

Abstrakt

V článku je popsána statistická analýza nezáporných autoregresních modelů. Základní myšlenka je podrobně ukázána na procesu AR(1) a pak je celá metoda zobecněna na autoregrese vyšších řádů a na nelineární nezáporné autoregresní modely.

1. Úvod

Mezi nejčastěji používané modely časových řad patří autoregrese prvního řádu, stručně označovaná AR(1). Jde o posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ definovaných vztahem

$$(1.1) \quad X_t = bX_{t-1} + e_t,$$

kde $\{e_t\}$ je tzv. bílý šum. V celém tomto článku se bude předpokládat, že $\{e_t\}$ je dokonce striktní bílý šum - tedy posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Dále ještě přidáme předpoklad $E e_t^2 < \infty$, který se u autoregresí většinou činí. Model (1.1) mívá dvě varianty. V první z nich se pracuje s nějakou danou veličinou X_1 a pomocí vztahu (1.1) se pro $t = 2, 3, \dots$ vytvářejí veličiny X_2, X_3, \dots . Přitom zřejmě není nutné klást na parametr b žádné omezující podmínky. Druhá varianta se týká případu, kdy $-1 < b < 1$. Ukazuje se, že pak vzorcem (1.1) lze definovat veličiny X_t se všemi celočíselnými indexy, i zápornými.

Velké množství metod pro statistickou analýzu AR(1) je založeno na předpokladu, že všechny veličiny e_t mají normální rozdělení. Při vyšetřování asymptotických vlastností takových procedur lze zpravidla požadavek normality výrazně zeslabit. Je-li však k dispozici jen poměrně krátká časová řada X_1, \dots, X_n , pak odchylky od normálního rozdělení mívají za následek výrazné snížení efektivnosti statistických postupů.

V praxi se velice často setkáváme s nezápornými časovými řadami. Mohou to být průtoky řek, ekonomické časové řady i mnohé řady sledované v biologii. Přitom histogram získaný z takové řady leckdy jasně ukazuje, že o normalitě nemůže být ani řeči.

Letos (tj. v roce 1990) můžeme oslavit malé jubileum. Právě před 10 lety se totiž objevily první články ([12], [13], [14]), které úspěšně vyřešily alespoň některé problémy související s nezápornými AR(1) procesy. Stručně naznačím, o co tam šlo. V dnešní době si těžko můžeme představit nějakou oblast matematické statistiky, která by se obešla bez simulačních studií. Generátory náhodných čísel na počítačích umožňují (alespoň aproximativně) realizovat výběry z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, 1)$. Pomocí různých transformací nebo užitím vhodných triků odtud pak získáváme realizace výběrů z rozdělení s danou distribuční funkcí H . V některých případech se však zkoumá i to, zda nějaká statistická procedura je citlivá na porušení předpokladu nezávislosti. Protože právě model AR(1) bývá často užíván pro popis závislých náhodných veličin, dostáváme se tak k úloze, jak vypočítat rozdělení bílého šumu e_t , má-li mít každá veličina X_t v (1.1) rozdělení s distribuční funkcí H . Pro případ, že mají mít exponenciální rozdělení, je řešení odvozeno v [12]. Články [13] a [14] se týkají obdobného problému pro další typy rozdělení souvisejících s exponenciálním. Blíže se lze o celé této záležitosti dočíst v přehledných člancích [1] a [2]. Pro praxi se však dosažené výsledky tak úplně nehodily, protože rea-

lizace zmíněných nezávislých stejně rozdělených veličin vykazovaly tzv. nulový defekt. Zhruba řečeno, realizace se skládaly převážně z úseků s klesajícími hodnotami X_t . Snahy odstranit tuto potíž vedly k autoregresním modelům s náhodnými parametry. Zdá se, že ani tato modifikace si mnoho příznivců nezískala - hlavně asi proto, že explicitní vzorec bylo možno odvodit jen pro několik distribučních funkcí H , a to ještě jen v případě zvlášť jednoduchých modelů. Nakonec se našlo řešení úplně jiné. Pokud by to čtenáře zajímalo, je o tom pojednáno v článcích [3], [9] a [5], ale to je námět na úplně jinou přednášku.

Zabývejme se nyní otázkou, jak odhadnout parametr b modelu (1.1) z dané realizace X_1, \dots, X_n . Pokud $Ee_t = 0$, většinou se k tomu používá metoda nejmenších čtverců. Za odhad b se bere ta hodnota b^0 , pro kterou je výraz

$$(1.2) \quad \sum_{t=2}^n (X_t - bX_{t-1})^2$$

minimální. Užívá se samozřejmě i mnoho dalších metod, např. Yuleova-Walkerova, Bayesova, metoda maximální věrohodnosti atd., ale obvykle všechny dávají téměř stejné výsledky. Pokud se obáváme odlehilých pozorování, lze místo (1.2) minimalizovat výraz

$$\sum_{t=2}^n \psi(X_t - bX_{t-1}),$$

kde ψ je některá ze známých funkcí užívaných v robustních metodách. Určitý problém nastává, má-li e_t neznámou střední hodnotu. Pak se dá postupovat analogicky, jen v (1.2) místo X_t je $X_t - \bar{X}$ a místo X_{t-1} je $X_{t-1} - \bar{X}$, kde $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Dá se sice dokázat, že asymptoticky se našemu odhadu b^0 neublíží, ale při menších hodnotách n bývá takový odhad dost vychýlený. Je to proto, že případná velká korelovanost sousedních veličin imituje posunutou střední hodnotu.

Vzniká otázka, zda lze najít zcela nové principy pro odhad autogresních parametrů, takové, které by zejména byly vhodné pro případ značně nenormálního rozdělení veličin X_t . Budeme se tím zabývat v následujících odstavcích tohoto článku.

2. Nezáporné AR(1) procesy

Zabývejme se nyní modelem (1.1) za předpokladu, že $X_1 \geq 0$ je daná veličina, $b \geq 0$ a e_t jsou nezáporné veličiny s nějakou distribuční funkcí F . Pak je jasné, že $X_t \geq 0$ pro všechna $t \geq 1$. Nechť je dána nějaká realizace X_1, \dots, X_n . Úkolem je odhadnout parametr b . Vynechme případ, že by $e_t = 0$ skoro jistě (s.j.). Budeme-li dělit obě strany relace (1.1) veličinou X_{t-1} , dostaneme

$$\frac{X_t}{X_{t-1}} = b + \frac{e_t}{X_{t-1}}.$$

Všimněme si zlomků e_t/X_{t-1} . Může-li e_t nabývat hodnot libovolně blízkých nule, pak lze očekávat, že alespoň jeden ze zlomků $e_2/X_1, \dots, e_n/X_{n-1}$ bude velmi malý, pokud délka realizace n bude dostatečně velká. Bude-li zaručeno, že e_t může nabývat libovolně velkých hodnot, potom se dá ukázat, že i X_{t-1} může nabývat libovolně velkých hodnot. Je tedy zas jen otázkou času, kdy nastane případ, že X_{t-1} bude velmi velké a přitom e_t bude mnohokrát menší než X_{t-1} . Také v tomto případě dříve či později alespoň jeden z podílů e_t/X_{t-1} bude velmi malý. Je však nutno konstatovat, že tato druhá možnost má cenu jen teoretickou. V praxi by se muselo na dostatečně velkou hodnotu X_{t-1} čekat beznadějně dlouho. Všechny tyto úvahy vedou k tomu, že za dosti obecných podmínek může mít

$$b^* = \min(X_2/X_1, \dots, X_n/X_{n-1})$$

jakožto odhad parametru b - dobré chování. Celá situace je vyšetřena v článku [11], kde autoři dospěli k následujícímu výsledku.

Věta 2.1. Odhad b^* při $n \rightarrow \infty$ konverguje k b s.j. právě tehdy, platí-li pro distribuční funkci F podmínka

$$(2.1) \quad F(d) - F(c) < 1 \quad \text{pro všechna} \quad 0 < c < d < \infty.$$

Důkaz podle údaje v [11] vymyslel prof. Pyke. Myšlenku tohoto důkazu pokládám za tak elegantní, že ji zde alespoň velmi stručně nastíním. Označme

$$M_n = \min(e_2/X_1, \dots, e_n/X_{n-1}).$$

Zaveďme dále symbol $[a]$ pro celou část čísla a . Snadno se dá ověřit, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\begin{aligned} P(M_n > \varepsilon) &= P(e_t > \varepsilon X_{t-1} \text{ pro } t = 2, \dots, n) \leq \\ &\leq P(e_t > \varepsilon e_{t-1} \text{ pro } t = 3, \dots, n) \leq \\ &\leq P(e_{2j} > \varepsilon e_{2j-1} \text{ pro } j = 2, \dots, [n/2]) = \\ &= \{P(e_4 > \varepsilon e_3)\}^{[n/2]-1}. \end{aligned}$$

Platí-li

$$(2.2) \quad P(e_4 > \varepsilon e_3) < 1,$$

pak $P(M_4 < \varepsilon) + P(M_5 < \varepsilon) + \dots < \infty$. Z Borelova-Cantelliho lemmatu vyplývá, že s pravděpodobností 1 nastává jen konečně mnoho jevů $\{M_n > \varepsilon\}$, takže $M_n \rightarrow 0$ s.j., čili také $b^* \rightarrow b$ s.j.

Je jen technickou záležitostí dokázat, že z (2.1) vyplývá (2.2) a že při neplatnosti (2.1) není b^* ani konzistentním odhadem.

Povšimněme si, že podmínka (2.1) právě vylučuje ty případy, kdy e_t nemůže nabývat ani libovolně malých ani libovolně velkých hodnot. Věta 2.1 je tedy v souladu s intuitivními úvahami, které jsme provedli před její formulací.

Předpokládejme nyní, že e_t mají exponenciální rozdělení $Ex(\lambda)$ s hustotou $f(y) = \lambda^{-1} \exp(-y/\lambda)$ pro $y > 0$. Zvolme X_1 tak, aby $X_1 \sim Ex\{\lambda/(1-b)\}$, $0 \leq b < 1$. Tato volba zajišťuje alespoň to, že se EX_1 rovná střední hodnotě stacionárního rozdělení procesu X_t definovaného v (1.1). Explicitní vzorec pro zmíněné stacionární rozdělení totiž není znám. Pro $v \geq b$ zaveďme funkce

$$\begin{aligned} f_k(v) &= 1 + (v - b)(1 + v + \dots + v^{k-1}), \\ f_{n-1}^0(v) &= 1 + (v - b)(1 + v + \dots + v^{n-2})/(1 - b). \end{aligned}$$

Věta 2.2. Distribuční funkce b^* je rovna $1 - G(v)$, kde

$$\begin{aligned} G(v) &= [f_1(v) \dots f_{n-2}(v) f_{n-1}^0(v)]^{-1} \quad \text{pro } v \geq b, \\ G(v) &= 1 \quad \text{pro } v < b. \end{aligned}$$

Důkaz viz [4].

Numericky byly vypočteny i kritické hodnoty tohoto rozdělení. Např. při $b = 0$ jsou pětiprocentní kritické hodnoty 0,15 pro $n = 20$ a 0,03 pro $n = 100$. V článku [4] jsou uvedeny i různé poměrně jednoduché aproximace funkce G , pomocí nichž lze snadno stanovit dostatečně přesně jak kritické hodnoty, tak i intervaly spolehlivosti.

Jinou otázkou je stanovení Eb^* a $\text{var } b^*$. Pro případ exponenciálně rozděleného bílého šumu lze odvodit různé nerovnosti, např.

$$b + n^{-1}(1 - b)^2 \leq Eb^* \leq b + (n - 2)^{-1},$$

ale pro praktické použití se zdají být dost hrubé. Momenty lze samozřejmě vypočítat numericky. Některé výsledky jsou tabelovány v [10]. Dosti kvalitní aproximace se však získá pomocí následující úvahy. Máme

$$(2.3) \quad b^* = b + \min(e_2/X_1, \dots, e_n/X_{n-1}).$$

Nechť $e_t \sim \text{Ex}(1)$. Volba $\lambda = 1$ je zde bez újmy na obecnosti, protože rozdělení odhadu b^* na λ nezávisí. Stacionární rozdělení má pak střední hodnotu $EX_t = (1 - b)^{-1}$. Nahradíme-li v (2.3) každé X_t touto střední hodnotou, máme

$$b^* \cong b + (1 - b) \min(e_2, \dots, e_n).$$

Je-li však $e_t \sim \text{Ex}(1)$, pak platí $\min(e_2, \dots, e_n) \sim \text{Ex}\{(n - 1)^{-1}\}$. Proto

$$(2.4) \quad Eb^* \cong b + (n - 1)^{-1}(1 - b), \quad \text{var } b^* \cong (n - 1)^{-2}(1 - b)^2.$$

Např. pro $b = 0,2$ při $n = 10$ jsou přesné hodnoty $Eb^* = 0,2824$, $(\text{var } b^*)^{1/2} = 0,0767$, zatímco jejich aproximace založené na (2.4) jsou $Eb^* \cong 0,2889$, $(\text{var } b^*)^{1/2} \cong 0,0889$. S rostoucím n se přesnost aproximace výrazně zvyšuje.

Znalost Eb^* je důležitá mimo jiné proto, že odhad b^* je vychýlený. To je vidět i z výše uvedeného příkladu. Jednou z možností, jak toto vychýlení výrazně redukovat, je následující postup. Získá-li se výpočtem nějaká hodnota b^* , vypočteme z ní nový odhad b' tak, aby platilo, že b^* je střední hodnotou odhadu $\min(X_2/X_1, \dots, X_n/X_{n-1})$ při "skutečné" hodnotě parametru $b = b'$. Simulační studie uvedená v [10] ukazuje, že tato jednoduchá rada dává velmi dobré výsledky

Jiný zajímavý a velmi účinný způsob redukce vychýlení odhadu b^* je navržen v článku [16]. Autorka tam předpokládá, že

$$e_t \sim \text{Ex}(\theta^{-1}), \quad X_1 \sim \text{Ex}[\theta^{-1}(1 - b)^{-1}].$$

Označíme-li

$$\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n, \quad S = n\bar{x} - x_n + x_1,$$

pak se snadno ověří, že podmíněná hustota vektoru $(X_1, \dots, X_n)'$ při daném θ a b je rovna

$$p(x|\theta, b) = \theta^n (1 - b) \exp\{-\theta(n\bar{x} - bS)\}$$

pro $x_1 > 0$, $x_t > bx_{t-1}$ ($t = 2, \dots, n$). Označme dále

$$b_0 = \min(1, b^*), \quad r = 1 - n^{-1}b_0S/\bar{x},$$

$$C = S(n\bar{x})^{n-1} r^{n-1} / [(1 - r^{n-1}) \Gamma(n - 1)].$$

Pokládáme-li θ a b za náhodné veličiny se sdruženou nevlastní apriorní hustotou

$$p_0(\theta, b) = \theta^{-1}(1-b)^{-1} \quad \text{pro } \theta > 0, \quad 0 \leq b < 1,$$

pak marginální aposteriorní hustota b při daném x vyjde

$$p_2(b|x) = C \Gamma(n)(n\bar{x} - bS)^{-n} \quad \text{pro } 0 \leq b \leq b_0$$

a aposteriorní střední hodnota je

$$E(b|x) = \frac{b_0}{n-2} \left\{ (1-r^{n-1})^{-1}(n-1) - (1-r)^{-1} \right\}.$$

Uveďme alespoň jeden z výsledků numerické studie prezentované rovněž v [16]. V případě $n = 10$ a $b = 0,5$ bylo provedeno 1000 simulací. Průměrná hodnota odhadu b_0 v nich činila 0,555, zatímco průměrná hodnota $E(b|x)$ byla 0,498. Dalším algebraickým výpočtem se dá zjistit, že v tomto případě je $\text{var}(b|x) = 0,004$. Empirický rozptyl veličin $E(b|x)$ činil 0,003, což je velmi dobrá shoda.

3. Nelineární nezáporné AR(1) procesy

Nechť X_1 je daná nezáporná náhodná veličina. Položme

$$(3.1) \quad X_t = b g(X_{t-1}) + e_t, \quad t = 2, 3, \dots,$$

kde g je měřitelná funkce zobrazující $[0, \infty)$ do $[0, \infty)$ a $b \geq 0$. Budiž F distribuční funkce veličiny e_t . Opět se předpokládá, že $e_t \geq 0$.

Stejně jako u obyčejných nezáporných AR(1) procesů se dá očekávat, že odhad

$$b^* = \min \{ X_2/g(X_1), \dots, X_n/g(X_{n-1}) \}$$

parametru b bude mít dobré statistické vlastnosti. Skutečně, pomocí jednoduchých pravděpodobnostních metod lze odvodit řadu zajímavých vlastností odhadu b^* , z nichž zde uvedeme alespoň následující dvě.

Věta 3.1. Nechť g je neklesající funkce, přičemž $g(x) > 0$ pro $x > 0$ a $g(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow \infty$. Je-li splněna podmínka (2.1), pak $b^* \rightarrow b$ s.j.

Věta 3.2. Nechť g je nerostoucí, přičemž $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$ a $g(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow 0^+$. Nechť $P(e_t > d) \in (0, 1)$ pro každé $d > 0$. Pak $b^* \rightarrow b$ s.j.

Důkazy obou vět jsou uvedeny v [7].

Mají-li např. e_t rozdělení $Ex(\lambda)$, pak věta 3.1 zaručuje, že b^* je striktně konzistentní odhad parametru b v modelu

$$X_t = b X_{t-1}^{1/2} + e_t,$$

a věta 3.2 zaručuje totéž v modelu

$$X_t = b/X_{t-1} + e_t.$$

Poznamenejme, že model (3.1) je vyšetřován v literatuře už více než 10 let. Ale teprve v roce 1987 odvodil Loges v článku [15], že v případě spojitě funkce g při splnění jistých obecných podmínek odhad b_n^0 parametru b metodou nejmenších čtverců konverguje k b skoro jistě.

4. Nezáporné autoregrese vyšších řádů

Základní problémy vysvětlíme na modelu AR(2). Nechť

$$(4.1) \quad X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + e_t,$$

kde $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, $e_t \geq 0$, $Ee_t^2 < \infty$, $z^2 - b_1 z - b_2 \neq 0$ pro $|z| \geq 1$ a pro distribuční funkci F veličin e_t platí podmínka (2.1). Pokusme se zobecnit metody vyložené v případě modelu AR(1) na tento případ. Budeme-li dělit obě strany (4.1) veličinou X_{t-1} , dostaneme

$$X_t/X_{t-1} = b_1 + (b_2 X_{t-2} + e_t)/X_{t-1}.$$

Zcela analogicky jako v odstavci 2 lze dospět k názoru, že v dlouhé řadě pokusů alespoň jeden člen $(b_2 X_{t-2} + e_t)/X_{t-1}$ bude muset být velmi malý. To lze skutečně dokázat i exaktně. Je samozřejmé, že důkaz bude technicky mnohem komplikovanější.

Věta 4.1. Označme $b_1^+ = \min(X_3/X_2, \dots, X_n/X_{n-1})$.

Pak $b_1^+ \rightarrow b_1$ s.j. při $n \rightarrow \infty$.

Důkaz viz [6].

Trochu složitější výsledek se získá při obdobném pokusu o odhad parametru b_2 .

Věta 4.2. Označme $b_2^+ = \min(X_3/X_1, \dots, X_n/X_{n-2})$. Pak $b_2^+ \rightarrow b_2 + b_1^2$ s.j. při $n \rightarrow \infty$.

Důkaz viz [6].

Věta 4.1 zaručuje, že b_1^+ je striktně konzistentním odhadem parametru b_1 . Z věty 4.2 se snadno získá, že $b_2^+ - (b_1^+)^2$ je striktně konzistentním odhadem parametru b_2 . Simulační studie však ukázaly, že odhady jsou značně vychýlené a konvergence k b_1 i k b_2 je velmi pomalá. Dokonce ani hodnota $n = 10^6$ není ještě dost velká k tomu, aby se tyto odhady daly rozumně použít. Přitom se nepodařilo najít žádné vhodné vzorce pro vychýlení odhadů. Bylo tedy nutné najít zcela originální postup.

Mají-li e_t rozdělení $Ex(\lambda)$, pak podmíněná věrohodnost veličin X_3, \dots, X_n při daných X_1 a X_2 je

$$L = \lambda^{-n+2} \exp \left\{ -\lambda^{-1} \sum_{t=3}^n (X_t - b_1 X_{t-1} - b_2 X_{t-2}) \right\},$$

pokud

$$(4.2) \quad X_t - b_1 X_{t-1} - b_2 X_{t-2} \geq 0 \quad \text{pro } t = 3, \dots, n.$$

Nejsou-li podmínky (4.2) splněny, pak $L=0$. Chceme-li maximalizovat L , musíme tedy maximalizovat

$$(4.3) \quad b_1 \sum_{t=3}^n X_{t-1} + b_2 \sum_{t=3}^n X_{t-2}$$

za podmínek (4.2). Při větších hodnotách n lze očekávat, že se koeficienty stojící při b_1 a při b_2 v (4.3) nebudou relativně příliš lišit, takže místo (4.3) by bylo možné maximalizovat jednoduše součet $b_1 + b_2$. Dá se ukázat, že tato metoda dává skutečně dobré odhady, a to nejen v případě, že bílý šum má exponenciální rozdělení.

Věta 4.3. Nechť b_1^*, b_2^* jsou nějaké hodnoty maximalizující $b_1 + b_2$ za podmínek (4.2).

Předpokládejme, že distribuční funkce F náhodných veličin e_t splňuje podmínku (2.1).

Pak $b_1^* \rightarrow b_1$ a $b_2^* \rightarrow b_2$ s.j. při $n \rightarrow \infty$.

Důkaz je uveden v [6]. Je pozoruhodné, že se podařilo dokázat konvergenci b_1^* a b_2^* , aniž by bylo možné tyto veličiny vyjádřit nějakým vzorcem. Získávají se pomocí lineárního programování. Stojí za zmínku, že v důkazu bylo nutné použít zdánlivě zbytečných vět 4.1 a 4.2.

Podstatné je, že b_1^* , b_2^* konvergují k b_1, b_2 dostatečně rychle, takže tyto odhady lze použít i při malé délce realizace n . Např. u modelu $b_1=0,2$ a $b_2=0,6$ při $n = 20$ a při bílém šumu majícím rovnoměrné rozdělení na $(0,1)$ průměr b_1 ze 100 simulací činil 0,237, průměr b_2 činil 0,619, zatímco u odhadů pořízených metodou nejmenších čtverců tyto průměry činily po řadě 0,063 a 0,392. Navíc odhady b_1 a b_2 mají mnohem menší rozptyly než odpovídající odhady metodou nejmenších čtverců.

5. Další výsledky a závěry

Obdobná metodika se ukázala být vhodná i pro mnohé další typy modelů. Výsledky odstavce 4 byly zobecněny na nezáporný nelineární model AR(1) daný předpisem

$$X_t = b_1 h_1(X_{t-1}) + b_2 h_2(X_{t-2}) + e_t,$$

kde h_1, h_2 jsou nezáporné nelineární funkce splňující určité další podmínky. Výsledky lze najít v článku [8]. Analogické metody byly rozpracovány i pro nezáporné mnohorozměrné autoregresní procesy a pro některé další modely. Bylo by však vhodné získat ještě další zkušenosti z rozsáhlejších simulačních studií.

Čtenář si však nepochybně bude klást otázku, jak se dá z dat poznat, kdy metody uvedené v tomto článku jsou výhodnější než klasické odhady metodou nejmenších čtverců. Dosavadní výsledky ukazují, že je to u takových nezáporných časových řad, jejichž marginální rozdělení je výrazným způsobem kladně zešikmeno. Jak již bylo uvedeno na začátku celého článku, tuto informaci můžeme vyčíst z prostého histogramu veličin X_1, \dots, X_n . Autor se domnívá, že tyto vlastnosti mají zejména mnohé hydrologické časové řady.

Literatura

- [1] Anděl J. (1983): Dependent random variables with a given marginal distribution. Acta Univ. Carolinae-Math.Phys. 24, 3-12.
- [2] Anděl J. (1983): Marginal distributions of autoregressive processes. In: Trans. Ninth Prague Conf. on Inform. Theory, Statist. Dec. Functions, Random Processes. Academia, Prague, pp. 127-135.
- [3] Anděl J. (1987): On linear processes with given moments. J. Time Ser. Anal. 8, 373-378.
- [4] Anděl J. (1988): On AR(1) processes with exponential white noise. Commun. Statist.-Theory Meth 17, 1481-1495.
- [5] Anděl J. (1989): AR(1) processes with given moments of marginal distribution. Kybernetika 25, 337-347.
- [6] Anděl J. (1989): Non-negative autoregressive processes. J. Time Ser. Anal. 10, 1 - 11.
- [7] Anděl J. (1989): Nonlinear nonnegative AR(1) processes. Commun. Statist.-Theory Meth. 18, 4029 - 4037.
- [8] Anděl J. (1990): Nonlinear positive AR(2) processes. Statistics 21 (přijato).
- [9] Anděl J., Garrido M. (1988): On stationary distributions of some time series models. In: Trans. Tenth Prague Conf. on Inform. Theory, Statist. Dec. Functions, Random Processes. Academia, Prague, pp. 193-202.
- [10] Anděl J., Zvára K. (1988): Tables for AR(1) processes with exponential white noise. Kybernetika 24, 372-377.
- [11] Bell C.B., Smith E.P. (1986): Inference for non-negative autoregressive schemes. Commun. Statist.-Theory Meth. 15, 2267-2293.
- [12] Gaver D.P., Lewis P.A.W. (1980): First-order autoregressive gamma sequences and point processes. Adv. Appl. Prob. 12, 727-745.

- [13] Lawrance A.J.(1980): The mixed exponential solution to the first-order autoregressive model. J. Appl. Prob. 17, 546-552.
- [14] Lawrance A.J., Lewis P.A.W. (1980): The exponential autoregressive-moving average EARMA(p,q) process. J.Roy. Statist. Soc. B 42,150-161.
- [15] Loges W. (1987): Note on parameter estimation for general nonlinear time series models. Statistics 18, 587-590.
- [16] Turkman M.A.A.(1990): Bayesian analysis of an autoregressive process with exponential white noise. Statistics 21 (přijato).