tedy hodnota $F(r)$ je pro ergodický proces Φ rovna objemovému podílu sjednocení koulí poloměru r se středy v bodech $x \in \Phi$, tj.

$$(6) \quad F(r) = \lim_{\nu_d(B) \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(X(r) \cap B)}{\nu_d(B)},$$

kde

$$(7) \quad X(r) = \bigcup_k (x_k \oplus b(0, r)),$$

a \oplus je znak Minkowského sčítání množin. Množina $X(r)$ je *model zárodek-zrno* (*germ-grain model*) s kulovým zrnem $rb(0, 1)$; jestliže Φ je PBP, nazývá se (i pro libovolné zrno, např. tvořené náhodnou uzavřenou množinou Ξ) *modelem Booleovským*. Pro něj je známo, že jeho objemový podíl je $p = 1 - \exp[-\lambda \mathbf{E}v_d(\Xi)]$. V případě Booleovských shluků je $\Xi = Z \oplus rb(0, 1)$, odkud výše uvedený vztah (4) pro PBP plyne jako speciální případ pro $Z = \{0\}$. Určení $F(r)$ shlukových polí se pak redukuje na výpočet střední hodnoty objemu dilatace $Z \oplus rb(0, 1)$. V pracích [28, 32, 40] jsou uvedeny příklady průběhů $F(r)$, $D(r)$, $J(r)$ pro Booleovské shluky různých typů) - obr. 1.



Obr. 1. Funkce hustoty pravděpodobnosti sférické kontaktní vzdálenosti $f(r)$ pro rovinné shlukové pole se shluky různých typů s $\mathbf{E}N = 4$, $c = 0.8$ (význam c viz níže, proměnná r je v jednotkách $\lambda_p^{-1/2}$, takže $D = 2R = 0.4$ ve stejných jednotkách). Plná křivka popisuje Matérnovy shluky, čárkovaná sférické a čerchovaná pravidelné (vrcholy čtverce). Tečkované křivky odpovídají limitním případům PBP dcer ($c \rightarrow \infty$, levá křivka) a rodičů (pravá křivka). Shlukové křivky mají dva slabě zřetelné módy: první je odvozen ze sférických kontaktních vzdáleností bodů Φ^c ležících uvnitř a v nejbližším okolí shluků, druhý reflektuje vzdálenost mezi shluky zmenšenou o jejich rozměry. Jsou-li shluky velmi malé, sférická kontaktní vzdálenost měřená z většiny bodů Φ^c je nedokáže rozlišit a $f(r)$ se od křivky rodičovského procesu výrazněji liší jen při hodnotách r srovnatelných s poloměrem shluku. Pravidelné shluky jsou speciálním případem shluků sférických, proto jsou průběhy jejich f.h.p. podobné. Výraznější vzájemné rozdíly mezi jednotlivými křivkami odpovídajícími různému rozmístění dcer i větší rozdíl od křivek jednoho z limitních PBP jsou omezeny na rozměrovou oblast II. Viz obr. 3.

Určení distribučních funkcí $F(r)$, $D(r)$ v pravidelných bodových mřížkách a v Booksteinově modelu na mřížkách. Místo toho, abychom body komplementu Φ^c charakterizovali podle hodnot jejich vzdáleností od bodů procesu Φ , můžeme je rozdělit také do oblastí podle příslušnosti k jednotlivým bodům procesu. Každému bodu $x_k \in \Phi$ přiřadíme celou (konvexní polytop)

$$(8) \quad C_k = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x - x_k\| \leq \|x - x_j\| \text{ pro } j \neq k\}.$$

Sjednocení všech takových cel vyplní celý prostor a nazývá se *Voronoiova teselace* $T(\Phi)$ generovaná procesem Φ [21, 24]. Vztah mezi $T(\Phi)$ a Φ je v řadě případů vzájemně jednoznačný a to i tehdy, když eukleidovská norma je nahrazena obecnějšími funkcemi. Distribuční funkci $F(r)$ můžeme pro ergodický proces Φ zapsat také jako objemem cel vážený průměr distribučních funkcí $F_k(r)$ v jednotlivých celách

$$(9) \quad F(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \nu_d(C_k \cap b(x_k, r))}{\sum_{k=1}^n \nu_d(C_k)} = \mathbf{E}_{\nu_d(C)} F_k(r).$$

Tento vztah je užitečný pro výpočet $F(r)$ v pravidelných bodových mřížkách, kde jsou všechny Voronoiovy cely translačně ekvivalentní, případně v pravidelných bodových mřížkách s pravidelnými shodně orientovanými shluky nebo jednoduchými poruchami typu „vakance“ (chybějící pravidelný shluk mřížkových bodů) či „intersticiál“ (bod mimo uzel mřížky), kdy je cel s různým objemem jen konečný počet [36].

Distribuční funkce $D(r)$ v pravidelných mřížkách je skoková 0-1 funkce se skokem v bodě nejkratší mřížkové konstanty a , pak je její hustota $d(r) = \delta(a)$. V porušených mřížkách vakančního typu je $D(r)$ stejná, u porušených mřížek intersticiálního typu přistoupí ke skokové funkci také složka odpovídající jejich poloze vzhledem k mřížkovým bodům.

Distribuční funkci vzdáleností mezi nejbližšími sousedy pro Booleovská shluková pole dostaneme takto: $1 - D(r)$ je pravděpodobnost, že v kouli $rb(x_k, 1)$ leží pouze bod x_k a ta je součinem pravděpodobnosti dutiny celého shlukového pole a tzv. *pravděpodobnosti samoty* (recluse probability) $R(r)$, že v $rb(x_k, 1)$ neleží ani žádný jiný bod („sestra“) shluku, do něž x_k patří [42, 44]:

$$(10) \quad D(r) = 1 - (1 - F(r))R(r).$$

V tomto případě je tedy pravděpodobnost $R(r)$ identická s J -funkcí a dává jí specifickou interpretaci. Odpovídající vztahy pro $R(r)$ a příklady průběhů $D(r)$ pro různá Booleovská shluková pole jsou v [40].

Poněkud jiným způsobem je třeba počítat distribuční funkce vzdáleností v Booksteinově modelu $B_{\bar{\sigma}}^d$ [26, 33]. Nechť $F_m(r)$ je distribuční funkce vzdáleností libovolného posunutého bodu mřížky od jeho posunutého m -tého nejbližšího souseda v původní mřížce a q_m je počet těchto sousedů (odpovídající funkce hustoty pravděpodobnosti je udána vztahem (1)). Zřejmě $1 - D(r)$ je

pravděpodobnost, že v kouli $b(\xi, r)$ neleží žádný z prvních, druhých a dalších sousedů původního mřížkového bodu $\{0\}$, tj. bodu $\{0 + \xi\} \in B_{\tilde{\sigma}}^d$. Pak

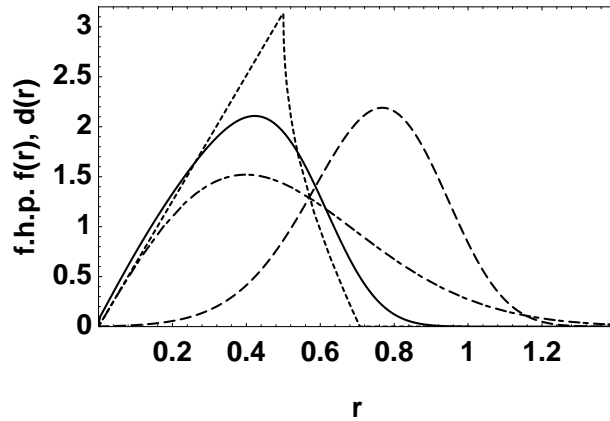
$$(11) \quad D(r) = 1 - \mathbf{P}(B_{\tilde{\sigma}}^d \cap rb(\xi, 1) = \xi | \xi \in B_{\tilde{\sigma}}^d) = 1 - \prod_{m=1}^{\infty} (1 - F_m(r))^{q_m}.$$

Distribuční funkci sférické kontaktní vzdálenosti počítáme podobně, vycházíme z nemřížkového (a tedy neposunutého) bodu $y \notin L^d = \bigcup_{k=0}^{\infty} x_k$ a označíme $d_{0n} = \|y - x_k\|$ jeho vzdálenost od mřížkových bodů $x_k \in L^d$. Funkce hustoty pravděpodobnosti $F(r; y)$ vzdáleností pevného bodu y od bodů $B_{\tilde{\sigma}}^d$ bude mít opět tvar (1) se $\Sigma = \tilde{\sigma}$ a d_{0n} místo d_{0m} ; odpovídající distribuční funkce budíž $F_n(r; y)$. Zřejmě podobně jako v případě $D(r)$ je

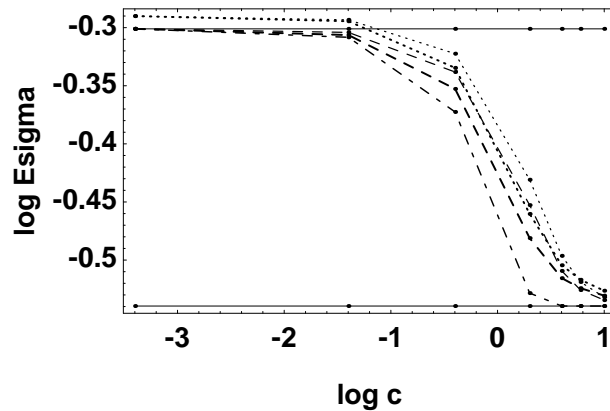
$$(12) \quad F(r; y) = 1 - \prod_{n=0}^{\infty} (1 - F_n(r; y))$$

a hledanou distribuční funkci $F(r)$ dostaneme jako střední hodnotu pro y ze vhodné zvolené oblasti (např. trojúhelníku $(0 \leq y_1 \leq 0.5) \times (0 \leq y_2 \leq y_1)$ pro $d = 2$). Příklad průběhů f.h.p. $f(r)$ a $d(r)$ v Booksteinově modelu na čtvercové mřížce je na Obr. 2.

Vliv rozměru shluku na distribuční funkce $F(r)$, $D(r)$. Jestliže poloměr koule R obsahující shluk roste, dochází k částečnému a posléze úplnému promíchání shluků a shlukový proces je těžší rozlišitelný od PBP. Hrubý odhad toho, při jakých hodnotách průměru $D = 2R$ k této situaci dojde, dostaneme např. z distribuční funkce $D_p(r)$ procesu rodičů (vyznačeno indexem p). $p_1 = D_p(2R)$ je pravděpodobnost, že koule $Rb(x_k, 1)$ se středem v bodě rodičovského procesu protíná kouli stejného poloměru se středem v jiném bodě procesu, $p_2 = D_p(R)$ je pravděpodobnost, že dvě takové koule vzájemně obsahují své středy. Průměr D obvykle vyjadřujeme pomocí bezrozměrné veličiny $c = D/\mathbf{E}\rho$, tj. v jednotkách střední vzdálenosti nejbližších sousedů rodičovského procesu $\mathbf{E}\rho$. Pak $p_1 \approx 1 - \exp[-(0.9c)^3]$, $p_2 \approx 1 - \exp[-(0.45c)^3]$ pro \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 , odkud $p_1 \leq 0.1$, $p_2 \leq 0.01$ pro $c \leq 0.5$ - oblast I zanedbatelné interakce shluků. Naopak pro $c \geq 4$ jsou obě pravděpodobnosti prakticky rovny jedné - oblast III hlubokého prolínání shluků. Ve střední oblasti II, $0.5 \leq c \leq 4$ pak probíhají velmi výrazné změny těch vlastností, které zachycují rozmístění bodů procesu v celém prostoru - tj. sférické kontaktní vzdálenosti $F(r)$. Přitom průběh $F(r)$ shlukového pole s malými shluky se pro velké hodnoty r se blíží průběhu této funkce v rodičovském poli intenzity λ_p : zdálky se shluky jeví jako bodové. Jsou-li shluky velké, $F(r)$, $D(r)$ se málo liší od průběhu odpovídajícího PBP s intenzitou λ . Příklad závislosti $\mathbf{E}\sigma$ vs c pro shluky různého typu s $N = 3$ v \mathbb{R}^3 je na Obr. 3.



Obr.2. Funkce hustoty pravděpodobnosti vzdálenosti nejbližších sousedů $d(r)$ (čárkovaná křivka) a sférické kontaktní vzdálenosti $f(r)$ (plná křivka) pro Booksteinův model $B_{\bar{\sigma}}^2$, $\bar{\sigma} = 0.2$ (v jednotkách $\lambda^{-1/2}$) na čtvercové bodové mřížce. S rostoucí hodnotou směrodatné odchylky posunutí $\bar{\sigma}$ se obě křivky blíží své společné limitě odpovídající PBP (čérchované). Pro srovnání je vynesena také $f(r)$ pro výchozí čtvercovou mřížku B_0^2 (tečkované), odpovídající $d(r) = \delta(1)$ vynesena není.



Obr.3. Závislost střední hodnoty $\mathbf{E}\sigma$ sférické kontaktní vzdálenosti na velikosti shluku c pro rovinná shluková pole s $\mathbf{E}N = 3$. Horní horizontální čára vyznačuje hodnotu $\mathbf{E}\sigma$ v PBP rodičů ($\lambda_p = 1$), dolní odpovídá limitnímu případu $c \rightarrow \infty$ (PBP dcer s $\lambda = 3\lambda_p$). Sférické shluky jsou vyznačeny silně, Matérnovy slabě, binomické ($N = 3$) čárkované, pravidelné shluky (rovnostředné trojúhelníky) čérchované. Hodnota $\mathbf{E}\sigma$ v polích se shluky s Poissonovskou distribucí počtu dcer je vyšší než v procesu rodičů díky nezanedbatelné pravděpodobnosti $\mathbf{P}(Z = \emptyset) = \exp(-\mathbf{E}N)$ přítomnosti prázdných shluků.

Jiné kritérium velikosti shluku dostaneme porovnáním intenzity shlukového pole $\lambda = N\lambda_p$ s lokální intenzitou $\lambda_c = N/(\kappa_d R^d)$ uvnitř koule shluk obsahující. K „rozpuštění“ shluku dojde při takové velikosti koule, že $\lambda = \lambda_{cl}$. Pro Booleovské shluky dostaneme $c_s \approx 2.3$ pro 2D i 3D, tedy hodnotu zhruba uprostřed oblasti II.

Distribuční funkce $D(r)$ závisí především na vzdálenosti dcer ve shluku; její střední hodnota v globulárním shluku je při dvou dcerách $\mathbf{E}\rho \approx D/2$ v \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 [31]. Pro velké N lze tento shluk považovat za výběr z PBP: pro \mathbb{R}^3 pak dostaneme $\mathbf{E}\rho \approx 0.45N^{-1/3}D$.

Testování bodových systémů, aplikace. Při testování zkoumaných bodových systémů je vždy výchozí hypotézou, že se jedná o výběr z PBP. K tomu jsou výhodné statistiky obsahující vzdálenosti obou typů, např. statistiky typu $S_k = m'_k(u)/m'_k(v)$, kde $\{u\}, \{v\}$ jsou nezávislé výběry ze σ (sférické kontaktní vzdálenosti), ρ (vzdálenosti nejbližších sousedů) a m'_k je k -tý výběrový moment [12, 45]. Pro výběry stejného rozsahu n z PBP má Hopkinsova statistika $H = \sum u_i^2 / \sum v_i^2$ Fisherovo $F_{2n, 2n}$ rozdělení. Po zamítnutí výchozí hypotézy lze pak dále usuzovat na typ odchylky od PBP (shluky, pevné jádro), příp. vybrat jiný vhodný model srovnáním výběrových hodnot S_k s hodnotami teoretickými. Při dostatečně početných bodových systémech lze volbu modelu potvrdit odhady distribučních funkcí samotných, příp. funkcí $R(r), J(r)$ atd. Výběry jsou ovšem prakticky vždy cenzorované; pozorované vzdálenosti jsou totiž jednak limitovány rozměry sledované oblasti (pozorovacího okénka), jednak např. body procesu ležící v blízkosti okrajů okénka mohou mít své nejbližší sousedy vně okénka. Pro korekce jsou používány nejrůznější postupy popsané v [3, 6, 10, 12, 15, 27, 29, 30, 35, 45].

S ohledem na výše uvedené vlastnosti jsou metody testování založené na vzdálenostech spíše doplňkové k metodám jiným (odhad průběhu párové korelační funkce, polygonální a polyedrální metody). Přesto se v poslední době objevila nová vlna zájmu o ně jak po stránce jejich praktického využití [3, 15, 29], tak i po stránce teoretické [17, 18]. Navíc znalost distribučních funkcí obou typů vzdáleností se může uplatnit při studiu transportních jevů mezi centry, jejichž rozměry jsou malé ve srovnání s jejich vzdálenostmi, příp. pro charakterizaci procesů souvisejících s částicemi konečných rozměrů – jednak v procesech s pevným jádrem, jednak u dutin dovolujících vzájemné překrývání. Příklady viz [25, 35, 44].

Vztahy $\mathbf{E}\sigma = 0.5/\sqrt{\lambda}$ a $\mathbf{E}\sigma^2 = 0.318/\lambda$ pro PBP slouží k odhadům intenzity λ u tzv. nemapovaných bodových systémů, např. pro odhad hustoty (intenzity) nejen pevných (stromy, hnízda) ale i pohyblivých (živočichů) objektů v jisté oblasti neznámé velikosti. Pro tuto oblast aplikace byly ostatně distanční metody původně vypracovány v lesnictví. Výběrové postupy zaměřené na korekce různých defektů vizuálního pozorování cílů a optimalizaci měření jsou popsány v [12, 45] a zejména v [6]. Vychýlení odhadu intenzity

při použití výše uvedených vztahů i pro objekty s rozložením pravidelnějším než je PBP není obvykle kritické. I v mezním případě čtvercové či trojúhelníkové (rovnostranné) mřížky je totiž $E\sigma \approx 0.38/\sqrt{\lambda}$ s přibližně polovičními druhými momenty vzdáleností (ve srovnání s PBP).

4. PROSTOROVÉ TESELACE GENEROVANÉ BODOVÝMI PROCESY

Místo přímého zkoumání zadaného bodového systému Ψ metodou vzdáleností, klasickou metodou čtverců [12, 36, 43, 45] či odhady charakteristik druhého řádu [30, 36, 43, 44], lze sledovat také Voronoiovu teselaci systémem generovanou a porovnat získané odhady s vlastnostmi modelových teselací. Znalost těchto vlastností má kromě toho podstatně širší uplatnění, neboť v řadě oblastí se vyskytují reálné teselace jako zrna polykrystalů, buňky tkání, správní okrsky či oblasti obslužnosti z daného centra atd. Užitečné jsou i zobecněné Voronoiovy teselace, u nichž buď generátorem cely není bod, ale čárový segment, obrazec či těleso, nebo vzdálenost není eukleidovská [24].

Růstové modely. Důležité jsou i obecnější modely teselací vzniklých předepsaným mechanismem růstu cel z bodových zárodků. Hranice cely přitom vzniká postupně tak, že růst se lokálně zastaví jakmile dojde k doteku sousedních cel. Předpoklad simultánního izotropního růstu zárodků konstantní rychlostí dává opět Voronoiovu teselaci s celami, které jsou konvexními polytopy a jejichž hranice je tvořena body stejně vzdálenými od několika zárodků. Obecnější model předpokládá, že okamžik počátku růstu zárodka je náhodný. PBP můžeme realizovat ve čtyřrozměrném poloprostoru $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ a hodnota čtvrté souřadnice každého bodu udává okamžik, v němž zárodek začne izotropně růst konstantní rychlostí v . Přitom musíme navíc předpokládat, že zárodek zanikne, jestliže v okamžiku započetí svého růstu leží uvnitř jiné již rostoucí cely. Vzniklá teselace se nazývá Johnsonova-Mehlova [22]; její cely již nejsou konvexní, hranice jsou tvořeny úseky hyperbolických křivek či ploch. Předpoklad časově závislé rychlosti nukleace je dalším zobecněním dávajícím vzniknout tzv. nehomogenní Johnsonově-Mehlově teselaci [22, 23, 43].

Charakteristiky teselací. Informace obsažená v teselaci je velmi bohatá, i když řada veličin spolu navzájem souvisí. Složky hranice cel se podle své dimenze $s = 0, \dots, d$ nazývají s -fasety (např. 1-faseta je hrana, d -faseta je cela samotná). Teselace je *regulární*, když dvě sousední s -fasety buď koincidují, nebo jejich průnik je s' -faseta dimenze $s' < s$. Jestliže každá s -faseta je společná $(d - s + 1)$ celám, je teselace *normální*. Voronoiovy teselace generované PBP (*Poissonova-Voronoiova* teselace – PVT), BM se $\sigma > 0$ a globulárními shluky jsou normální i regulární: v 3D se čtyři cely setkávají ve vrcholu, tři v hraně, dvě ve stěně. Naopak teselace generované bodovými mřížkami či

obsahující pravidelné nebo sférické shluky jsou pouze regulární. Z důvodů snazší a rychlejší simulace lze v těchto případech vyšetřovat Booksteinův model $B_{\tilde{\sigma}}^d$ na příslušné mřížce se zanedbatelnou směrodatnou odchylkou $\tilde{\sigma}$ resp. sférické či regulární shluky s dcerami nezávisle náhodně posunutými o vektor mající např. centrální d -rozměrné normální rozdělení se směrodatnou odchylkou zanedbatelnou ve srovnání s rozměrem shluku (tento způsob byl použit u simulací sférických shlukových polí v [37]). Závislost některých charakteristik cel na $\tilde{\sigma}$ však má nespojitost v bodě $\tilde{\sigma} = 0$: např. střední počet vrcholů cely rovinné náhodné normální teselace je vždy 6, tj. např. i u $B_{\tilde{\sigma}}^d$ jejíž limitou při $\tilde{\sigma} \rightarrow 0$ je čtvercová teselace.

Vybrané vlastnosti prostorových teselací jsou uvedeny v Tab. 1, pokud neudáno jinak, jedná se o hodnoty teoretické [21, 22, 24]. Pro srovnání jsou uvedeny i známé teoretické hodnoty pro nekonvexní JMT. U Booksteinova modelu jsou šipkami naznačeny limitní případy kubické mřížky $\tilde{\sigma} \rightarrow 0$ (hodnoty uvedené při nespojitosti zprava odpovídají $\tilde{\sigma} = 0.005$) a PVT při $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$. Podobně šipky u teselací shlukových polí znázorňují limitní případ $c \rightarrow \infty$, zatímco číselné hodnoty se vztahují k Matérnovým a sférickým shlukům s $N = 30$ při $c = 0.005$.

Tab. 1. Charakteristiky prostorových teselací:
 kubická (KUB), Booksteinův model na kubické mřížce (BMT),
 PVT, shluková pole (SPT) se sférickými (S) a Matérnovými (M) shluky,
 model Johnsona-Mehla (JMT).

| | KUB | BMT¶ | PVT | SPT(S – M)¶ | JMT |
|-----------------|-------|--------|----------|-------------------|--------|
| n_f | 6 | 16.1 → | 15.5355 | ← (15.92 – 15.09) | 13.28 |
| var n_f | 0 | 4.7 → | 11.12467 | ← (23.00 – 28.30) | 57.25‡ |
| var v | 0 | ← → | 0.1790 | ← (1.28 – 2.93) | 1.136 |
| $\mathbf{E}s$ | 6 | ← → | 5.8209 | ← (6.19 – 5.05) | 5.143 |
| var s | 0 | ← → | 2.1915 | ← (17.40 – 37.29) | |
| $\mathbf{E}p$ | 12 | 17.9 → | 17.4956 | ← (19.18 – 13.43) | 14.856 |
| var p | 0 | 2.6 → | 13.6179 | ← (70.32 – 177.4) | |
| $\mathbf{E}w$ | 1.5 | ← → | 1.4580 | ← (1.60 – 1.11) | 1.238 |
| var w | 0 | ← → | 0.030* | ← (0.276 – 0.940) | |
| $\mathbf{E}f_3$ | 0.566 | ← → | 0.579* | ← (0.319 – 0.336) | |
| $\mathbf{E}g_3$ | 0.724 | ← → | 0.728* | ← (0.566 – 0.547) | |

- *Lorz a Hahn [20] simulací (10^6 cel).
- ¶ Ponížil [26, 37] simulací (10^6 cel pro každou volbu parametrů).
 SPT: $\mathbf{E}N = 30$.
- ‡Møller [23] simulací (10 000 cel).

Charakteristiky konvexních teselací lze rozdělit do tří skupin:

a) *Rozměrové* - objem v , povrch s , obvod p , střední šířka w v 3D, plocha v' a obvod s' v 2D, délka v'' v 1D. Podle dimenze s -faset, ke kterým se vztahují, jsou homogenními funkcemi stupně $-s/d$ intenzity generujícího procesu λ . Jejich závislosti (a závislosti jejich momentů) na parametrech $c, \mathbf{E}N$ shlukových procesů jsou kvalitativně shodné (hodnoty korelačních koeficientů obvykle převyšují 0.9), obecně však nikoliv monotónní! Díky tomu citlivě odrážejí uspořádání dcer ve shluku i distribuci jejich počtu. S ohledem na jejich homogenitu jsou rozměrové charakteristiky vždy uváděny pro **jednotkovou** intenzitu λ generujícího procesu. Pokud teoretické hodnoty nejsou známy, byly stanoveny rozsáhlými simulacemi, typicky pro soubory obsahující $> 10^6$ cel (opakováním menších realizací s maximálně 10^3 celami pro omezení vychýlení). Zvláštním typem rozměrových charakteristik jsou *globální* charakteristiky teselací (*intenzity měř*) $S_V = \lambda \mathbf{E}s/2$ (střední celková plocha hranic v jednotce objemu), $L_V = \lambda \mathbf{E}p/3$ (střední celková délka hran v jednotce objemu) atd. Jejich výhodou je platnost jednoduchých stereologických vztahů mezi nimi a analogickými veličinami teselací indukovaných obecně d -dimenzionální teselací v jejich průnicích s lineárními podprostory dimenze $d' < d$: např. $S_V = \frac{4}{\pi} L_A$, kde $L_A = \lambda' \mathbf{E}s'/2$ je střední celková délka hran na jednotkové ploše roviny řezu (např. roviny výbrusu) [46]. Stereologie teselací je podrobně diskutována v [38].

b) *Tvarové* - na intenzitě jsou nezávislé. Jsou to především počty vrcholů, hran, ..., stěn; vzhledem k jejich vzájemné závislosti se u 3D regulárních normálních teselací určuje resp. tabeluje pouze počet stěn n_f ; platí totiž že počet vrcholů $n_v = 2(n_f - 2)$ a počet hran $n_e = 3(n_f - 2)$. Další charakteristiky jsou dihedrální úhly, a to náhodný dihedrální úhel θ (v každé cele zvolíme rovnoměrně náhodně jeden) a průměrný dihedrální úhel cely Θ (jinými slovy je θ dihedrální úhel v typické hraně typické cely a Θ je průměrný dihedrální úhel typické cely). Střední hodnoty $\mathbf{E}\theta$, $\mathbf{E}\Theta$ jsou velmi blízké hodnotě $2\pi/3$, jejich distribuce jsou však zcela rozdílné. Konečně do této skupiny patří „izoperimetrické“ tvarové faktory

$$(13) \quad 3D: \quad f = \frac{6v}{\pi w^3}, \quad g = 6\sqrt{\pi} \frac{v}{s^{3/2}} \quad 2D: \quad f' = \frac{4\pi v'}{s'}.$$

Tvarové faktory dosahují maximální hodnoty 1 pro kouli resp. kruh a klesají k nule pro tenké desky i dlouhé tyčinky. U shlukových teselací mají podobné hodnoty při shlucích obou typů a jsou výrazně nižší než u PVT. Ve všech případech jsou známy pouze ze simulací.

c) *Charakteristiky sousedství, podmíněné střední hodnoty a_j* - sem patří zejména střední hodnoty typu $\mathbf{E}(\bullet|n_f = N)$, pravděpodobnosti $\mathbf{P}(n_f = N)$ atd. Velká pozornost byla věnována dvěma původně empirickým relacím přibližně ověřeným pro přirozené rovinné teselace, totiž Lewisovu zákonu, jehož 3D verze je $\mathbf{E}(v|n_f = N) \propto N$, a Aboavovu (Aboavovu-Weaireovu)

zákonu $m_N \propto 1/N$, kde m_N je střední počet stěn (hran v 2D) polytopů sousedících s polytopem majícím N stěn (hran) [24]. První „zákon“ podle výsledků simulací neplatí (dokonce ani pro Poissonovu-Voronoiovu mozaiku) [39] a „úspěšné“ pokusy o jeho obecný důkaz vesměs obsahují nějaký skrytý a neodůvodnitelný předpoklad. Ještě hůře platí analogické vztahy pro ostatní rozměrové charakteristiky, např. Deschův zákon $\mathbf{E}(s|n_f = N) \propto N$. Lewisův zákon, vyjadřující poznatek, že čím má cela větší počet stěn, tím nižší počet stěn mají v průměru její sousedé, však pro normální teselace lze dokázat [7, 8].

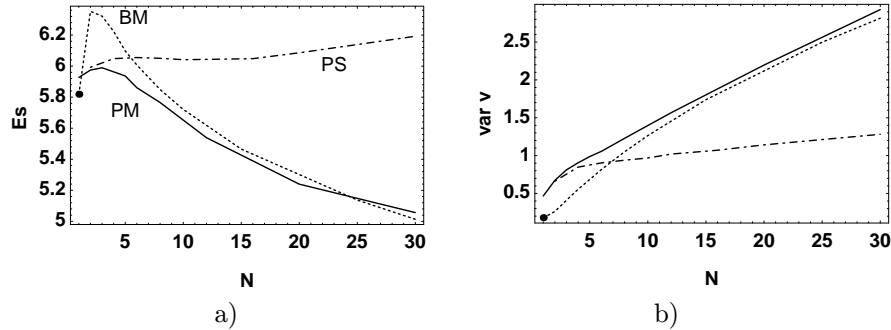
Vliv prostorového rozmístění dcer a jejich počtu. Dva mezní případy jsou zřejmě globulární Matérnovy shluky a shluky sférické. První z nich jsou zřejmě menší: na př. $\mathbf{E}v_3(\text{conv } Z_M)/\mathbf{E}v_3(\text{conv } Z_S) \approx 0.45$ pro $4 \leq N \leq 10$ (viz [40] podle [1]). Podstatnější je však rozdíl mezi celami, které vytvářejí. Jestliže c je velmi malé, každá cela teselace vytvořené rodiči je vlivem dcer náhodně rozdělena na N částí a její původní hranice se téměř nezmění. Cely dcer ze sférických shluků mají při libovolném větším N jehlanovitý tvar (v simulaci jsou jehlany nepatrně komolé díky výše zmíněnému náhodnému posunutí dcer, které zajišťuje normálnost teselace) a každá dcera má alespoň jednoho souseda, který nepatří do jejího shluku - odtud termín *vnější* cely. Jejich střední objem klademe opět $\mathbf{E}v = 1$ a variance jejich rozměrových vlastností není o mnoho větší než u PBP.

Zcela jiná situace může vzniknout počínaje $N = 5$ u shluků globulárních. Kromě vnějších cel se sousedy z jiných shluků může vzniknou i velmi malá cela (při $N = 5$ čtyřstěn), jejíž všechny sousedy generují body stejného shluku - *sestry*. S rostoucím N relativní počet těchto *vnitřních* cel roste (roste i počet jejich stěn) a např. při $\mathbf{E}N = 30$ jich je kolem 40% - Obr. 5b. Jejich průměrný objem bude řádově roven jedné N -tině objemu koule v níž byl shluk vytvořen, tj. $\pi \times (0.554c)^3 / (6\lambda_p N)$ (tj. $\approx 10^{-8} \mathbf{E}v$ pro $c = 0.005$). To znamená, že je v teselaci vytvořené Matérnovými shluky je soubor cel při $N \geq 5$ směsí dvou rozměrově značně rozdílných populací. Při velkých hodnotách N se vlastnosti populace vnitřních cel budou blížit vlastnostem PVT (např. počet jejich stěn poroste [37, 39]) a rozměry vnějších cel se budou zvětšovat s poklesem jejich relativního počtu.

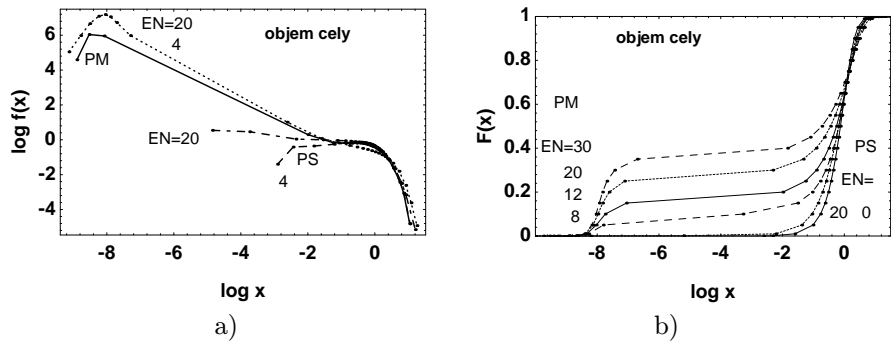
Pro vysoký počet dcer ve shluku malých rozměrů platí podle Tab. 1 pro všechny rozměrové veličiny nerovnosti $\mathbf{E}_M(\bullet) < \mathbf{E}_{\text{PVT}}(\bullet) < \mathbf{E}_S(\bullet)$, $\text{var}_{\text{PVT}}(\bullet) < \text{var}_S(\bullet) < \text{var}_M(\bullet)$. Celá (pro střední hodnoty u BM a PM shluků nemonotónní) závislost těchto charakteristik je ukázána v Obr. 4.

Obr. 5. demonstuje přítomnost vnitřních cel u globulárních shluků a umožňuje odhad jejich relativního zastoupení. Zároveň potvrzuje správnost výše uvedeného odhadu velikosti jejich objemu. Konečně také prokazuje malou změnu v populaci vnějších cel patrnou z malé rozdílnosti distribucí jejich objemů při $\mathbf{E}N = 2$ a 20.

Tvarové vlastnosti jsou podrobně rozebrány v práci [39]. Za zmínku zde stojí alespoň existence výrazného sekundárního modu blízkého hodnotě π v rozdělení dihedrálního úhlu θ . Jeho příčinou jsou zlomy ve stěnách původní rodičovské cely v místě jejich průsečnice se stěnou oddělující dvě vnější cely generované blízkými dcerami. Bimodální jsou i rozdělení tvarového faktoru f a počtu stěn.



Obr. 4. Průměrný povrch cely E_s (a) a variance objemu cely $\text{var } v$ (b) pro Matérnovy shluky s pevným N (binomické – BM) a pro sférické a Matérnovy shluky s náhodným N (poissonovské – SP, MP). • odpovídá PVT.



Obr. 5. F.h.p. (a) a distribuční funkce (b) objemů cel v teselacích generovaných Matérnovými (MP) a sférickými (SP) shluky s různými hodnotami EN .

Vliv rozměru shluku. S rostoucí velikostí shluků opět dochází k jejich rozpouštění a mísení a pro vymezení oblastí, v nichž k těmto jevům dochází, lze použít odhadů provedených při sledování změn v distribucích sférických kontaktních vzdáleností. Průběhy závislosti variancí rozměrových vlastností na velikosti shluku jsou velmi podobné Obr. 3, analogické závislosti lichých momentů však opět zhusta nejsou monotónní [37].

Aplikace. Použití uvedených výsledků je velmi široké; zde se omezíme na problematiku zkoumání hmotných struktur - materiálů či živých tkání. Ze zákonitostí vzdáleností ve shlukových polí plyne, že maximálních vzdáleností

sousedů a minimálních vzdáleností kontaktních lze dosáhnout při co nejpravdělnějším resp. dokonce mřížkovém uspořádání. Jestliže tedy bodový systém odpovídá rozmístění zpevňujících prvků v materiálové struktuře, je jakékoliv shlukování nevýhodné, protože zhusta nákladná příměs je rozptýlena neefektivně. Jestliže naopak bodový systém znázorňuje polohy zárodků porušení (nečistoty, technologické defekty, kondenzační centra vakancí), je shlukování jevem pozitivním. Odtud plyne význam statistického posouzení prostorového rozmístění center procesů v materiálech. V řadě případů je postačující pouze přijetí či zamítnutí *nulové hypotézy*: sledovaný bodový systém je výřez z PBP, příp. určení směru odchylky při jejím zamítnutí.

Sledovaná centra jsou obvykle zviditelněna transmisí elektronovou mikroskopií, takže pozorovány a hodnoceny jsou projekce tenkých vrstev. Projekci tenké vrstvy tloušťky t s 3D PBP intenzity λ je rovinný PBP intenzity λt a rovněž shluky jsou projekcí reprodukovány, lze získat hodnocením mikrosnímků přímo údaje o prostorovém rozmístění center. Pokud bodový systém reprezentuje referenční body částic nezanedbatelných rozměrů, je nutno zavést korekce na překrývání částic a jejich porušení rovinami řezu vymežujícími tenkou vrstvou.

Nejjednodušším postupem je odhad variance Voronoiovy teselace bodovým systémem generované. Počet hodnocených cel může být řadově pouze kolem stovky, pokud se jedna o systém se shluky (v Tab. 1 jsou uvedeny hodnoty pro 3D teselace, k dispozici jsou však i údaje pro teselace dvourozměrné a i zde jsou rozdíly ve variancích PVT a teselací generovaných 2D shlukovými poli značné [35]). Příkladem takového hodnocení je práce [5] sledující rovnoměrnost prostorového rozmístění disperzní fáze v hliníkové slitině; závěry získané z odhadů variancí jsou v ní doplněny odhady vyšších momentů. Počítačově řízená konfokální mikroskopie, aplikovatelná na podstatně silnější vrstvy průhledných biologických materiálů, umožňuje určení prostorových souřadnic sledovaných center či jejich referenčních bodů. Pak lze počítačově zkonstruovat a následně hodnotit přímo prostorovou teselaci jimi generovanou. Posouzení systémů uspořádanějších než je PBP je podstatně méně spolehlivé díky tomu, že rozpětí variancí mezi pravidelnými mřížkovými teselacemi (s nulovou variancí rozměrových charakteristik) a PVT je poměrně malé. Je proto třeba přibrat k objemům (plochám) cel i další vlastnosti (např. počty jejich vrcholů aj.).

Podstatně častější je ovšem hodnocení *přirozeně* vzniklých prostorových teselací v neprůhledných materiálech, opírající se o teselace indukované v rovinách metalografických výbrusů či na testovacích přímkách. Především se jedná o odhady tzv. velikosti zrna polykrystalických materiálů, což by měla být intenzita zkoumané teselace λ či ekvivalentně střední objem jejího zrna **Ev**. Místo prostorové teselace lze ovšem v tomto případě sledovat pouze teselaci indukovanou v rovině výbrusu. Nulovou hypotézou je opět předpoklad,

že tato teselace je výběr z teselace indukované PVT (ta sice není teselací Voronoiovou [9], její vlastnosti však lze teoreticky odvodit [21, 24]). Srovnání odhadu variancí $\text{var } v'$ plochy profilů zrn a cel indukovaných 3D PVT je opět patrně nejspolehlivější [14, 19, 41], zejména u struktur shlukových (stovkové výběry opět zajišťují rozumnou spolehlivost). Navíc lze na základě znalosti $\text{CV}(v')$ získat poměrně spolehlivý přibližný ($\pm 30\%$) odhad $\mathbf{E}v$ [11, 13, 38].

5. ZÁVĚR

Polyedrální a polygonální metody jsou patrně nejspolehlivějším způsobem analýzy mapovaných bodových systémů, pro přirozené teselace ani jiné metody nepřipadají v úvahu. Přes mimořádnou praktickou důležitost je však zatím jejich uplatnění v praxi mizivé. Proto dva zábavné příklady na závěr.

Přejímky materiálů (zejména ocelí) se běžně provádějí s pomocí empirických obrazových stupnic vytvořených různými organizacemi a začleněnými do státních norem. Velikost zrna se určí vizuálním porovnáním výbrusu materiálu pozorovaného při určitém zvětšení s očíslovanými obrazovými standardy a najde se ten, který nejlépe odpovídá - velikost zrna je pak číslo onoho nejbližšího standardu. Jednou z nejrozšířenějších stupnic je norma American Society for Testing and Materials [2]. Horálek v práci [16] ukázal, že celou tuto stupnici lze chápat jako řez jediným speciálním případem nehomogenní Johnsonovy-Mehlovy teselace s pevně zvolenou intenzitou nukleace ($\approx t^{-1}$, kde t je čas. To znamená, že jediné, co se mění je pouze měřítko, zatímco typ teselace zůstává stále stejný. Je opravdu Příroda tak jednoduchá nebo umíme vymýšlet tak univerzální modely teselací?

U neželezných materiálů je rozšířená tzv. lineární průsečiková metoda. Velikost zrna se charakterizuje počtem profilů zrn na výbruse protnutých (jednotkovou) testovací úsečkou, tedy intenzitou $\lambda'' = 1/\mathbf{E}v''$ nebo přímo odhadem střední délky tětiny $[\mathbf{E}v'']$. Podle stereologických zákonů [46] je však $2\lambda''$ poměrovým estimátorem výše zavedené veličiny S_V , tj. středního plošného obsahu hranic cel teselace. Díky izoperimetrické nerovnosti víme, že pro daný objem cely je její povrch omezen pouze zdola, takže lineární průsečikovou metodou odhadnutá charakteristika S_V může nabýt libovolně velké hodnoty aniž se změní intenzita teselace - tedy veličina, kterou se ve skutečnosti pokoušíme odhadnout.

LITERATURA

- [1] Affentranger, F.: *Expected volume of a random polytope in a ball*. J. Microsc. 1988; 151: 277-87.
- [2] ASTM E 112-82: *Standard Methods for Determining Average Grain Size* (1982).
- [3] Baddeley, A., Gill, R.D.: *Kaplan-Meier estimators of interpoint distance distributions for spatial point processes*. Res Rep BS-R9315, Amsterdam: CWI, 1993.

- [4] Bedford, T., van den Berg, J.: *A remark on the van Lieshout and Baddeley J-function for point processes*. Adv. Appl. Prob. 1997; 29: 19-25.
- [5] Besterci, M., Kohútek, I., Sülleiová, K., Saxl, I.: *Analýza prostorového rozmístění částic v tenké fólii kompozitu na bázi Al*. Kovové materiály 1995; 33: 251-268.
- [6] Buckland, S.T., Anderson D.R., Burnham, K.P., Laabe, J.A.: *Distance Sampling*. Chapman & Hall, London 1993.
- [7] Chiu, S.N.: *Aboav-Weaire's and Lewis' law - A Review*. Materials Characterization 1994; 34: 149-165.
- [8] Chiu, S.N.: *Mean value formulae for the neighbourhood of the typical cell of a random tessellation*. Adv. Appl. Prob. 1994 26, 565-576.
- [9] Chiu, S.N., Van de Weygaert, R., Stoyan, D.: *The sectional Poisson-Voronoi tessellation is not a Voronoi tessellation*. Adv. Appl. Prob. 1996; 28: 356-376.
- [10] Chiu, S.N., Stoyan, D.: *Estimation of distance distributions for spatial patterns*. 1995 (unpublished - see [43]).
- [11] Chrapoński, J., Maliński, M.: *Estimation of grain size I, II, III*. in: Wojnar, L., Roźniatowski, K., Kurzydowski, K.J. (eds.), Proc. Int. Conf. on The Quantitative Description of Materials Microstructure, Warsaw 1997, 215, 223, 229.
- [12] Cressie, N.: *Statistics for Spatial Data*. J. Wiley & Sons, New York 1991.
- [13] Cwajna, J., Chrapoński, J., Maliński, M.: *Application of 3D models on materials microstructure in stereology*. in: Wojnar, L., Roźniatowski, K., Kurzydowski, K.J. (eds.), Proc. Int. Conf. on The Quantitative Description of Materials Microstructure, Warsaw 1997, 27.
- [14] Hahn, U., Lorz, U.: *Stereological analysis of the spatial Poisson-Voronoi tessellation*. J. Microsc. 1994; 175: 176-185.
- [15] Hansen, M.B., Gill, R.D., Baddeley, A.: *Some regularity properties for first contact distributions*. Preprint nr 889, Dept of Mathematics. Utrecht: University Utrecht, 1994.
- [16] Horálek, V.: *ASTM grain-size model and related random tessellation models*. Materials Characterization 1990; 25: 263-284.
- [17] Last, G., Holtmann, M.: *On the empty-space function of some germ-grain models*. (to be published).
- [18] Last, G., Schassberger, R.: *On the distribution of the spherical contact vector of stationary germ-grain models*. Adv. Appl. Prob. 1998; 30: 36-52.
- [19] Lorz, U.: *Cell-area distributions of planar sections of spatial Voronoi mosaics*. Materials Characterization 1990; 25: 297-311.
- [20] Lorz, U., Hahn, U.: *Geometric characteristics of random spatial Voronoi tessellations and planar sections*. Preprint 93-05. Freiberg: Bergakademie Freiberg, 1993.
- [21] Møller, J.: *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Lecture Notes in Statistics 87. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1994.
- [22] Møller, J.: *Random Johnson-Mehl tessellations*. Adv. Appl. Prob. 1992; 24: 814-844.
- [23] Møller, J.: *Generation of Johnson-Mehl crystals and comparative analysis of models for random nucleation*. Adv. Appl. Prob. 1995; 27: 367-383.
- [24] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K.: *Spatial Tessellations*. Chichester: J. Wiley & Sons, 1992.
- [25] Pelikán, K., Ponižil, P., Saxl, I.: *Germ-grain model of short-fibre composites*. Acta Stereol. 1995; 14: 75-82.

- [26] Ponížil, P., Saxl, I.: *Booksteinův model na kubické mřížce a Voronoiova teselace jím generovaná*. Proc. Conf. Progress in Physical metallurgy 1996 (in Czech), VUT Brno, September 1996, 47. (1993), 221.
- [27] Rataj, J.: *Random distances and edge correction*. Statistics 1993; 24, 377-385.
- [28] Rataj, J., Saxl, I.: *Boolean cluster models: mean cluster dilations and spherical contact distances*. Math. Bohem. 1997; 122: 21-36.
- [29] Reed, M.G., Howard, C.V.: *Edge-corrected estimators of the nearest-neighbour distance distribution function for three-dimensional point patterns*. J. Microsc. 1997; 186: 177-184.
- [30] Ripley, B.D.: *Spatial statistics*. J. Wiley & Sons, New York 1981.
- [31] Santaló, L.A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.), 1976.
- [32] Saxl, I.: *Spherical contact distances in Neyman-Scott process of regular clusters*. Acta Stereol 1993; 12: 115-22.
- [33] Saxl, I.: *Charakteristiky Booksteinova modelu na kubické mřížce softwarem Mathematica*. Sborník semináře "Programy a algoritmy numerické matematiky. Janov n.N. 10.6.-14.6. 1996, Matematický ústav AV ČR, Praha 1996, 177-183.
- [34] Saxl, I., Kohútek, I.: *Voronoi tessellations generated by Boolean cluster fields*. In: Wojnar L, Roźniatowski K, Kurzydowski K(eds.): Proc Int Conf on The Quantitative Description of Materials Microstructure. Warsaw , April 1997, 481-488.
- [35] Saxl, I., Kohútek, I., Besterčí, M.: *Particle cluster analysis in heterogeneous systems*. Proc. Int. Conf. Deformation and Fracture in Structural PM Materials, Stará Lesná, October 1996, 221-230.
- [36] Saxl, I., Pelikán, K., Rataj, J., Besterčí, M.: *Quantification and Modelling of Heterogeneous Systems*. Cambridge Int. Science Publishing, Cambridge 1995.
- [37] Saxl, I., Ponížil, P.: *3D Voronoi tessellations of cluster fields*. Acta Stereol. (in press).
- [38] Saxl, I., Ponížil, P. *Estimation of properties of polycrystalline grain structure*. in: L. Parilák: Fractography 97. Proc. Int. Conf., Vysoké Tatry, 26-29. 10. 1997. ÚMV SAV Košice 1997, 132-144.
- [39] Saxl, I., Ponížil, P.: *Shape properties of Voronoi polytops*. Proc. of Internat. Conf. "Prague Stochastics'98" (in press).
- [40] Saxl, I., Rataj, J.: *Spherical contact and nearest neighbour distances in Boolean cluster fields*. Acta Stereol. 1996; 15: 91-96.
- [41] Schwertel, J., Stamm, H.: *Analysis and modelling of tessellations by means of image analysis method*. J. Microsc. 186 (1997), 198-209.
- [42] Stoyan, D.: *Statistical estimation of model parameters of planar Neyman-Scott cluster process*. Metrika 1992; 39: 67-74.
- [43] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J.: *Stochastic Geometry and its Applications*. New York: J. Wiley & Sons, 1995.
- [44] Stoyan, D., Stoyan, H.: *Fraktale, Formen, Punktfelder*. Berlin: Akademie Verlag, 1992.
- [45] Upton, G.J.G., Fingleton, B.: *Spatial Data Analysis by Example*. Vol. I. J. Wiley & Sons, New York, 1985.
- [46] Underwood, E.E.: *Quantitative Stereology*. Addison Wesley Publ. Comp., Reading, 1970.