

POZNÁMKA K VÝPOČTU BAYESOVSKÉHO RIZIKA

Aleš LINKA

TU Liberec, KPDM

Abstrakt. V této práci porovnáme dva bayesovské odhady funkce spolehlivosti v exponenciálním rozdělení z pohledu bayesovského rizika vypočteného vzhledem k apriornímu gamma rozdělení $\Gamma(a, p)$ v situaci, kdy jsme v případě jednoho z odhadů nepřesně určili hodnoty parametrů apriorního rozdělení. Jako nástroj pro porovnání odhadů použijeme asymptotickou deficienci stanovenou na základě asymptotických rozvojų pro bayesovské riziko uvažovaných odhadů.

Abstract: In this paper we are interested in two Bayes estimators of reliability function in exponential distribution which have different a priori parameters. The asymptotic expansions of Bayes risk, computed with respect to the a priori distribution of gamma-type, are derived. For detailed comparison we use limit risk deficiency according to Lehmann (1983).

Резюме: В этой статье мы занимаемся сравнением двух байесовских оценок функции надёжности в экспоненциальном распределении по виду байесовского риска исчисленного взглядом к априорному гамма-распределению. Байесовские оценки отличаются выбором априорных параметров. Для сравнения мы используем асимптотическую дефициенцию по Леману (1983).

1. ÚVOD

Uvažujme klasickou situaci, kdy výsledkem experimentu je úplný náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ z *exponenciálního rozdělení* s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (1)$$

kde $\theta \in (0, \infty)$ je neznámý parametr. Nechť c je kladné číslo. Jestliže X je náhodná veličina s hustotou (1), pak odpovídající *funkce spolehlivosti* má tvar

$$R(c) = R(c, \theta) = P(X > c) = \exp\{-c/\theta\}. \quad (2)$$

Dále předpokládejme, že *ztrátová funkce* má tvar $L(R(c), \widehat{R}) = [R(c) - \widehat{R}]^2$, kde $R(c)$ označuje neznámou spolehlivost a \widehat{R} její odhad. *Riziko* příslušné odhadu \widehat{R} , je-li skutečná hodnota spolehlivosti $R(c)$, definujeme vztahem

$$r(R(c), \widehat{R}) = E_{\theta} L(R(c), \widehat{R}). \quad (3)$$

V tomto článku budeme uvažovat bayesovský odhad spolehlivosti a studovat jeho vlastnosti. Předpokládejme proto, že parametr $\lambda = \theta^{-1}$ je náhodná veličina s apriorní hustotou

$$q(\lambda; p, a) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} \lambda^{p-1} e^{-a\lambda}, & \lambda > 0, a > 0, p > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4)$$

Bayesovský odhad $R(c)$ dostaneme jako střední hodnotu $e^{-\lambda c}$ vzhledem k aposteriornímu rozdělení, což vede na odhad

$$\widehat{R}_{30} \equiv \widehat{R}_{30}(c) = \left(\frac{nT_n + a}{nT_n + a + c} \right)^{n+p}. \quad (5)$$

Poznamenejme, že označení prvního indexu bylo zvoleno v souladu s označením bayesovského odhadu v práci Hurt (1976) a v práci Antoch, Brzezina a Linka (1996), druhým indexem budeme rozlišovat různé bayesovské odhady.

Bayesovské riziko odhadu \widehat{R} je definováno jako střední hodnota rizika r vzhledem k apriornímu rozdělení q , v našem případě definovaném hustotou (4), tj.

$$\varrho(q; \widehat{R}) = E_q r(R(c), \widehat{R}) = \int_{\Theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(R(c), \widehat{R}) f(\mathbf{x}; \lambda) d\mathbf{x} q(\lambda; p, a) d\lambda, \quad (6)$$

kde $f(\mathbf{x}; \lambda)$ je sdružená hustota náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_n)'$.

2. ASYMPTOTICKÝ ROZVOJ BAYESOVSKÉHO RIZIKA

V tomto odstavci budeme studovat chování bayesovského odhadu vzhledem k bayesovskému riziku. Pro dva různé bayesovské odhady určíme asymptotické rozvoje pro jejich bayesovská rizika vzhledem ke kvadratické ztrátové funkci L a apriorní hustotě (4). Oba odhady potom porovnáme pomocí asymptotické deficience.

Uvažujme nejprve situaci, kdy hledáme asymptotický rozvoj pro bayesovské riziko bayesovského odhadu \widehat{R}_{30} , přičemž toto bayesovské riziko počítáme

vzhledem k apriornímu rozdělení definovanému hustotou

(4). Je-li X_1, \dots, X_n náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou

(1) a $\lambda = \theta^{-1}$, potom náhodná veličina

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

má hustotu

$$h(t; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n n^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda n t}, & t > 0, \lambda > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (7)$$

Ze známých vlastností gamma rozdělení a zřejmých úpravách pro bayesovské riziko odhadu \widehat{R}_{30} dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho(q; \widehat{R}_{30}) &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(\frac{nt+a}{nt+a+c} \right)^{n+p} - \exp\{-c\lambda\} \right]^2 h(t; \lambda) q(\lambda; p, a) d\lambda dt = \\ &= \left(\frac{a}{a+2c} \right)^p - \frac{a^p \Gamma(n+p)}{n^p \Gamma(n) \Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1} \left(1 + \frac{ax}{n}\right)^{n+p}}{\left(1 + \frac{(a+c)x}{n}\right)^{2(n+p)}} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Konstrukce asymptotického rozvoje pro bayesovské riziko odhadu \widehat{R}_{30} funkce spolehlivosti využívá Taylorovu a Lebesquovu větu. Protože integrandy vystupující v integrálních vyjádřeních pro bayesovská rizika, jako funkce v $1/n$, nejsou definovány v nule, tzn. v bodě, ve kterém provádíme konstrukci odhadu, je nutné odvodit modifikaci Taylorovy věty pro funkce spojitě dodefinovatelné v tomto bodě. Po nalezení rozvoje integrandu aplikujeme Lebesquovu větu. Jedná se o postup technicky náročný a je nezbytné dokázat řadu dílčích tvrzení. Výsledek je uveden v následující větě.

Věta 1. *Nechť apriorní hustota q je definována vztahem (4), nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p, a, c \in (0, \infty)$. Položme*

$$\varrho_1(q; \widehat{R}_{30}) = \frac{a^p c^2 (p+1)p}{(a+2c)^{p+2}}, \quad (9)$$

$$\varrho_2(q; \widehat{R}_{30}) = \frac{a^p c^2 p (1+p) (-2a^2 + 2c^2 - 2a^2 p - 5c^2 p - 4acp - c^2 p^2)}{2(a+2c)^{p+4}}. \quad (10)$$

Potom pro asymptotický rozvoj bayesovského rizika odhadu \widehat{R}_{30} platí

$$\varrho(q; \widehat{R}_{30}) = \frac{\varrho_1(q; \widehat{R}_{30})}{n} + \frac{\varrho_2(q; \widehat{R}_{30})}{n^2} + O_{p,a,c}(n^{-3}), \text{ pro } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Důkaz. Podrobný důkaz viz Antoch, Brzezina a Linka (1996). \square

Předpokládejme nyní, že parametr λ je náhodná veličina s apriorní hustotou (4) s parametry p_1 a a_1 . Potom příslušný bayesovský odhad funkce spolehlivosti $R(c)$ má tvar

$$\widehat{R}_{31} \equiv \widehat{R}_{31}(c) = \left(\frac{nT_n + a_1}{nT_n + a_1 + c} \right)^{n+p_1}. \quad (12)$$

To odpovídá situaci, kdy jsme nepřesně určili apriorní parametry. Jako apriorní parametry parametry jsme zvolili p_1, a_1 , ale správně jsme měli použít p, a . Nyní vypočteme asymptotický rozvoj bayesovského rizika odhadu \widehat{R}_{31} vzhledem ke kvadratické ztrátové funkci L a apriorní hustotě (4). Po krátkém výpočtu pro riziko odhadu \widehat{R}_{31} dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho(q; \widehat{R}_{31}) &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(\frac{nt + a_1}{nt + a_1 + c} \right)^{n+p_1} - \exp\{-c\lambda\} \right]^2 h(t; \lambda) q(\lambda; p, a) d\lambda dt = \\ &= \left(\frac{a}{a+2c} \right)^p + \frac{a^p \Gamma(n+p)}{n^p \Gamma(n) \Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1} \left(1 + \frac{a_1 x}{n}\right)^{n+p_1}}{\left(1 + \frac{(a_1+c)x}{n}\right)^{2(n+p_1)}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\left(1 + \frac{a_1 x}{n}\right)^{n+p_1}}{\left(1 + \frac{ax}{n}\right)^{(n+p)}} - 2 \frac{\left(1 + \frac{(a_1+c)x}{n}\right)^{n+p_1}}{\left(1 + \frac{(a+c)x}{n}\right)^{(n+p)}} \right] dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Pro odvození asymptotického rozvoje použijeme podobného postupu jako jsme použili pro odhad \widehat{R}_{30} . Dostaneme následující tvrzení.

Věta 2 *Nechť apriorní hustota q je definována vztahem (4), nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p, a, c \in (0, \infty)$. Položme*

$$\varrho_1(q; \widehat{R}_{31}) = \frac{a^p c^2 (p+1)p}{(a+2c)^{p+2}},$$

$$\varrho_2(q; \widehat{R}_{31}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (12a^2 + 6a^4 - 12a_1^2 - 12a^2a_1^2 + 6a_1^4 + 48ac + 48a^3c - 48a_1c - \\
&\quad - 48a^2a_1c - 48aa_1^2c + 48a_1^3c + 88a^2c^2 - 192aa_1c^2 + 96a_1^2c^2 + \\
&\quad + 8c^4 + 10a^2p + 5a^4p - 10a_1^2p - 10a^2a_1^2p + 5a_1^4p + 40acp + \\
&\quad + 40a^3cp - 40a_1cp - 40a^3cp - 40a_1cp - 40a^2a_1cp - 40aa_1^2cp + \\
&\quad + 40a_1^3cp + 40a^2c^2p - 128aa_1c^2p + 80a_1^2c^2p - 80ac^3p + 64a_1c^3p - \\
&\quad - 20c^4p + 2a^2p^2 + a^4p^2 - 2a_1^2p^2 - 2a^2a_1^2p^2 + a_1^4p^2 + 8acp^2 + \\
&\quad + 8a^3cp^2 - 8a_1cp^2 - 8a^2a_1cp^2 - 8aa_1^2cp^2 + 8a_1^3cp^2 + 8a^2c^2p^2 - \\
&\quad - 16aa_1c^2p^2 + 16a_1^2c^2p^2 + 32a_1c^3p^2 + 28c^4p^2 + 32a^2c^2p_1 - \\
&\quad - 32aa_1c^2p_1 + 64ac^3p_1 - 64a_1c^3p_1 - 16aa_1c^2pp_1 - 32ac^3pp_1 - \\
&\quad - 32a_1c^3pp_1 - 64c^4pp_1 + 8a^2c^2p_1^2 + 8a^2c^2p_1^2 + 32ac^3p_1^2 + \\
&\quad + 32c^4p_1^2) a^p(a+2c)^{-4-p}p(1+p). \tag{14}
\end{aligned}$$

Potom asymptotický rozvoj bayesovského rizika odhadu \widehat{R}_{31} je dán vztahem

$$\varrho(q; \widehat{R}_{31}) = \frac{\varrho_1(q; \widehat{R}_{31})}{n} + \frac{\varrho_2(q; \widehat{R}_{31})}{n^2} + O_{p,a,c}(n^{-3}), \text{ pro } n \rightarrow \infty. \tag{15}$$

Důkaz. Detailní odvození viz Linka (1996). □

3. VÝPOČET ASYMPTOTICKÉ DEFICIENCE

Vzhledem k tomu, že odhady \widehat{R}_{30} a \widehat{R}_{31} jsou tzv. asymptoticky silně eficientní vzhledem k střední kvadratické odchylce, asymptotické rozvoje bayesovského rizika pro odhady \widehat{R}_{30} a \widehat{R}_{31} mají tvar

$$\varrho(q, \widehat{R}_{3i}) = \frac{a^*}{n} + \frac{b_{3i}^*}{n^2} + o_{p,a,c}(n^{-2}), \quad i = 0, 1,$$

tj. koeficient u $1/n$ je pro oba odhady stejný.

Pro detailní porovnání odhadů \widehat{R}_{30} a \widehat{R}_{31} můžeme užít deficienci, blíže viz Lehmann (1983). Zhruba řečeno, deficiencie spočtená pro jistou pevnou dvojici odhadů bude v našem případě ukazovat o kolik více (nebo méně) pozorování vyžaduje odhad B , má-li mít stejné bayesovské riziko jako odhad A založený na výběru rozsahu n . V praxi se obvykle užívá asymptotická deficiencie pro $n \rightarrow \infty$. Jestliže označíme $\varrho_n(q, A)$ a $\varrho_n(q, B)$ bayesovská rizika odhadů A a B , a platí-li

$$\varrho_n(q, A) = \frac{a}{n^r} + \frac{b}{n^{r+1}} + o\left(n^{-(r+1)}\right) \tag{16}$$

a

$$\varrho_n(q, B) = \frac{a}{n^r} + \frac{c}{n^{r+1}} + o\left(n^{-(r+1)}\right), \quad (17)$$

pak asymptotická deficiencie odhadu B vzhľadom k odhadu A je definovaná vzťahom

$$d_\varrho^{BA} = \frac{c-b}{ar}. \quad (18)$$

Věta 3 *Nechť $p, a, c \in (0, \infty)$. Pro asymptotickou deficienci odhadů \hat{R}_{30} a \hat{R}_{31} vzhľadem k bayesovskému riziku platí*

$$\begin{aligned} d_\varrho^{\hat{R}_{31}\hat{R}_{30}}(p, a, p_1, a_1, c) = & \\ = & (-12a^2 - 6a^4 + 12a_1^2 + 12a^2a_1^2 - 6a_1^4 - 48ac - 48a^3c + 48a^2a_1c + \\ & + 48a_1c + 48aa_1^2c - 48a_1^3c - 96a^2c^2 + 192aa_1c^2 - 96a_1^2c^2 - 10a^2p - \\ & - 5a^4p + 10a_1^2p + 10a^2a_1^2p - 5a_1^4p - 40acp - 40a^3cp + 40a_1cp + \\ & + 40a^2a_1cp + 40aa_1^2cp - 40a_1^3cp - 48a^2c^2p + 128aa_1c^2p - \\ & - 80a_1^2c^2p + 64ac^3p - 64a_1c^3p - 2a^2p^2 - a^4p^2 + 2a_1^2p^2 + \\ & + 2a^2a_1^2p^2 - a_1^4p^2 - 8acp^2 - 8a^3cp^2 + 8a_1cp^2 + 8a^2a_1cp^2 + \\ & + 8aa_1^2cp^2 - 8a_1^3cp^2 - 8a^2c^2p^2 + 16aa_1c^2p^2 - 16a_1^2c^2p^2 - \\ & - 32a_1c^3p^2 - 32c^4p^2 - 32a^2c^2p_1 + 32aa_1c^2p_1 - 64ac^3p_1 + \\ & + 64a_1c^3p_1 + 16aa_1c^2pp_1 + 32ac^3pp_1 + 32a_1c^3pp_1 + 64c^4pp_1 \\ & - 8a^2c^2p_1^2 - 32ac^3p_1^2 - 32c^4p_1^2) 8^{-1} c^{-2} (a + 2c)^{-2} \end{aligned} \quad (19)$$

Důkaz. Výsledek dostaneme dosazením do vzorce (18) podle vět 1 a 2. \square

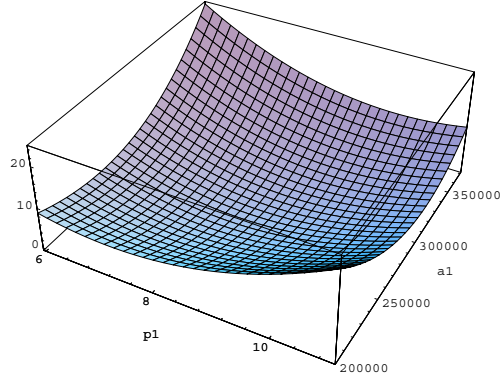
4. PŘÍKLAD

Příklad1. Bott a Hass (1978) uvádí doby do poruchy vstupních těsnících záklopných ventilů pro jaderné reaktory. Kombinací těchto historických dat a rostoucí úrovně zatížení byly stanoveny požadované hodnoty pro 5 % a 95 % kvantil apriorního rozdělení pro intenzitu poruch. Pro hodnotu 5 % kvantilu byla stanovena hodnota 1.4×10^{-5} (poruch za hodinu) a pro 95 % kvantil hodnota 4.9×10^{-5} .

V monografii Martz a Waller (1980) v kapitole 6 můžeme nalézt metodu, kterou tito autoři vypracovali, pro stanovení parametrů apriorního gamma rozdělení. Na základě tohoto postupu stanovíme apriorní rozdělení jako gamma rozdělení s hustotou (4) s parametry $a = 285\,714$ a $p = 8.5$.

Vzhledem k výše uvedenému rozdělení budeme uvažovat odhad \widehat{R}_{30} , který nám představuje odhad se správně zvolenými apriorními parametry. Nyní porovnáme odhad \widehat{R}_{30} s odhadem \widehat{R}_{31} , kdy jsme se netrefili přesně do apriorních parametrů. K porovnání použijeme asymptotickou deficienci (19).

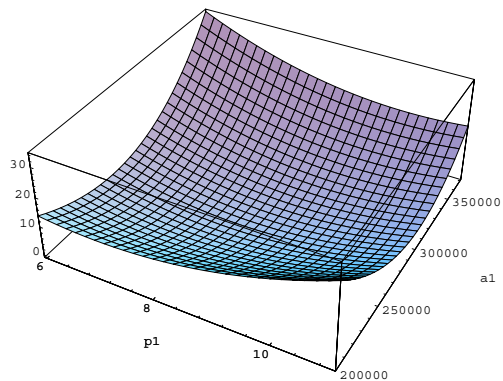
Na obrázcích 1–5 jsou znázorněny grafy deficience $d_{\varrho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(p, a, p_1, a_1, c)$ pro $a = 285\,714$, $p = 8.5$ a $c = 10\,000, 60\,000, 110\,000, 160\,000, 210\,000$. Pro tyto hodnoty c jsou rovněž uvedeny hodnoty deficience v krajních bodech intervalu $(0.7p, 1.3p) \times (0.7a, 1.3a)$. \square



Obr.1 $d_{\varrho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 210\,000)$

Tab.1 $d_{\varrho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 210\,000)$ pro vybrané hodnoty p_1 a a_1 .

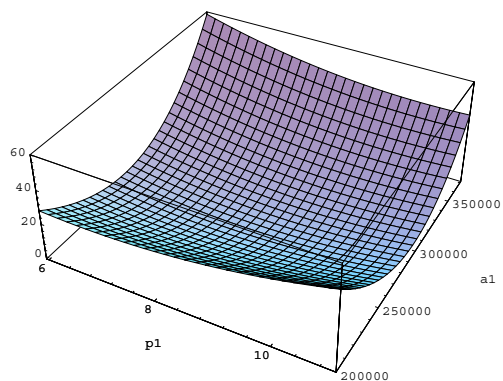
a_1	0.7 a	0.7 a	1.3 a	1.3 a
p_1	0.7 p	1.3 p	0.7 p	1.3 p
$d_{\varrho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}$	8.87	21.88	24.32	11.31



Obr.2 $d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 160\,000)$

Tab.2 $d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 160\,000)$ pro vybrané hodnoty p_1 a a_1

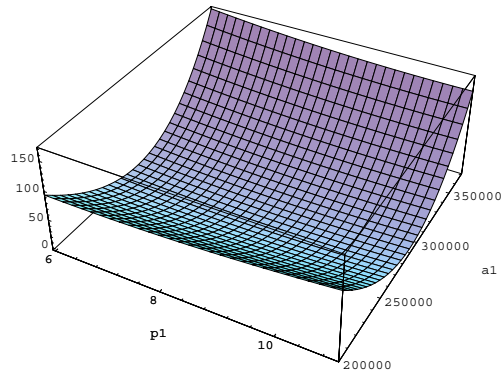
a_1	0.7 a	0.7 a	1.3 a	1.3 a
p_1	0.7 p	1.3 p	0.7 p	1.3 p
$d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}$	13.89	29.04	33.95	18.79



Obr.3 $d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 110\,000)$

Tab.3 $d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 110\,000)$ pro vybrané hodnoty p_1 a a_1 .

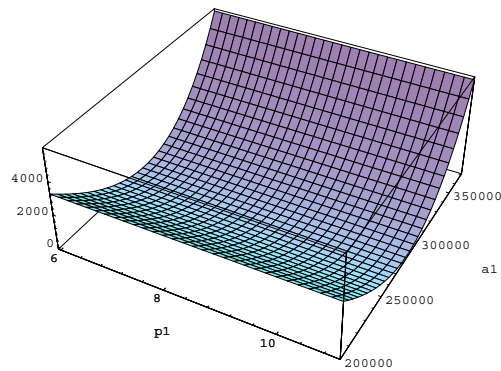
a_1	0.7 a	0.7 a	1.3 a	1.3 a
p_1	0.7 p	1.3 p	0.7 p	1.3 p
$d_q^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}$	28.13	46.29	58.71	40.56



Obr. 4 $d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 60\,000)$

Tab. 4 $d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 60\,000)$ pro vybrané hodnoty p_1 a a_1 .

a_1	0.7 a	0.7 a	1.3 a	1.3 a
p_1	0.7 p	1.3 p	0.7 p	1.3 p
$d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}$	93.75	116.37	168.44	145.81



Obr. 5 $d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 10\,000)$

Tab. 5 $d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}(8.5, 285\,714, p_1, a_1, 10\,000)$ pro vybrané hodnoty p_1 a a_1

a_1	0.7 a	0.7 a	1.3 a	1.3 a
p_1	0.7 p	1.3 p	0.7 p	1.3 p
$d_{\rho}^{\widehat{R}_{31}\widehat{R}_{30}}$	3270.71	3300.74	5788.65	5758.02

Z uvedených obrázků 1–5 vyplývá, že hlediska asymptotické deficiencie má bayesovský odhad \hat{R}_{31} funkce spolehlivosti $R(c)$, tj. odhad, kdy jsme netrefili apriorní parametry, mnohem horší chování s klesající hodnotou doby do poruchy c . V případě $c = 10000$ a přehodnotíme-li parametry o 30 % tato deficiencie činí dokonce 5758. Naopak pro velké hodnoty c se rozdíly odhadů \hat{R}_{30} a \hat{R}_{31} stírají.

LITERATURA

- [1] ANTOCH J., BRZEZINA M., LINKA A., *Asymptotic approximation of Bayes risk of estimators of reliability for exponentially distributed data*, Statistics & Decision, (1996), to appear.
- [2] BOTT T. F., HAAS P. M., *Initial Data Collection Efforts of CREDO : Sodium Value Failers*, NCSR R20, (1978), National Center of Systems Reliability.
- [3] HURT J., *On estimation of reliability in exponential case*, Aplikace matematiky **21** (1976), 263-272.
- [4] LINKA A. *Notice on Bayes estimators*, Technical Report N.7, Technical University of Liberec, (1996).
- [5] LEHMANN E. L., *Theory of Point Estimation*, John Wiley & Sons (1983), New York.
- [6] MARTZ H. F., WALLER R. A., *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons (1982), New York.